Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (●), deux (●●), trois (●●●) ou quatre (●●●●) horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`.

Fiche de calcul n° 10 009A

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

Calcul 10.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

b) e^{2t+1} ....

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$ ....

d) $\dfrac{1}{1+9t^2}$ ....

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ....

c) $\dfrac{8e^{2t}}{(3-e^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$ ....

f) $\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 10.5 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$ ……

b) $\cos(t)e^{\sin t}$ ……

c) $\tan t$ ……

d) $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ ……

e) $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ……

f) $\dfrac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ ……

g) $\tan^2 t$ ……

h) $\tan^3 t$ ……

i) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ……

j) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ……

k) $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$ ……

l) $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$ ……

m) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ……

n) $\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$ ……

o) $\dfrac{\operatorname{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ ……

p) $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}\operatorname{Arcsin}(t)}$

Calcul 10.6 — Trigonométrie – *bis.*

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$ ……

b) $\cos(t)\sin(3t)$ ……

c) $\sin^3 t$ ……

d) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$ ……

e) $\dfrac{1}{\sin t \cos t}$ ……

f) $\dfrac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}$ ……

g) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ ……

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ ……

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ……

c) $\dfrac{1-t^6}{1-t^2}$ ……

d) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$ ……

e) $\dfrac{t-1}{t+1}$ ……

f) $\dfrac{t^3}{t+1}$ ……

g) $\dfrac{t-1}{t^2+1}$ ……

h) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ ……

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) t^2-2t+5 ……

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ ……

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ ……

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ……

e) $e^{2t}+e^{-3t}$ ……

f) e^{3t-2} ……

g) $\dfrac{t^2}{t^3-1}$ ……

h) $\dfrac{3t-1}{t^2+1}$ ……

i) $\sin(t)\cos^2(t)$ ... $\boxed{}$

j) $\sinh(t)\cosh(t)$ .. $\boxed{}$

k) $\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$ .... $\boxed{}$

l) $\dfrac{e^t}{2+e^t}$ .... $\boxed{}$

m) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ ...... $\boxed{}$

n) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ .... $\boxed{}$

o) $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos^2 t}$ ...... $\boxed{}$

p) te^{-t^2} .... $\boxed{}$

q) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ .... $\boxed{}$

r) $\dfrac{1}{t\ln t}$ .... $\boxed{}$

s) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ .... $\boxed{}$

t) $\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$ .... $\boxed{}$

Calcul 10.9 — ***Bis repetita.***

Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Réponses mélangées

$\ln|t+1| + \dfrac{1}{t+1}$ $\quad$ $2\dfrac{3\cos^2 t - 1}{(1+\cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1+\cos^2(t))$ $\quad$ $\cos t(3\cos^2 t - 2)$ puis $-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

$\dfrac{\ln t - 2}{t^2}$ puis $\ln t - \dfrac{1}{2}\ln^2 t$ $\quad$ $\dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|$ $\quad$ $\ln|t+1|$ $\quad$ $-\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)$

$\ln|1-e^{-t}+e^t|$ $\quad$ $\sinh(t)^2 + \cosh^2(t)$ puis $\dfrac{1}{2}\sinh^2(t)$ $\quad$ $-\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad$ $-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad$ $-\dfrac{\cos(4t)}{4}$

$-e^{\frac{1}{t}}$ $\quad$ $\ln t - \dfrac{1}{2t^2}$ $\quad$ $t - 2\ln|t+1|$ $\quad$ $\ln(1+\sin^2 t)$ $\quad$ $\dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \mathrm{Arctan}(t)$

$\ln|\tan t|$ $\quad$ $\dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)$ $\quad$ $t + \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5}$ $\quad$ $-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t|$ $\quad$ $-2\cos\sqrt{t}$

$-\ln|1-\sin t|$ $\quad$ $-\dfrac{3}{2(t+2)^2}$ $\quad$ $2e^{2t} - 3e^{-3t}$ puis $\dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{3}e^{-3t}$ $\quad$ $\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$

$\dfrac{2}{(3-e^{2t})^2}$ $\quad$ $t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \ln|t+1|$ $\quad$ $-\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln|\ln t|$ $\quad$ $-\sqrt{1-t^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}(\mathrm{Arcsin}(t))^2$

$-\dfrac{1}{\tan t}$ $\quad$ $\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $\tan t - t$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2t)$ $\quad$ $\dfrac{1}{4}\tan^4 t$ $\quad$ $\dfrac{1}{2\sqrt{t}} + \dfrac{3}{t^4}$ puis $\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2t^2}$

$\dfrac{2e^t}{(2+e^t)^2}$ puis $\ln(2+e^t)$ $\quad$ $\mathrm{Arctan}(e^t)$ $\quad$ $-\mathrm{cotan} t + \tan t$ $\quad$ $-\ln|\cos t|$

$2(t-1)$ puis $\dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t$ $\quad$ $-\dfrac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2})$ puis $\mathrm{Arctan}(e^t)$ $\quad$ $2\sqrt{\ln t}$ $\quad$ $t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3}$

$3e^{3t-2}$ puis $\dfrac{1}{3}e^{3t-2}$ $\quad$ $-\dfrac{2t\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos\dfrac{1}{t}$ $\quad$ $e^{\sin t}$ $\quad$ $-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right)$ puis $-\dfrac{1}{t} + \ln|t|$

$(1-2t^2)e^{-t^2}$ puis $-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)$ $\quad$ $\dfrac{\cos\ln t - \sin\ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t))$

$\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|$ $\quad$ $\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4}$ $\quad$ $-\dfrac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}$ puis $\dfrac{3}{2}\ln(t^2+1) - \mathrm{Arctan}(t)$ $\quad$ $-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}$ $\quad$ $t + \ln t - \dfrac{1}{t}$ $\quad$ $2\sqrt{\tan t}$ $\quad$ $\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$

$\ln|\mathrm{Arcsin}(t)|$ $\quad$ $\dfrac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|$ $\quad$ $\dfrac{1}{4}\ln^4 t$ $\quad$ $-\dfrac{\cos(4t)}{8} - \dfrac{\cos(2t)}{4}$

$-\dfrac{4}{t^5} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3} - \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)$ $\quad$ $-\dfrac{3}{t+2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}e^{2t+1}$

► Réponses et corrigés page 104

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon sens ».

Calcul 11.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. ☐

b) $\int_{5}^{-3} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x$ ☐

c) $\int_{0}^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x$ ... ☐

Calcul 11.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$ .... ☐

b) $\int_{7}^{-3} -5 \,\mathrm{d}x$ ..... ☐

c) $\int_{0}^{7} 3x \,\mathrm{d}x$ ...... ☐

d) $\int_{2}^{8} 1 - 2x \,\mathrm{d}x$ .. ☐

e) $\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ .... ☐

f) $\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$ ...... ☐

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{3} 2 \,\mathrm{d}x$ .... ☐

b) $\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x$ .... ☐

c) $\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x$ .... ☐

d) $\int_{-1}^{1} 3x^5 - 5x^3 \,\mathrm{d}x$ .... ☐

e) $\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x$ .... ☐

f) $\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$ .... ☐

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.

Calculer.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$ ... ☐

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$ ... ☐

c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ .... ☐

d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ ... ☐

e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ...... ☐

f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ .... ☐

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\frac{\pi}{3}-x\Big) \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5 \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x| \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Arcsin} x \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

Positif $\quad \mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3} \quad -\ln 3 \quad 0 \quad \dfrac{2\pi}{9} \quad 2(\mathrm{e}^3-1) \quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}+1} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dfrac{7}{48}$

$\dfrac{1}{\pi}\ln\Big(1+\dfrac{\pi}{2}\Big) \quad 8 \quad \dfrac{\sqrt{2}}{6} \quad -2 \quad 3\mathrm{e}-4 \quad 18 \quad 78 \quad \dfrac{2}{3} \quad \dfrac{17}{2} \quad \dfrac{1}{384} \quad \ln\Big(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big)$

$-\dfrac{1}{30} \quad -\dfrac{2}{101} \quad \dfrac{5}{8} \quad -54 \quad \dfrac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2} \quad 0$ Négatif $\quad \mathrm{e}^2 \quad \dfrac{99}{\ln 10} \quad 6 \quad \dfrac{1}{2} \quad 0$

$50 \quad \dfrac{147}{2} \quad 0 \quad 14$ Positif $\quad \dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\Big) \quad \dfrac{\pi}{4} \quad \dfrac{8}{3} \quad \dfrac{5}{2} \quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad -\dfrac{1}{3}$

▶ Réponses et corrigés page 107

Fiche de calcul n° 12 **011A**

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 12.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 12.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

d) $x \longmapsto x\mathrm{ch}(x)$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{sh}(x)$ ....

b) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

c) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

d) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(x)}$ ....

Réponses mélangées

$$\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2} \qquad \frac{5}{2}\mathrm{ch}(2) - \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2) - \frac{3}{2} \qquad \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x)) \end{cases} \qquad -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} \qquad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32} \qquad 4 \qquad \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9} \qquad 1 \qquad \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} - 1 \qquad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\frac{1}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\ln x + \frac{2}{27}\right) \end{cases} \qquad \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2 \qquad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) \end{cases} \qquad \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2} \qquad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \qquad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1+\ln x}{x} \end{cases} \qquad 2\ln 2 - \frac{3}{4} \qquad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

► Réponses et corrigés page 111

Changements de variable

Prérequis
Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 13.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calcul 13.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos t$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{t}{2} - 1$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan u$ ....

e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$ ....

f) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ....

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 13.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 13.4

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$ ....

b) $x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{1+\operatorname{th}(x)}$ avec $u = e^x$ ....

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$ ....

d) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

e) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u = \sqrt{x^2-1}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\pi}{6}$ $\quad 2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) \end{cases}$ $\quad \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad 2e^2$

$\dfrac{1}{12}$ $\quad \dfrac{1}{4}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1) \end{cases}$ $\quad -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}$

$\begin{cases}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan\sqrt{x^2-1} \end{cases}$ $\quad \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2e+1}{3}\right)$ $\quad \dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{8}$ $\quad \dfrac{\pi}{12}$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{2} - \dfrac{e^{-2x}}{4} \end{cases}$ $\quad 2\arctan(e) - \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \begin{cases} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x + \ln\tan(x) \end{cases}$

▶ Réponses et corrigés page 114

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.
Petites décompositions en éléments simples.
Forme canonique d'un trinôme du second degré.
Changements de variable affines dans les intégrales.

