

Feuille 0 : Sup $\rightarrow$ Spé PSI

Petits exercices en guise d'échauffement

Ceci est une liste non limitative d'exercices vous incitant à aller revisiter l'ensemble du cours de Sup. Une connaissance précise du cours de première année est un préalable indispensable pour bien démarrer l'année de Spé.

Ces exercices seront corrigés uniquement en fonction de vos demandes.

1 Dériver/intégrer

Vous devez connaître les formules de dérivation, dont la formule de Leibniz, les dérivées et les primitives usuelles. Listez les méthodes classiques d'intégration pour les catégories type, en particulier les fonctions rationnelles simples.

En précisant les intervalles sur lesquels ces calculs ont un sens :

1. Dériver : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x + 1}$; $g(x) = \arcsin(2x + 3)$
2. Intégrer : $f(x) = (x + 1) \sin x$; $g(x) = e^{2x} \cos x$; $h(x) = \ln(1 - x)$;
 $k(x) = \frac{2x + 1}{(x - 1)(x - 2)}$; $l(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 4}$.
3. Calculer la dérivée n -ième de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$ en utilisant une décomposition en éléments simples.

2 Comparer deux réels

Des inégalités classiques à connaître et à savoir redémontrer :

1. $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$ (représenter graphiquement)
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ (représenter graphiquement)
3. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ (représenter graphiquement)
4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ (très simple, et très utile !)

Attention : On ne peut pas écrire une inégalité entre deux nombres complexes non réels.

3 Déterminer et utiliser des développements limités et des équivalents

Il faut bien connaître les équivalents et les développements limités usuels, ainsi que les règles de calcul sur les équivalents et les calculs "interdits".

1. Incontournable : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (NON, elle n'est pas égale à 1 !!)
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x - \frac{1}{2} \sin(2x)}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - 1} - \frac{1}{x - 1}\right)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + 2}{n + 3}\right)^{2n}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} par deux méthodes (au moins).

3. Soit E l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et telles que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$. Montrer que E est stable pour le produit matriciel.

9 Etudier si une famille est libre

- Dans $\mathbb{R}^4$: $u = (1, 1, 1, -1), v = (2, 1, -1, -3), w = (-1, 2, 1, 0), z = (0, -1, 1, 1)$
- Dans $\mathbb{R}_3[X]$: $P_1 = X^3 + 3X^2 - X + 1, P_2 = X^3 + X^2 + 4X - 1, P_3 = X^2 + 3X, P_4 = 3X^2 - 2X + 2$.
- Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $f_1 : x \mapsto \sin(x), f_2 : x \mapsto \sin(2x), f_3 : x \mapsto \sin(3x)$

Exemples à connaître : une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre ; une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (cas particulier : famille orthonormée).

10 Relier équation et base d'un s.e.v.

Il faut connaître la caractérisation d'un sous-espace vectoriel. Mais montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est "le sous-espace vectoriel engendré" par une famille de vecteurs prouve en particulier que F est un sous-espace vectoriel (et, le cas échéant, peut permettre d'en déterminer une base et d'en déduire sa dimension). De même, reconnaître que F est le noyau d'une application linéaire prouve que F est un sous-espace vectoriel.

- Dans $E = \mathbb{R}^4$, montrer que : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z + t = 0, 2x - 3y + z + 2t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base. Quelle est sa dimension ?
- Dans $\mathbb{R}^4$, on note : $\vec{u} = (1, 2, 3, 4), \vec{v} = (-1, 1, 1, 1)$ et $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Quelle est la dimension de F ? Déterminer un système d'équations de F .

11 Ecrire et utiliser une matrice d'application linéaire

L'écriture d'une matrice d'application linéaire se fait en colonnes.

Il faut connaître les formules de changement de bases.

- Soit f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $f(P)$ tel que : $f(P)(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.
Montrer que f est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base canonique. Déterminer son noyau et son image.
- Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 16 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$, une base de $\ker(f)$ et montrer que : $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

12 Montrer qu'une application est un produit scalaire

- Dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, montrer que l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)e^t dt$ est un produit scalaire.

18 Raisonner par contraposée / Raisonner par l'absurde

Ces deux raisonnements peuvent souvent être utilisés de manière interchangeable

1. n étant un entier strictement positif, montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas. Montrer que f est injective.

19 Prouver une équivalence par double implication

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

Montrer que : $\ker u = \ker(u^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \cap \ker u = \{\vec{0}\}$.

20 Raisonner par analyse et synthèse

Autrement dit : raisonner par condition nécessaire / condition suffisante.

1. Déterminer toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation : $M + \operatorname{tr}(M)I_n = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
($\operatorname{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M .)
3. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E tel que $f \circ f = f$. Montrer que : $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
Quelle est la nature de f ?