Premier cas

Calcul 14.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

Calcul 14.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

Deuxième cas

Calcul 14.3

Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

Troisième cas

Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître un expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 14.4

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

Calcul 14.5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{}$

Quatrième cas

Calcul 14.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.7

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.8

Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t$ ....

Cinquième cas

Calcul 14.9 — Une primitive à retenir.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculer la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ ....

b) Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ ....

Calcul 14.10

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.11

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$ ....

Synthèse

Calcul 14.12 — Mise sous forme canonique.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 14.13

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.14

Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{4}{9}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Un calcul plus difficile

Calcul 14.15

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad \ln\dfrac{33}{28}$ $\quad \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$ $\quad \dfrac{\pi}{4}$ $\quad -\dfrac{1}{48}+\dfrac{51}{64}\ln\dfrac{21}{19}$ $\quad \dfrac{1}{3}\left(\ln(2)+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

$2\ln\dfrac{4}{3}$ $\quad \ln\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)$ $\quad \ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ $\quad \dfrac{\pi}{12}$ $\quad \ln\dfrac{1}{3}$ $\quad$ 1 et 2 $\quad \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}$ $\quad \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$ $\quad \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ $\quad 2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ $\quad \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad 2\ln\dfrac{9}{10}$ $\quad \sqrt{2}(x+\frac{1}{4})^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}$

$\ln(2)$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$ $\quad a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}$ $\quad \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad \ln(a+1)$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ $\quad \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\dfrac{a}{a^2+x^2}$ $\quad \ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$ $\quad \dfrac{3}{2}+\ln(2)-\ln(3)$ $\quad A=-1$ et $B=1$ $\quad 2\ln\dfrac{4}{3}$ $\quad \dfrac{1}{2}$

► Réponses et corrigés page 117

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 15.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 15.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ....

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 15.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 15.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ....

Calcul 15.5

On considère le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. ....

Calcul 15.6

On considère le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2, c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ....

Calcul 15.7

On propose le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

Réponses mélangées

$\{(7,2)\}$ $\{(x,x,x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ $(2,-3)$ $\{(5,3,-1)\}$ $\{(3,1)\}$ $\{(5z, 1-4z, z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\}$

$\{(x, y, -x-y)\,;\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ $\varnothing$ $\{(2,-1,3)\}$ $(a - 2a^2, a + a^2)$ $\{(0,0,0)\}$

$\left\{(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a)\right\}$ $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ $\left\{(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z); z \in \mathbb{R}\right\}$

$\{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\}$ $\varnothing$ $\varnothing$ $\{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$ $\left\{(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})\right\}$

$\left\{(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c, \frac{a^2-a-1}{a^3-1}c, \frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c)\right\}$ $\left\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\right\}$ $\left\{(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2)\right\}$

$\{(1, 1/2, 1/2)\}$ $\left\{(-\frac{2}{7} - z, \frac{-3}{7}, z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\right\}$ $\left\{(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x); x \in \mathbb{R}\right\}$ $\{(-1,4,2)\}$

▶ Réponses et corrigés page 124

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 16.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i})$ ....

b) $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$ ....

c) $(4-3\mathrm{i})^2$ ....

d) $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ ....

e) $(2-3\mathrm{i})^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ ....

g) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ ....

h) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 16.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 ....

b) -8 ....

c) $\sqrt{3}\mathrm{i}$ ....

d) $-2\mathrm{i}$ ....

e) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ ....

f) $5-5\mathrm{i}$ ....

g) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ ....

h) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Un calcul plus dur

Calcul 16.3 — Une simplification.

On pose $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.

a) Calculer $|z|$ ....

b) Mettre z sous forme algébrique ....

c) Calculer z^{2021} ....

Réponses mélangées

$13-\mathrm{i}$ $\quad \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$ $\quad 1$ $\quad 4+32\mathrm{i}$ $\quad \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$ $\quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$ $\quad -119+120\mathrm{i}$

5 $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ $\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 12$ $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ $\quad \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\quad 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad 7-24\mathrm{i}$ $\quad 10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$

▶ Réponses et corrigés page 129

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisation

Calcul 17.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ ....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc moitié, arc moyen

Calcul 17.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ ....

Calcul 17.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Délinéarisation

Calcul 17.4

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ ....

b) $\sin(4x)$ ....

Factorisation

Calcul 17.5

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

c) $\cos(x) - \cos(3x)$ .....

d) $\sin(3x) + \sin(5x)$ .....

Calcul 17.6

Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ ....

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$ ....

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

Intégrales

Calcul 17.7

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x} \cos(x)\,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{1}{8}\cos(6x) + \dfrac{1}{4}\cos(4x) - \dfrac{3}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$ $\qquad$ $4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

$2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$ $\qquad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{4}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $2\cos(4x)\sin(x)$

$\dfrac{\cos(9x)}{8} + \dfrac{3\cos(5x)}{8} + \dfrac{\cos(3x)}{8} + \dfrac{3\cos(x)}{8}$ $\qquad$ $4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$ $\qquad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$

$\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\qquad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ $\qquad$ $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}$ $\qquad$ $2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$

$\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\qquad$ $2\cos(2x)\cos(x)$ $\qquad$ $2\sin(x)\sin(2x)$ $\qquad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2)$

$2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $2\sin(4x)\cos(x)$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{2}$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{4}\sin(11x) + \dfrac{1}{4}\sin(5x) + \dfrac{1}{2}\sin(3x)$

$\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}$ $\qquad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\qquad$ $-\dfrac{\sin(9x)}{8} + \dfrac{3\sin(5x)}{8} - \dfrac{\sin(3x)}{8} - \dfrac{3\sin(x)}{8}$

▶ Réponses et corrigés page 131

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carré, logarithme népérien).

Si q est un nombre réel et si $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m\dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 18.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k+4k-n+2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 18.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tel que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Changements d'indice

Calcul 18.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes télescopiques, produits télescopiques

Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

Calcul 18.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ ....

b) $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$ ....

c) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

Décomposition en éléments simples

Calcul 18.7

Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommation par paquets

Calcul 18.8

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 18.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

Réponses mélangées

$3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\quad \dfrac{n^2(n+1)}{2}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{n(5n+1)}{2}$ $\quad \dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)$ $\quad \dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}$

$1-4n^2$ $\quad \dfrac{n+1}{2n}$ $\quad \dfrac{1}{n}$ $\quad \dfrac{n(n^2-1)}{2}$ $\quad 1-\dfrac{1}{n+1}$ $\quad n2^{n+1}+2(1-2^n)$ $\quad 2n^2+n$

$\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ $\quad \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad 5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}$ $\quad n+1$ $\quad 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{n+1}{2n}$

2^{q-p+1} $\quad (n+1)!-1$ $\quad \dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)$ $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}$ $\quad \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\dfrac{n(n+3)}{4}$ $\quad \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad n(n+1)(n^2+n+4)$ $\quad n(n+2)$ $\quad \dfrac{(n-2)(n-7)}{6}$ $\quad \ln(n+1)$

$(n+2)^3-2^3$ $\quad \dfrac{n(3n+1)}{2}$ $\quad \dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)$ $\quad \dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$ $\quad 1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

▶ Réponses et corrigés page 134

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4\times\dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 19.2 — Pour s'échauffer – bis.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a) $6\times 7\times 8\times 9$ ....

b) $\dfrac{6\times 7\times 8\times 9}{2\times 3\times 4}$ ....

c) $2\times 4\times\cdots\times(2n)$ ....

d) $3\times 5\times\cdots\times(2n+1)$ ...

Calcul 19.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k<n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n\geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n\geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}}-\dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 19.4 — Avec des paramètres - bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{2n\times(n+1)!}+\dfrac{1}{2\times(n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\dfrac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 19.5 — Le binôme de Newton.

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 19.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 19.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Calcul 19.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ ....

b) Donner-en une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ....

Réponses mélangées

$\binom{2n}{n}$ 56 $\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$ $10\,100$ $2^n \times n!$ 3^n $(n+2)(n+1)$ $\dfrac{1}{30}$

$\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$ 140 6^n $\dfrac{9!}{5!}$ $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$ $\dfrac{n(n-1)}{2}$

15 0 $\binom{2n}{n}$ $n2^{n-1}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ 2^n 720 $n(n+1)2^{n-2}$ $\dfrac{k+1}{n-k}$

12×15^n $\dfrac{1}{(n+1)!}$ $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ 2^{n-1} $\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$ $\binom{9}{4}$ $2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

► Réponses et corrigés page 139

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 20.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Calcul 20.2 — Valeurs de fonctions hyperboliques.

Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $\mathrm{ch}(0)$ ....

b) $\mathrm{sh}(0)$ ....

c) $\mathrm{ch}(\ln(2))$ ....

d) $\mathrm{sh}(\ln(3))$ ....

e) $\mathrm{ch}(\ln(2/3))$ ....

f) $\mathrm{th}(\ln(2))$ ....

Calcul 20.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.

Soient x et y des réels.
Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\mathrm{sh}(x)$ ....

b) $\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 20.4 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 20.5 — **Fonctions $x \longmapsto a^x$: plus difficile..**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 20.6 — **Équations avec les fonctions circulaires réciproques.**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1,1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ....

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ....

Calcul 20.7 — **Équations avec des fonctions hyperboliques.**

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5}$ ....

b) $\mathrm{sh}(x) = 1$ ....

c) $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3}$ ....

d) $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4$ ....

e) $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3$ ....

f) $\mathrm{th}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

Dérivation

Calcul 20.8 — **Quelques calculs de dérivées.**

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x + 1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ....

Calcul 20.9 — Quelques calculs de dérivées – bis.

Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $x \longmapsto \arcsin(x^2)$ ..... $\boxed{}$

b) $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$ ..... $\boxed{}$

c) $x \longmapsto \arctan(\mathrm{th}(x))$ .. $\boxed{}$

d) $x \longmapsto \mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))$ ...... $\boxed{}$

Calcul 20.10 — Deux dérivées importantes.

a) $x \longmapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ .... $\boxed{}$

b) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ .... $\boxed{}$

Calcul 20.11 — Dérivées plus compliquées.

Dériver les fonctions suivantes. La fonction F est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) $x \mapsto F(x^x)$ .... $\boxed{}$

b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))})$ .... $\boxed{}$

c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)$ .... $\boxed{}$

d) $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$x \mapsto \dfrac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x+1)^2}$	$\dfrac{3}{5}$	$\mathrm{ch}(x+y)$	$\mathrm{sh}(x+y)$	$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{\pi}{4}$		
$\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$	$\dfrac{5}{4}$	$\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$	$\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$			
$\ln(1+\sqrt{2})$	$\dfrac{4}{3}$	$x \mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}$.	$\dfrac{\pi}{4}$	$[-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]$			
$x \mapsto \arctan(x)$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$	$\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$	1	$\left[\ln(3+\sqrt{10}), \right[$	
$\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$	$\dfrac{\pi}{6}$	0	1	$x \mapsto 0$	$\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{th}^2(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}$	$x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$	$x \mapsto (\ln(x)+1)x^x \mathrm{e}^{-x^{2x}}$	$\dfrac{1}{2}\ln(2)$	$\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$			
$1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	1	$x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$	$x \mapsto \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(x))$			
$\dfrac{13}{12}$	$\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$	0	1	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}$	2	$\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$	

► Réponses et corrigés page 143

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 21.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 21.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme ....

b) u_3 ....

Calcul 21.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 ....

b) son sixième terme ....

Calcul 21.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Calcul 21.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n} ....

b) t_{4n} ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 21.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\,000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 21.7 — **Suite arithmétique.**

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \frac{2}{3}$ et $b_{103} = \frac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 21.8 — **Suite géométrique.**

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 21.9 — **Suite géométrique.**

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 21.10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n ....

b) u_5 ....

Calcul 21.11

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n ....

b) v_2 ....

Calcul 21.12 — **Suite de Fermat.**

Soit la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3 ....

b) F_4 ....

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ ....

d) $F_n \times (F_n - 2)$ ....

e) F_n^2 ....

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$ ....

Réponses mélangées

$65\,537$ $\quad 2^{\frac{1}{64}}$ $\quad \frac{6141}{1024}$ $\quad \frac{1}{24}$ $\quad \frac{3}{1\,024}$ $\quad 29$ $\quad F_{n+2}$ $\quad 21$ $\quad F_{n+1} + 2^{2^n+1}$

2 $\quad F_{n+1} - 2$ $\quad 10\,000$ $\quad 2n\ln(n)$ $\quad \frac{17}{24}$ $\quad \frac{3069}{512}$ $\quad 2$ $\quad \frac{11\sqrt{5}}{25}$ $\quad 3^n + (-2)^n$

257 $\quad \frac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$ $\quad 211$ $\quad F_n$ $\quad 10\,201$ $\quad \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}$ $\quad \frac{12}{5}$

$\frac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$ $\quad 8$ $\quad \frac{\pi\sqrt{5}}{5}$ $\quad \frac{3}{512}$ $\quad 2^{\frac{1}{8}}$ $\quad 13$ $\quad 4n\ln(2n)$ $\quad 2\,001$ $\quad 2\sqrt{2}$

▶ Réponses et corrigés page 147

Développements limités

Prérequis
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young !

Avertissement : Les développements limités peuvent se donner au « sens faible » (avec les petits $o(\cdot)$) ou « au sens fort » (avec les grands $O(\cdot)$). Volontairement, aucune de ces deux formes n'est imposée. Mais, pour des raisons de concision, une seule d'entre elles est donnée dans les éléments de correction de chaque question.

Développements limités

Calcul 22.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4 : $f(x) = \sin(x) + 2\ln(1+x)$ ....

b) À l'ordre 4 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ....

c) À l'ordre 6 : $\sin(x)(\cosh(x) - 1)$ ....

d) À l'ordre 6 : $e^x \sin(x)$ ....

Calcul 22.2 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4, en 0 : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ....

b) À l'ordre 6, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ....

c) À l'ordre 3, en 0 : $e^{e^{ix}}$ ....

d) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ....

Calcul 22.3 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en $\dfrac{\pi}{3}$: $\sin(\pi\cos(x))$ ....

b) À l'ordre 3, en $\dfrac{\pi}{4}$: $\tan(x)$ ....

c) À l'ordre 7, en $\dfrac{\pi}{2}$: $\cos(\pi\sin(x))$ ....

Développements asymptotiques

Calcul 22.4

Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À la précision x^2, en 0 : $\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) À la précision $\dfrac{1}{x^5}$, en $+\infty$: $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ ....

c) À la précision $\dfrac{1}{x^3}$, en $+\infty$: $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ ....

d) À la précision $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$, $+\infty$: $\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$ ....

Réponses mélangées

$$\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6) \qquad 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)$$

$$-\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2) \qquad -1 + \frac{\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\pi^2}{48}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7\right)$$

$$3x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4) \qquad -\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} - \frac{5}{6x^5} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x^6}\right) \qquad x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$$

$$1 - \frac{3\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right) \qquad x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$$

$$\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \frac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \frac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$$

$$1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right) \qquad \mathrm{e}\left(1 + \mathrm{i}x - x^2 - \frac{5}{6}\mathrm{i}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{3x} - \frac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right) + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right) \qquad 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)$$

▶ Réponses et corrigés page 150

Fiche de calcul n° 23

Arithmétique

Prérequis
Division euclidienne. Algorithme d'Euclide. Théorèmes de Gauss, de Bezout et de Fermat. Décomposition en facteurs premiers.

Division euclidienne

Calcul 23.1 — **Variations sur le signe.**

Effectuer la division euclidienne de a par b, on donnera le résultat sous la forme « (quotient, reste) ».

a) $a = 61$ et $b = 9$ ....

b) $a = -61$ et $b = 9$ ....

c) $a = 61$ et $b = -9$ ....

d) $a = -61$ et $b = -9$ ....

Calcul 23.2 — **Diviseur et reste inconnus.**

On divise 524 par un entier non nul inconnu, d. Le quotient vaut 26 et le reste r.

a) d vaut ....

b) r vaut ....

Calcul 23.3 — **Arithmétique modulaire.**

On rappelle que deux entiers a et b sont congrus modulos n, ce qu'on note $a \equiv b \pmod{n}$, si et seulement s'ils ont même reste de division euclidienne par n.

a) Le reste de 5^{2021} par 3 vaut ....

b) Le reste de 3^{2022} par 5 vaut ....

Calcul 23.4 — **Encore des modulos.**

La notation a^{b^c} désigne le nombre a à la puissance « b puissance c ». À ne pas confondre avec $(a^b)^c = a^{b\times c}$

Le chiffre des unités de $2\,023^{2022^{2021}}$ est ....

PGCD et PPCM

Calcul 23.5 — **Réduction de fractions.**

On notera $a \wedge b$ le plus grand diviseur commun de a et b et $a \vee b$ leur plus petit multiple commun.

a) $10\,010 \wedge 2\,772$ vaut ....

b) la forme irréductible de $\dfrac{10\,010}{2\,772}$ est

c) $729 \vee 360$ vaut ....

d) $\dfrac{1}{360} - \dfrac{2}{729}$. ....

Calcul 23.6 — **Systèmes diophantiens.**

Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :

a) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 9792 \\ a \wedge b = 24 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a \times b = 360 \\ a \vee b = 60 \\ 6 < a < b \end{cases}$ ....

Coprimalité, relation de Bezout et théorème de Gauss

Calcul 23.7 — **Inverse modulo 13.**

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation de congruence $5x+4 \equiv 7 \pmod{13}$. Pour ce faire, on cherche un inverse pour 5 modulo 13, c'est-à-dire un reste noté $\mathrm{inv}_{13}(5)$ tel que $5 \times \mathrm{inv}_{13}(5) \equiv 1 \pmod{13}$.

a) Donner une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation diophantienne $5u + 13v = 1$. ....

b) Déterminer l'inverse de 5 modulo 13. ....

c) Résoudre l'équation $5x + 4 \equiv 7 \pmod{13}$ dans $\mathbb{Z}$. ....

Calcul 23.8 — **Équation diophantienne.**

Soit N le nombre de couples d'entiers (x, y) solution de l'équation $(E) : 19x - 6y = 1$ et vérifiant $1999 \leqslant x \leqslant 2023$ et (x_0, y_0) celle de ces solutions qui maximise y.

N vaut ....

(x_0, y_0) vaut ....

Décomposition en facteurs premiers et théorème de Fermat

Calcul 23.9 — **Décomposer pour décomposer.**

Donner la décomposition en facteurs premiers des entiers suivants. Il s'agit ici d'appliquer au maximum les critères élémentaires de divisibilité (par 2, 3, 4, 5 et 9).

a) 2 022 ....

b) 2 023 ....

c) 2 021 ....

d) 2 027 ....

Calcul 23.10 — **Diviseur et quotient inconnus.**

On divise 477 par un entier non nul inconnu, n. Le quotient est q et le reste vaut 8.

a) n vaut ....

b) q vaut ....

Calcul 23.11 — **Arithmétique modulaire.**

Déterminer, dans chaque cas, le reste de chaque puissance modulo l'entier proposé.

a) $3^{24} = 3^{4\times 6} \pmod{35}$ ....

b) $3^{72} \pmod{35}$ ....

c) $6^{75} \pmod{35}$ ....

d) $5^{61} \pmod{77}$ ....

e) $77^{122} \pmod{143}$ ....

f) $385^{3456} \pmod{4\,195}$ ....

Réponses mélangées

$(7,2)$ $\quad \dfrac{65}{18}$ $\quad 4$ $\quad 7$ $\quad 7 \times 17^2$ $\quad 20$ $\quad (2023, 6406)$ $\quad (-7,2)$

4 $\quad 1$ $\quad 2$ $\quad 5$ $\quad 66$ $\quad (-5,2)$ $\quad 11 \pmod{13}$ $\quad$ il est premier

5 $\quad 6$ $\quad 2$ $\quad (12,30)$ $\quad 8 \pmod{13}$ $\quad (6,7)$ $\quad 1$ $\quad 29\,160$ $\quad 67$

154 $\quad 43 \times 47$ $\quad \dfrac{1}{29\,160}$ $\quad (-6,7)$ $\quad 2 \times 3 \times 337$ $\quad (9,8)$ $\quad 1$

▶ Réponses et corrigés page 153

Polynômes

Prérequis
Opérations sur les polynômes. Division Euclidienne. Évaluation. Racines.

Autour de la division euclidienne

Calcul 24.1 — Pour s'échauffer.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^3 + X^2 - X + 1, \quad B = X - 1$ ....

b) $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, \quad B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1, \quad B = X^3 + X^2 + 2$ ....

d) $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, \quad B = 2X^3 - X^2 - X + 1$ ....

Calcul 24.2 — Avec des degrés arbitraires.

La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^n$, $B = X - 1$ ....

b) $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$, $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$, $B = (X-2)^2$ ....

d) $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n$, $B = X^3 - 2X + 1$ ....

Calcul 24.3 — Avec des opérations.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de P par X^4 :

a) $P = A + B$ où $A = X^5 + X - 2$ et $B = X^4 + X - 1$ ....

b) $P = A \times B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $P = A \circ B$ où $A = X^2 - 3X + 1$ et $B = (X-2)^2$ ....

d) $P = A \circ B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^3 + X^2 - 2X + 1$ ....

Calcul 24.4 — **Pour évaluer en un point.**

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. ....

b) Calculer $P(\mathrm{i})$. ....

Calcul 24.5 — **Pour évaluer en un point – bis.**

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 2$. ....

b) Calculer $P(\sqrt{2})$. ....

Calcul 24.6 — **Pour évaluer en un point – ter.**

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

En vous inspirant des deux exercices précédents, calculer :

a) $P(\sqrt{2} - 1)$. ....

b) $P(\mathrm{i} + 1)$. ....

Réponses mélangées

$R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1$ $\quad$ $Q = X^2 - 4X + 7$, $R = -3X - 8$ $\quad$ $R = 0$ $\quad$ $R = -108X - 110$

$R = -2nX + 2n - 1$ $\quad$ $Q = X^2 - 1$, $R = -X^2 + X + 1$ $\quad$ $R = -36X + 64$ $\quad$ $R = 2X - 3$ $\quad$ $48 - 206\mathrm{i}$

$64 - 36\mathrm{i}$ $\quad$ $116 - 92\sqrt{2}$ $\quad$ $R = -2X^3 - 3X^2 + 1$ $\quad$ $Q = 13X + \dfrac{25}{2}$, $R = \dfrac{1}{2}(29X^2 - 5X - 23)$ $\quad$ $-110 - 108\sqrt{2}$

$R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5$ $\quad$ $R = X^2 + X - 1$ $\quad$ $R = 1$ $\quad$ $Q = X^2 + 2X + 1$, $R = 2$

▶ Réponses et corrigés page 156

Décomposition en éléments simples

Prérequis
Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 25.1 — Uniquement des pôles simples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$ ....

b) $\dfrac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$ ....

Calcul 25.2

Même exercice.

a) $\dfrac{X+1}{(X+2)(X+\mathrm{e})}$ ....

b) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2+2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$ ....

Calcul 25.3 — Avec des pôles multiples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$ ..

b) $\dfrac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$ ....

c) $\dfrac{1-X}{X(X+\pi)^2}$ ....

d) $\dfrac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$ ......

Calcul 25.4 — À vous de factoriser !.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X-3}{X^4-1}$ ....

b) $\dfrac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$ ....

Calcul 25.5 — Calculs de sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Calculer les sommes suivantes, après avoir fait une décomposition en éléments simples de leur terme général.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$.

Calcul 25.6 — Calculs de sommes.

Effectuer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$ ....

b) $\dfrac{3}{(X-1)(X+1)(X^2+X+1)}$ ....

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 25.7 — Pôles simples ou multiples.

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 25.8 — Primitives.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ .... $\boxed{}$

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ .... $\boxed{}$

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2}$ .... $\boxed{}$

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ .... $\boxed{}$

e) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+2x+3}$ .... $\boxed{}$

f) $x \longmapsto \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x+1)}$ .... $\boxed{}$

g) $x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+2)(x+1)}$ .... $\boxed{}$

h) $x \longmapsto \dfrac{x-2}{(x+1)^2(x-1)^2}$ .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$-\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{2}{3}\ln(2)$ $\quad$ $\frac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)$ $\quad$ $1-2\ln(3)$ $\quad$ $1+\frac{\pi}{2(X-\pi)}-\frac{\pi}{2(X+\pi)}$

2 $\quad$ $\frac{2}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{1-2X}{X^2+1}$ $\quad$ $\frac{1}{\pi^2 X}-\frac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\frac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{8}$

$\frac{1}{2X}+\frac{5}{6(X+2)}+\frac{2}{3(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}.$ $\quad$ $\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad$ $-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2(X-1)}-\frac{1+3i}{4(X-i)}-\frac{1-3i}{4(X+i)}$

$X-3-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}+\frac{7}{X+2}$ $\quad$ $x\mapsto\frac{1}{4(1-2x)^2}$ $\quad$ $\frac{1}{18}-\frac{1}{9}\ln(5)+\frac{2}{9}\ln(2)$

$\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}$ $\quad$ $1-\frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}-\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}$

$\frac{3}{2(X-1)}-\frac{1+i}{4(X-i)}-\frac{1-i}{4(X+i)}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\frac{-3}{X-2}+\frac{1}{X-3}+\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(3)$ $\quad$ $x\mapsto\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

$\frac{1}{2(X-1)}-\frac{3}{2(X+1)}+\frac{X-1}{X^2+X+1}$ $\quad$ $\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4}$ $\quad$ $1-\frac{2}{X}+\frac{1}{2(X+1)}+\frac{3}{2(X-1)}$

$\frac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\frac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}$ $\quad$ $x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|$ $\quad$ $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{16}{3}\ln|x-2|$

▶ Réponses et corrigés page 158

Fiche de calcul n° 26

Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 ...

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 26.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \qquad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice (i,j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

a) $A \times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top \times B$ ....

d) $A \times C$ ....

Calcul 26.4 — **Deux calculs plus difficiles !.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a) $\left[A^2\right]_{i,j}$ ....

b) $\left[C^2\right]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 26.5 — **Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.**

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...

b) B ...

c) C ...

d) D ...

e) E ...

f) F ...

g) G ...

h) H ..

i) J ...

Calcul 26.6 — **Matrices dépendant d'un paramètre.**

On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

Réponses mélangées

$$\frac{1}{2(\pi-e)}\begin{pmatrix}2 & -e\\ -2 & \pi\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}8 & 19\\ 0 & 27\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2^k & 3^k-2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}5 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad n^{k-1}D \qquad \begin{pmatrix}-5 & 15 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\cos(k\theta) & -\sin(k\theta)\\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 7 & 49 & -14\\ -2 & -14 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{Non inversible !} \qquad 2^{i-j}\binom{i-1}{j-1} \qquad \begin{pmatrix}\cos(2\theta) & -\sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 1 \qquad \frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix}-1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda\\ 1 & 0 & -1\\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix} \qquad 17 \text{ (matrice } 1\times 1)$$

$$\frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 3\\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1\\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 2 & 14 & -4\\ -1 & -7 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}&(1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1}+\delta_{i,j})\\ &+(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j-1})\end{aligned}$$

$$2\times 3^{j-i}\times 5^{i-1} \qquad \binom{i-1}{j}+\binom{i-1}{j-2} \qquad \begin{pmatrix}n^2 & \cdots & n^2\\ \vdots & (n^2) & \vdots\\ n^2 & \cdots & n^2\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$2^{i+1}3^{j-i}(2^n-1) \qquad \lambda\neq 1 \qquad \begin{pmatrix}\cos(3\theta) & -\sin(3\theta)\\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix} \qquad 2\times 3^{i+j}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 3 & 3 & 4\\ 9 & -7 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}n & \cdots & n\\ \vdots & (n) & \vdots\\ n & \cdots & n\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2 & 2 & 0\\ 8 & -6 & 4 & 2\\ -7 & 5 & -3 & -1\\ -5 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1-2\mathrm{i}\\ 1 & -1+\mathrm{i}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ -6 & -2 & 2\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -2\\ -16 & -6 & 7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-2 & -6 & -5\\ 15 & -1 & 11\\ 18 & -26 & -1\end{pmatrix}$$

► Réponses et corrigés page 162

Algèbre linéaire

Prérequis
Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.

Vecteurs

Calcul 27.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(-1,2)\big)$. ....

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2),(0,1)\big)$. ....

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(12,13)\big)$. ....

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$. ....

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,3)\big)$. ....

f) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ ....

g) $u : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ ....

Calculs de rangs

Calcul 27.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ....

Calcul 27.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et Applications linéaires

Calcul 27.4 — Matrices d'endomorphismes.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x,y) \mapsto (x+y, 3x-5y)$, $\mathcal{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$. ....

b) $f : (x,y) \mapsto (x+y, 3x-5y)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(1,0)\big)$. ....

c) $f : (x,y) \mapsto (2x+y, x-y)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(3,4)\big)$ ....

d) $f : (x,y,z) \mapsto (x+y, 3x-z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\big)$ ....

e) $f : P \mapsto P(X+2)$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ ....

Calcul 27.5 — Matrices d'applications linéaires.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x,y,z) \mapsto (x+y+z, x-y)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0,1),(1,0)\big)$.

b) $f : P \mapsto P'$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$. ....

Réponses mélangées

2 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad (9/11, 2/11)$ $\quad 4$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (1/2, -\sqrt{3}/2)$

1 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad 3$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$ $\quad 2$ $\quad 1$

$(0,2,4,1)$ $\quad (-1,3)$ $\quad (-1,1/2,1/2)$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2 $\quad 2$ $\quad 2$ $\quad (-2, 4/5, 11/5)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (3,-1)$

► Réponses et corrigés page 167

Équations différentielles

Prérequis
Équations différentielles.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 28.1

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y$ et $y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1$ et $y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5$ et $y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12$ et $y(0) = 3$ ....

Calcul 28.2

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y$ et $y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2$ et $y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6$ et $y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e}$ et $y(\pi) = 12$ ....

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 28.3 — Une équation avec conditions initiales.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ....

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3\mathrm{i}$ ....

Calcul 28.4 — Racines doubles, Racines simples.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ ....

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$ ....

Calcul 28.5 — Racines complexes.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ ....

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ....

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ et $y(0) = \mathrm{i}$ et $y'(0) = -\mathrm{i}$ ....

Réponses mélangées

$x \mapsto \frac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$ $\quad x \mapsto \frac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$ $\quad x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$

$x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$

$x \mapsto (2-3\mathrm{i})\mathrm{e}^{x} + (3\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{2x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ $\quad x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$

$x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{2-2x}$ $\quad x \mapsto \cos x + 2\sin x$ $\quad x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}$

$x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$ $\quad x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \left(12 + \frac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \frac{2\mathrm{e}}{\pi}$

► Réponses et corrigés page 170

Séries numériques

Prérequis
Séries usuelles (convergence et sommes), décomposition en éléments simples.

Séries géométriques, exponentielles, de Riemann

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 29.1 — Séries géométriques.

a) $\sum_{k\geqslant 0} 2^k$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ ....

d) $\sum_{k\geqslant 10} \frac{1}{3^k}$ ....

Calcul 29.2 — Séries exponentielles.

a) $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k \times k!}$ ....

Calcul 29.3 — Séries de Riemann.

a) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 6} \frac{1}{k}$ ....

d) $\sum_{k\geqslant 3} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}}$ ....

e) $\sum_{k\geqslant 4} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k}$ ....

Séries télescopiques

Calcul 29.4

Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2+k}$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$ ....

d) $\sum_{k\geqslant 0} \arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right)$ ...

Séries géométriques dérivées

Prérequis

On pourra utiliser le fait que si $\alpha \in]-1,1[$, les séries

$$\sum_{k\geqslant 1} k\alpha^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\alpha^{k-2},$$

appelées *séries géométriques dérivées*, convergent et ont pour somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = \frac{1}{(1-\alpha)^3}.$$

Calcul 29.5 — **Séries géométriques dérivées.**

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{2^{2k}}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{-(k-1)}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\frac{1}{2^{k-1}}$ ....

Calcul 29.6 — **Séries géométriques dérivées – bis.**

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (3k+1)\frac{1}{3^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-(k-2)}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{-2-5\sqrt{2}i}{54}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ $\quad \dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{1}{12}$ $\quad 16$ $\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ divergente $\quad 2$

$\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ divergente $\quad 4$ $\quad \ln(2)$ $\quad 1$ $\quad \mathrm{e}^2-3$ $\quad 2$ $\quad \mathrm{e}$ $\quad \dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}$

divergente $\quad \dfrac{\pi^2}{6}$ $\quad \dfrac{7-49i}{35\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{1}{4}$ $\quad \dfrac{1}{2\times 3^9}$ $\quad \dfrac{11}{4}$ $\quad$ divergente

▶ Réponses et corrigés page 173

Structures euclidiennes

Prérequis
Produit scalaire, famille orthogonale, base orthonormée.

Calcul de produits scalaires

Calcul 30.1 — Des calculs de produits scalaires de fonctions.

Calculer les produits scalaires entre les vecteurs suivants dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les éléments de E suivants :

$$f_1 : t \longmapsto \ln(1+t), \qquad f_2 : t \longmapsto t^2, \qquad f_3 : t \longmapsto \cos t,$$
$$f_4 : t \longmapsto e^t, \qquad f_5 : t \longmapsto 1+t, \qquad f_6 : t \longmapsto 2.$$

a) $\langle f_1, f_6\rangle$ ....

b) $\langle f_2, f_5\rangle$ ....

c) $\langle f_3, f_5\rangle$ ....

d) $\langle f_4, f_4\rangle$ ....

Calcul 30.2 — Des calculs de produits scalaires de matrices.

Calculer les produits scalaires suivants dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

On notera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\langle A, B\rangle$ ....

b) $\langle B, B\rangle$ ....

c) $\langle B, C\rangle$ ....

Distances euclidiennes

Calcul 30.3 — Des calculs de distances.

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer la distance de X^2 à $\mathrm{Vect}(1,X)$ ....

b) Calculer la distance de X à $\mathrm{Vect}(1,X^3)$ ....

c) Calculer la distance de $1+X^2$ à $\mathrm{Vect}(X,X^2)$ ....

Orthonormalisation

Calcul 30.4 — Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}x$.

En appliquant le processus de Gram-Schmidt :

a) calculer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1, X)$ ....

b) calculer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(X, X^2+1)$ ....

Matrices de projections orthogonales et de symétries orthogonales

Calcul 30.5 — Calculs de matrices.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, qu'on munit d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

On note x, y et z les coordonnées dans cette base.

Pour chacune des applications linéaires suivantes, écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

a) La projection orthogonale sur le plan P d'équation $x+y+z=0$ ....

b) La projection orthogonale sur la droite D dirigée par $i+2k$ ....

c) La symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x+3y-z=0$ ....

Réponses mélangées

$2\sin(1)+\cos(1)-1$ $\quad \dfrac{1}{3} \quad (\sqrt{3}X, \sqrt{\dfrac{240}{43}}(X^2-\dfrac{9}{4}X+1)) \quad (1, 2\sqrt{3}(X-\dfrac{1}{2}))$

$4\ln 2 - 2 \quad \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \dfrac{1}{2}(e^2-1)$

$\dfrac{1}{5\sqrt{3}} \quad \dfrac{7}{12} \quad 11 \quad \dfrac{1}{6\sqrt{5}} \quad 0 \quad \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -7 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad 10$

► Réponses et corrigés page 176

Fiche de calcul n° 31 030A

Groupes symétriques

Prérequis
Permutations, cycles, transpositions, décomposition en produit de cycles à supports disjoints, signature.

Opérations sur les permutations

Calcul 31.1 — Échauffement.

On considère les permutations suivantes de $\mathfrak{S}_6$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les permutations suivantes.

a) ρ^{-1} ....

b) σ^{-1} ....

c) σ^2 ....

d) $\rho\sigma$ ....

e) $\sigma\rho$ ....

f) $\sigma\rho\sigma^{-1}$ ....

Calcul 31.2 — Opérations sur les cycles.

Calculer les puissances suivantes, où a, b et c désignent trois entiers naturels non nuls distincts.

a) $(a\ b)^{-1}$ ....

b) $(a\ b\ c)^{-1}$ ....

c) $(1\ 3\ 5\ 2\ 7)^{-1}$ ....

d) $(a\ b\ c)^2$ ....

e) $(2\ 4\ 5\ 1)^3$. ....

f) $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42}$. ....

Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Calcul 31.3 — Décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ ....

c) $(1\ 3\ 5\ 2)(2\ 4\ 1\ 7)(5\ 8)$ ....

d) $(1\ 3)(3\ 2\ 1\ 4)(3\ 1\ 4)(2\ 1\ 4)$ ....

e) $(2\ 6)(4\ 2\ 1\ 5)(3\ 2)(3\ 1\ 5)$ ....

Calcul 31.4 — Application aux calculs de puissance.

Expliciter les puissances suivantes sous la forme d'un produit de cycles à supports disjoints.

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&3&1&6&5\end{pmatrix}^{47}$ ....

b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&4&3&1&5&2\end{pmatrix}^{168}$ ....

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&5&2&4&1&3&7\end{pmatrix}^{168}$ ....

d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&3&5&7&2&1&6\end{pmatrix}^{227}$ ....

Calculs de signature

Calcul 31.5 — Calculs de signature – niveau 1.

Déterminer la signature des permutations suivantes.

a) $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ ....

b) $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ ....

c) $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)^{-1}$ ....

d) $(1\ 3\ 2\ 4)^{37}$ ....

e) $(1\ 3)(2\ 6\ 7)^{-1}(4\ 7\ 3\ 1\ 2)$ ....

f) $((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2))^{64}$ ....

Calcul 31.6 — Calculs de signature – niveau 2.

Déterminer la signature des permutations suivantes.

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\7&6&9&1&3&8&4&10&5&2\end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&2&10&1&7&4&5&9&8&6\end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&4&7&1&8&9&10&2&6&5\end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\7&1&6&10&5&9&2&3&8&4\end{pmatrix}$ ....

Réponses mélangées

1 $\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&2&3\end{pmatrix}$ $\quad (a\ c\ b)$ $\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}$ $\quad (7\ 2\ 5\ 3\ 1)$ $\quad \mathrm{id}$

$(1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9)$ $\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&2&5&1\end{pmatrix}$ $\quad (1\ 4\ 2)(5\ 6)$ $\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}$

$(1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)$ $\quad (a\ b)$ $\quad (1\ 2\ 7\ 5\ 3)$ $\quad (1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)$ $\quad (2\ 1\ 5\ 4)$ $\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}$

$(1\ 2\ 6\ 5\ 3)$ $\quad 1$ $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad -1$ $\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&1&3&4\end{pmatrix}$ $\quad 1$

$(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)$ $\quad -1$ $\quad (1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8)$ $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad (1\ 2)(3\ 4)$ $\quad (c\ b\ a)$ $\quad 1$

► Réponses et corrigés page 178

Fiche de calcul n° 32 031A

Déterminants

Prérequis
Nombres complexes.

Calculs en dimension deux

Calcul 32.1

Soit a un nombre réel.

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 3 \\ -2\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 32.2

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(8) \\ -2 & \ln(e^3) \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/7 \\ 5/9 & 7/8 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 85 & 72 \\ 53 & 91 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1-\sqrt{32} \\ 2+\sqrt{8} & 3-\sqrt{8} \end{pmatrix}$ ....

Calculs en dimension trois

Calcul 32.3

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

On rappelle que le nombre complexe j vérifie $\mathrm{j}^3 = 1$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j}^2 & 1 \\ -\mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 32.4

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} j & -j & j \\ -j & j & j \\ j & j & -j \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & -2+i \\ -i & 2i-1 & 1-2i \\ -1 & i & 2 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ ....

Calcul 32.5

Soit x, y et z des nombres réels et a un nombre réel strictement positif.

Calculer le déterminant de chacune des matrices d'ordre trois suivantes.

a) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^2) & -2\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) & -2\ln(a) & \ln(a^2) \\ -\ln(a^2) & \ln(a) & 2\ln(\sqrt{a}) \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$ ....

Réponses mélangées

6	$9\ln(2)$	$-6\ln^3(a)$	$-2a^2$	$227/336$	-4	-2
20	$(y-x)(z-y)(z-x)$	$6i-12$	0	$7\sqrt{2}+13$	$3\,919$	
0	-40	0	$x^3+y^3+z^3-3xyz$	$-5+6i$	$4/375$	

▶ Réponses et corrigés page 181

Fonctions de deux variables

Prérequis
Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

Les fondamentaux

Calcul 33.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x,y) \longmapsto \arcsin|x-y|$ ....

b) $(x,y) \longmapsto \ln(x)+\sqrt{y}$ ....

c) $(x,y) \longmapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}$ ....

d) $(x,y) \longmapsto \sqrt{16-x^2-y^2}\ln\left(x^2+y^2-16\right)$ ....

Calcul 33.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f:(x,y) \longmapsto x^2+y^5+xy+\pi$ ....

b) $f:(x,y) \longmapsto \sin(2xy-y)$ ....

c) $f:(x,y) \longmapsto (x^2y, x^2-y^2)$ ....

d) $f:(x,y) \longmapsto \arctan(2x+y)$ ....

Calcul 33.3

Même exercice.

a) $f:(x,y) \longmapsto \cos(x-y)$ ....

b) $f:(x,y) \longmapsto x\cos(\mathrm{e}^{xy})$ ....

c) $f:(x,y) \longmapsto x^y$ ....

d) $f:(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ....

Composition de fonctions

Calcul 33.4 — **Règle de la chaîne.**

On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$ ....

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ ....

c) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3\sin(2t) \\ v(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$ ....

Calcul 33.5 — **Changements de variables.**

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$ ....

b) $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.........

Réponses mélangées

$]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\cos(2xy-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x-1)\cos(2xy-y)$

$\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right) + \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$ $\qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-1 \leqslant y \leqslant x+1\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2xy, 2x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2, -2y)$ $\qquad \sin(2t)$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5y^4 + x$

$\varnothing$ $\qquad \dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{2\mathrm{e}^{4t} + \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{-2t}}}$ $\qquad \dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x-y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{1+(2x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{1+(2x+y)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(\mathrm{e}^{xy}) - xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right) - \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y \geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}$ $\qquad -72\cos(4t) - 46\sin(4t)$

► Réponses et corrigés page 183

Fiche nº 10. Primitives

Réponses

10.1 a) $\boxed{\ln|t+1|}$

10.1 b) $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

10.1 c) $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

10.1 d) $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

10.2 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

10.2 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}e^{2t+1}}$

10.2 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2t)}$

10.2 d) $\boxed{\dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)}$

10.3 a) $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

10.3 b) $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

10.3 c) $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

10.3 d) $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

10.3 e) $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

10.3 f) $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

10.4 a) $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4 t}$

10.4 b) $\boxed{2\sqrt{\ln t}}$

10.4 c) $\boxed{\dfrac{2}{(3-e^{2t})^2}}$

10.4 d) $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

10.4 e) $\boxed{\ln|1-e^{-t}+e^t|}$

10.4 f) $\boxed{-e^{\frac{1}{t}}}$

10.5 a) $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.5 b) $\boxed{e^{\sin t}}$

10.5 c) $\boxed{-\ln|\cos t|}$

10.5 d) $\boxed{-\ln|1-\sin t|}$

10.5 e) $\boxed{-2\cos\sqrt{t}}$

10.5 f) $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)}$

10.5 g) $\boxed{\tan t - t}$

10.5 h) $\boxed{\dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t|}$

10.5 i) $\boxed{\dfrac{1}{4}\tan^4 t}$

10.5 j) $\boxed{2\sqrt{\tan t}}$

10.5 k) $\boxed{-\dfrac{1}{\tan t}}$

10.5 l) $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}}$

10.5 m) $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

10.5 n) $\boxed{\mathrm{Arctan}(e^t)}$

10.5 o) $\boxed{\dfrac{1}{2}(\mathrm{Arcsin}(t))^2}$

10.5 p) $\boxed{\ln|\mathrm{Arcsin}(t)|}$

10.6 a) $\boxed{\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(2t)}{4}}$

10.6 b) $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{8} - \dfrac{\cos(2t)}{4}}$

10.6 c) $\boxed{-\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.6 d) $\boxed{\ln(1+\sin^2 t)}$

10.6 e) $\boxed{\ln|\tan t|}$

10.6 f) $\boxed{-\mathrm{cotan} t + \tan t}$

10.6 g) $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|}$

10.7 a) $\boxed{t + \ln t - \dfrac{1}{t}}$

10.7 b) $\boxed{\ln t - \dfrac{1}{2t^2}}$

10.7 c) .... $\boxed{t + \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5}}$

10.7 d) .... $\boxed{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3}}$

10.7 e) .... $\boxed{t - 2\ln|t+1|}$

10.7 f) .... $\boxed{t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \ln|t+1|}$

10.7 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) - \mathrm{Arctan}(t)}$

10.7 h) .... $\boxed{\ln|t+1| + \dfrac{1}{t+1}}$

10.8 a) .... $\boxed{2(t-1) \text{ puis } \dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t}$

10.8 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right) \text{ puis } -\dfrac{1}{t} + \ln|t|}$

10.8 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}} + \dfrac{3}{t^4} \text{ puis } \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2t^2}}$

10.8 d) .... $\boxed{-\dfrac{4}{t^5} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3} - \dfrac{2}{\sqrt{t}}}$

10.8 e) .... $\boxed{2e^{2t} - 3e^{-3t} \text{ puis } \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{3}e^{-3t}}$

10.8 f) .... $\boxed{3e^{3t-2} \text{ puis } \dfrac{1}{3}e^{3t-2}}$

10.8 g) .... $\boxed{-\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2} \text{ puis } \dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)}$

10.8 h) .... $\boxed{-\dfrac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2} \text{ puis } \dfrac{3}{2}\ln(t^2+1) - \mathrm{Arctan}(t)}$

10.8 i) .... $\boxed{\cos t(3\cos^2 t - 2) \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\cos^3 t}$

10.8 j) .... $\boxed{\sinh(t)^2 + \cosh^2(t) \text{ puis } \dfrac{1}{2}\sinh^2(t)}$

10.8 k) .... $\boxed{-\dfrac{2t\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}}{t^4} \text{ puis } \cos\dfrac{1}{t}}$

10.8 l) .... $\boxed{\dfrac{2e^t}{(2+e^t)^2} \text{ puis } \ln(2+e^t)}$

10.8 m) .... $\boxed{\dfrac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|}$

10.8 n) .... $\boxed{\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \text{ puis } -\sqrt{1-t^2}}$

10.8 o) .... $\boxed{2\dfrac{3\cos^2 t - 1}{(1+\cos^2 t)^2} \text{ puis } -\ln(1+\cos^2(t))}$

10.8 p) .... $\boxed{(1-2t^2)e^{-t^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}}$

10.8 q) .... $\boxed{\dfrac{\ln t - 2}{t^2} \text{ puis } \ln t - \dfrac{1}{2}\ln^2 t}$

10.8 r) .... $\boxed{-\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t} \text{ puis } \ln|\ln t|}$

10.8 s) .... $\boxed{\dfrac{\cos\ln t - \sin\ln t}{t^2} \text{ puis } -\cos(\ln t))}$

10.8 t) .... $\boxed{-\dfrac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2}) \text{ puis } \mathrm{Arctan}(e^t)}$

Corrigés

10.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

10.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

10.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.2 a) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

10.2 b) Admet des primitves sur $\mathbb{R}$.

10.2 c) Admet des primitives sur $]-1/2,1/2[$.

10.2 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

10.5 g) $\displaystyle\int^t \tan^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((1+\tan^2\theta)-1)\,\mathrm{d}\theta = \tan t - t + \text{cte}$

10.5 h) $\displaystyle\int^t \tan^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t ((\tan^2\theta+1)\tan\theta - \tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| + \text{cte}$

10.6 a) $\displaystyle\int^x \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \text{cte}$

10.6 b) On a

$$\begin{aligned}\int^t \cos(\theta)\sin(3\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{2}(\sin(4\theta)+\sin(2\theta))\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} + \text{cte}.\end{aligned}$$

10.6 c) $\displaystyle\int^t \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int^t (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \text{cte}$

10.6 d) $\displaystyle\int^t \frac{\sin(2\theta)}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \ln(1+\sin^2 t) + \text{cte}$

10.6 e) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int^t \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + \text{cte} = \ln|\tan t| + \text{cte}$

10.6 f) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} = \int^t \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -\text{cotan}(t) + \tan(t) + \text{cte}$

10.6 g) On a

$$\begin{aligned}\int^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(4\theta)} &= \int^t \frac{\cos^2(2\theta)+\sin^2(2\theta)}{2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int^t \frac{1}{4}\left(\frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}+\frac{2\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\ln|\sin(2t)| - \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| + \text{cte} = \frac{1}{4}\ln|\tan 2t| + \text{cte}.\end{aligned}$$

10.7 c) On a $1-t^6 = 1^3-(t^2)^3 = (1-t^2)(1+t^2+t^4)$ donc finalement on cherche une primitive de $1+t^2+t^4$.

10.7 e) $\displaystyle\int^t \frac{\theta-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-2}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(1-\frac{2}{\theta+1}\right)\mathrm{d}\theta = t - 2\ln|t+1| + \text{cte}$

10.7 f) $\displaystyle\int^t \frac{\theta^3}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta^3+1-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{(\theta+1)(1-\theta+\theta^2)-1}{\theta+1}\,\mathrm{d}\theta = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|t+1| + \text{cte}$

10.7 h) $\displaystyle\int^t \frac{\theta}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \frac{\theta+1-1}{(\theta+1)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta+1}-\frac{1}{(\theta+1)^2}\right)\mathrm{d}\theta = \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \text{cte}$

Fiche n° 11. Calcul d'intégrales

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.1 b) .... $\boxed{\text{Négatif}}$

11.1 c) .... $\boxed{\text{Positif}}$

11.2 a) .... $\boxed{14}$

11.2 b) .... $\boxed{50}$

11.2 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

11.2 d) .... $\boxed{-54}$

11.2 e) .... $\boxed{0}$

11.2 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

11.3 a) .... $\boxed{8}$

11.3 b) .... $\boxed{-2}$

11.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

11.3 d) .... $\boxed{0}$

11.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

11.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

11.4 a) .... $\boxed{0}$

11.4 b) .... $\boxed{1}$

11.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

11.4 d) .... $\boxed{18}$

11.4 e) ...... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

11.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

11.5 a) .... $\boxed{78}$

11.5 b) ..... $\boxed{2(e^3 - 1)}$

11.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

11.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

11.5 e) .... $\boxed{6}$

11.5 f) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

11.6 a) .... $\boxed{0}$

11.6 b) .... $\boxed{0}$

11.6 c) ..... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

11.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{384}}$

11.6 e) ... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)}$

11.6 f) .... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

11.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e+1}}$

11.7 b) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

11.7 c) .... $\boxed{e^2}$

11.7 d) .... $\boxed{3e - 4}$

11.7 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

11.7 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

11.8 a) .... $\boxed{0}$

11.8 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

11.8 c) .... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

11.8 d) .... $\boxed{\dfrac{e - \frac{1}{e}}{2}}$

11.8 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

11.8 f) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

11.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

11.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin 7x|\,dx = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

11.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin x\,dx = -\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$ est donc négative.

11.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

11.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,dx = -\int_{-3}^{7} -5\,dx = \int_{-3}^{7} 5\,dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

11.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7; 0)$ et $B(7; 21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

11.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

11.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} \sin x \, \mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

11.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

11.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

11.3 b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x - 5 \, \mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

11.3 c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\right) = \frac{8}{3}.$

11.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.3 e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

11.3 f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

11.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.4 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

11.4 c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

11.4 d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18.$

11.4 e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

11.4 f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

11.5 a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

11.5 b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \, \mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

11.5 c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi + 2}{2}\right).$

11.5 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

11.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

11.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

11.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

11.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

11.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

11.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

11.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{3}\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

11.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\frac{1}{2}.$

11.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^{3}|x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

11.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

11.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1) - 2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

11.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

11.7 f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\frac{1}{2}\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}|\sin(2x)|\,\mathrm{d}x$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

11.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.8 b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

11.8 c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

11.8 d) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\operatorname{sh}(x)\Big]_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}.$

11.8 e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

11.8 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

Fiche n° 12. Intégration par parties

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}-1}$

12.1 b) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}(2)-\dfrac{3}{2}}$

12.1 c) .... $\boxed{4}$

12.1 d) .... $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}}$

12.1 e) .... $\boxed{1}$

12.1 f) .... $\boxed{2\ln 2-\dfrac{3}{4}}$

12.1 g) .... $\boxed{\ln(2)-2+\dfrac{\pi}{2}}$

12.1 h) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}$

12.1 i) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}$

12.1 j) .... $\boxed{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{4}{3}}$

12.1 k) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\dfrac{8}{9}\sqrt{2}+\dfrac{4}{9}}$

12.1 l) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32}}$

12.2 a) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto(-x+2)\mathrm{e}^x\end{cases}}$

12.2 b) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto-\dfrac{1+\ln x}{x}\end{cases}}$

12.2 c) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{cases}}$

12.2 d) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x)\end{cases}}$

12.3 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}-\mathrm{e}^2}$

12.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}}$

12.4 a) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x)+\sin(x)\mathrm{ch}(x))\end{cases}}$

12.4 b) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\ln^2 x-2x\ln x+2x\end{cases}}$

12.4 c) .... $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x-\dfrac{2}{9}\ln x+\dfrac{2}{27}\right)\end{cases}}$

12.4 d) .... $\boxed{\begin{cases}]-1,1[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\end{cases}}$

Corrigés

12.1 a) On choisit $u'(t)=\cos t$ et $v(t)=t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t=[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1.$

12.1 b) On choisit $u'(t)=\mathrm{sh}(2t)$ et $v(t)=2t+3$. $\displaystyle\int_0^1(2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t=\left[(2t+3)\frac{\mathrm{ch}(2t)}{2}\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{ch}(2t)\,\mathrm{d}t=$ $\dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\mathrm{sh}(2)}{2}$.

12.1 c) On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$. $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2-2\int_0^2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=4e-4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2=4.$

12.1 d) On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=2^t$. $\displaystyle\int_1^{\ln(2)}t2^t\,\mathrm{d}t=\int_1^{\ln(2)}t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=\left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)}\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=$ $\displaystyle 2^{\ln(2)}-\frac{2}{\ln(2)}-\frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)}=\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}.$

12.1 e) On choisit $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln t\,\mathrm{d}t=[t\ln t]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}1\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$

12.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^2 t \ln t \, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} t \, dt = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

12.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\, dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

12.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t \arctan t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

12.1 i) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t \, dt = [t \arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

12.1 j) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, dt = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

12.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t)\, dt = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

12.1 l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\left(1 + \tan^2 t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \, dt$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t \tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln \cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

12.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = e^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)e^t \, dt = \left[(-t+1)e^t\right]_0^x + \int_0^x e^t \, dt = (-x+1)e^x + e^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)e^x$.

12.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\, dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

12.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\, dt = [t \arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

12.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{ch} t$, $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{ch}(t)\, dt = [t\mathrm{sh}(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\, dt = x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1$. D'où une primitive.

12.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = e^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t}\, dt = \left[(t^2 + 3t - 4)\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{e^{2t}}{2}\, dt$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t + 3$ et $u'(t) = \dfrac{e^{2t}}{2}$ d'où : $\displaystyle-\int_0^1 (2t+3)\frac{e^{2t}}{2}\, dt = 2 - \left[(2t+3)\frac{e^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t}\, dt = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}e^2 + \frac{1}{4}\left[e^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - e^2$.

12.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t \,\mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t$. Finalement, $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

12.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$. On commence par choisir $u' = \sin$ et $v = \mathrm{sh}$ cela donne $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)\mathrm{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u' = \cos$ et $v = \mathrm{ch}$, ce qui donne $-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + [\sin(t)\mathrm{ch}(t)]_0^x - \displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x))$.

12.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t \,\mathrm{d}t = \left[t\ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2\ln t \,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $x\ln^2 x - 2[t\ln t]_1^x + 2\displaystyle\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

12.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2\ln^2 t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2 \ln t \,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\dfrac{x^3}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\left[t^3\ln t\right]_1^x + \dfrac{2}{9}\displaystyle\int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}(x^3 - 1)$. D'où une primitive.

12.4 d) La fonction est définie et continue sur $]-1,1[$. Si $x \in]-1,1[$, alors, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t$, ensuite, en posant $u'(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\arccos(x)} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t$. D'où $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

Fiche nº 13. Changements de variable

Réponses

13.1 a) $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

13.1 b) $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

13.1 c) $\boxed{2\arctan(e) - \dfrac{\pi}{2}}$

13.1 d) $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

13.1 e) $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

13.1 f) $\boxed{2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

13.2 a) $\boxed{\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

13.2 b) $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2e+1}{3}\right)}$

13.2 c) $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

13.2 d) $\boxed{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}}$

13.2 e) $\boxed{\dfrac{\pi}{12}}$

13.2 f) $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}}$

13.3 a) $\boxed{2e^2}$

13.3 b) $\boxed{-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}}$

13.4 a) $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x + \ln\tan(x) \end{array}\right.}$

13.4 b) $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} - \dfrac{e^{-2x}}{4} \end{array}\right.}$

13.4 c) $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) \end{array}\right.}$

13.4 d) $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{array}\right.}$

13.4 e) $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2 - 1} \end{array}\right.}$

Corrigés

13.1 a) On pose $t = \sin\theta$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{dt}{d\theta} = \cos\theta$ et donc

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

13.1 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,3]$, donc $t = u^2$ et $u \in \left[1, \sqrt{3}\right]$. On a $\dfrac{dt}{du} = 2u$ et donc $dt = 2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u+u^3}\,du = 2\Big[\arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

13.1 c) On pose $u = e^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,e]$. On a $\dfrac{dt}{du} = \dfrac{1}{u}$ et donc $dt = \dfrac{du}{u}$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt = \int_0^1 \frac{2}{e^t + e^{-t}}\,dt = \int_1^e \frac{2}{u+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} = 2\int_1^e \frac{1}{1+u^2}\,du = 2\Big[\arctan u\Big]_1^e = 2\arctan(e) - \frac{\pi}{2}.$$

13.1 d) On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{du}{dt} = \cos t$ et donc $du = \cos t\,dt$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,dt$.

Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,dt = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

13.1 e) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\int_0^1 u^3(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

13.1 f) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1,2]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1+u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3) - \ln(2))$.

13.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0,\pi]$. On a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t$. Ainsi, $\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et finalement,

$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

13.2 b) On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,\mathrm{e}]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$.

13.2 c) On pose $u = \frac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2,4]$, donc $t = 2u+2$ et $u \in [0,1]$. On a donc $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$.

Ainsi, $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}}\,\mathrm{d}u = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

13.2 d) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = (1+\tan^2 u)$.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

13.2 e) On pose $u = \frac{1}{t}$ avec $t \in [\sqrt{2}, 2]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1u^2}}}\,\mathrm{d}u = -\Big[\arcsin u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

13.2 f) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1,2]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t + t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

13.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1,2]$.

On a alors $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_1^2 - \int_1^2 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^2$.

13.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3}, 2]$.

On a alors $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u-1)}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[(u-1)\ln(u-1)\Big]_{\sqrt{3}}^2 - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}u = -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}.$$

13.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a,x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\, dt$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t}\, dt$ en posant $u = \tan t$.

On a $\dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u + \ln u\Big]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln\tan(x) + C.$

13.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{th}(t)}\,dt$ dans laquelle on pose $u = \mathrm{e}^t$ c'est-à-dire $t = \ln u$. On a donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ et ainsi

$$\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{th}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{1+\frac{u-\frac{1}{u}}{u+\frac{1}{u}}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{4}\frac{1}{u^2}\right]_1^{\mathrm{e}^x} = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} + C.$$

13.4 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1+u^2)$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}) + C.$

13.4 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t+\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3+u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\ln(u^2+1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1) + C.$$

13.4 e) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2-1}$ donne $t = \sqrt{u^2+1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x t\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan\sqrt{x^2-1} + C.$$

Fiche n° 14. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

14.1 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

14.2 a) .... $\boxed{2\ln\frac{9}{10}}$

14.2 b) .... $\boxed{\ln(a+1)}$

14.3 a) .... $\boxed{\frac{3}{2}+\ln(2)-\ln(3)}$

14.3 b) .... $\boxed{-\frac{1}{48}+\frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}}$

14.4 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}$

14.4 b) .... $\boxed{\ln\frac{33}{28}}$

14.5 a) .... $\boxed{\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$

14.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)}$

14.6 a) .... $\boxed{1 \text{ et } 2}$

14.6 b) ...... $\boxed{A=-1 \text{ et } B=1}$

14.6 c) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.7 a) .... $\boxed{\ln\frac{1}{3}}$

14.7 b) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.7 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}$

14.7 d) .... $\boxed{\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}}$

14.8 .... $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)}$

14.9 a) .... $\boxed{\frac{a}{a^2+x^2}}$

14.9 b) .... $\boxed{\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$

14.10 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

14.10 b) .... $\boxed{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$

14.11 .... $\boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

14.12 a) .... $\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

14.12 b) ...... $\boxed{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}}$

14.12 c) .. $\boxed{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\frac{15}{16}}$

14.12 d) ..... $\boxed{a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^3}{4}}$

14.13 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

14.13 b) .... $\boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.13 c) .... $\boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.13 d) .... $\boxed{\ln(2)}$

14.14 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{12}}$

14.14 b) .... $\boxed{\ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)}$

14.15 .... $\boxed{\frac{1}{3}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$

Corrigés

14.1 a) La fonction $t \longmapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1,2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$. D'où le calcul :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(3)-\ln(2).$$

Enfin, on remarque que $\ln(3)-\ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

....

14.1 b) On procède comme précédemment mais on remarque qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(2t+1)$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

....

14.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{t+\frac{1}{2}},$$

en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln\big(t+\tfrac{1}{2}\big)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \\ &= 2\Big(\ln\frac{9}{16} - \ln\frac{5}{8}\Big) = 2\ln\frac{9\times 8}{5\times 16} = 2\ln\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Le résultat est < 0 puisque $9/10 < 1$.
C'est cohérent car on intègre une fonction $\geqslant 0$ entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

14.2 b) On calcule :

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+a)\Big]_0^{a^2} = \ln(a+a^2) - \ln(a) = \ln\big(a(a+1)\big) - \ln(a) = \ln(a+1).$$

14.3 a) On commence par faire la division euclidienne de l'expression t^2+t+1 et $t+1$. On trouve

$$t^2+t+1 = (t+1)t \;+\; 1.$$

Donc, on a (pour $t \in \mathbb{R}$ convenable) :

$$\frac{1+t+t^2}{1+t} = t + \frac{1}{1+t}$$

Donc,

$$\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} - \big(\ln(3)-\ln(2)\big) = \frac{3}{2} + \ln(2) - \ln(3).$$

Pour la seconde intégrale, on a utilisé un calcul fait précédemment.

14.3 b) D'abord, on fait une division euclidienne et on trouve

$$3t^2+2t+1 = (4t+5)\Big(\frac{3}{4}t - \frac{7}{16}\Big) + \frac{51}{16}.$$

Puis, après calcul, on trouve

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{4}t - \frac{7}{16}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{96} - \frac{7}{96} = -\frac{1}{48} \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big(\ln(7) - \ln\frac{19}{3}\Big) = \frac{1}{4}\ln\frac{21}{19}.$$

Ainsi, l'intégrale cherchée vaut

$$-\frac{1}{48} + \frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}.$$

14.4 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_1^2 = \ln(7) - \ln(3) = \ln\Big(\frac{7}{3}\Big).$$

14.4 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2+\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\Big(t^2+\frac{2}{3}\Big)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} &= \ln\frac{11}{12} - \ln\frac{7}{9} \\ &= \ln\Big(\frac{11\times 9}{12\times 7}\Big) = \ln\frac{33}{28}.\end{aligned}$$

14.5 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+\sqrt{2}t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(\ln(4)-\ln(1+\sqrt{2})\big)\\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4}{1+\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\Big) = \frac{1}{2}\ln\big(4(\sqrt{2}-1)\big)\\ &= \ln\Big(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\Big).\end{aligned}$$

14.5 b) On force à apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{2at}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\Big[\ln(at^2+1)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1\\ &= \frac{1}{2a}\big(\ln(a+1)-\ln(2)\big) = \frac{1}{2a}\ln\Big(\frac{a+1}{2}\Big).\end{aligned}$$

14.6 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2} = A + \frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t=1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t=1$, on trouve $A=-1$. De même, on trouve $B=1$.

14.6 c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t &= 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\Big[\ln(t-2)-\ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-2}{t-1}\Big)\Big]_3^4\\ &= 2\Big(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(\ln\frac{2}{3}+\ln(2)\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

14.7 a) Soit $t\in[0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\Big(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(2-t)-\ln(2+t)\Big]_0^1 = \Big[\ln\Big(\frac{2-t}{2+t}\Big)\Big]_0^1 = \ln\frac{1}{3}.$$

14.7 b) Soit $t\in[2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big[\ln(t-1)-\ln(t)\Big]_2^3 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-1}{t}\Big)\Big]_2^3 = 2\Big(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

14.7 c) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a $t^2+4t+3=(t+1)(t+3)$ et

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right).$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1)-\ln(t+3)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

14.7 d) Soit $t \in [0,\frac{1}{3}]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{4t^2-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(\tfrac{1}{2}-t)-\ln(t+\tfrac{1}{2})\Big]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{t+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{3}}\\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

14.8 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{t^2-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}}-\frac{1}{t+\sqrt{a}}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{a}}\Big[\ln(\sqrt{a}-t)+\ln(t+\sqrt{a})\Big]_0^a=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a}-t}{t+\sqrt{a}}\right)\right]_0^a=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right).$$

14.9 a) Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x)=\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a^2+x^2}.$$

14.9 b) D'après ce qui précède, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ répond à la question.

14.10 a) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\Big[\arctan(t)\Big]_0^1=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}.$$

14.10 b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan(0)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

14.11 On a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan(\sqrt{2}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Donc, on a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

14.12 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + 1 \\ &= x^2 + (2 \times \frac{1}{2} \times x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

14.12 b) On procède comme précédemment mais on commencer par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \qquad \left(\text{car } \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{16} = -\tfrac{1}{16}\right) \end{aligned}$$

14.12 c) On trouve $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\dfrac{15}{16}$.

14.12 d) On trouve

$$ax^2 + a^2x + a^3 = a\left(x^2 + ax\right) + a^3 = a\left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right) + a^3 = a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}.$$

14.13 a) On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

14.13 b) Déjà, on a, si $t \in \mathbb{R}$: $t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \left(\text{en posant } \theta = t + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3} \times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

14.13 c) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{1/2} \qquad \text{(avec } a=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

14.13 d) Déjà, on a $6t^2-5t+1 = 6\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)$, pour $t\in\mathbb{R}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)} = 6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\tfrac{1}{2}-t\right) - \ln\left(\tfrac{1}{3}-t\right)\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3)-\ln(3/2) = \ln(2).$$

14.14 a) On calcule

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\left(t^2+\frac{2}{3}t\right)+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\arctan(1) = \frac{\pi}{12}.$$

14.14 b) Déjà, on remarque qu'on a, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, $t^2-(2a+1)t+a^2+a = (t-a)\big(t-(a+1)\big)$ et

$$\frac{1}{(t-a)\big(t-(a+1)\big)} = \frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}.$$

Donc, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \Big[\ln(a+1-t) - \ln(a-t)\Big]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{a+1-t}{a-t}\right)\right]_0^1$$

$$= \left(\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)\right) = \ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right).$$

14.15 Déjà, si $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right).$$

Ensuite, on calcule : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

Et, on écrit : $\dfrac{2-t}{1-t+t^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{1-t+t^2}$.

Et, on remarque que

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1-t+t^2)\Big]_0^1 = \ln(1) - \ln(1) = 0.$$

Or, on a vu plus haut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Donc, on trouve

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Fiche n° 15. Systèmes linéaires

Réponses

15.1 a) .... $\boxed{\{(3,1)\}}$

15.1 b) .... $\boxed{\{(7,2)\}}$

15.1 c) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}}$

15.1 d) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$

15.2 a) .... $\boxed{\left\{\left(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a\right)\right\}}$

15.2 b) .... $\boxed{(2,-3)}$

15.2 c) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2\right)\right\}}$

15.2 d) .... $\boxed{(a-2a^2,a+a^2)}$

15.3 a) .... $\boxed{\{(1+z,-z,z);z\in\mathbb{R}\}}$

15.3 b) .... $\boxed{\{(1,y,3+2y);y\in\mathbb{R}\}}$

15.3 c) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z\right);z\in\mathbb{R}\right\}}$

15.3 d) .... $\boxed{\left\{\left(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x\right);x\in\mathbb{R}\right\}}$

15.4 a) .... $\boxed{\{(2,-1,3)\}}$

15.4 b) .... $\boxed{\{(-1,4,2)\}}$

15.4 c) .... $\boxed{\varnothing}$

15.4 d) .... $\boxed{\left\{\left(-\frac{2}{7}-z,\frac{-3}{7},z\right);z\in\mathbb{R}\right\}}$

15.5 a) .... $\boxed{\{(1,1/2,1/2)\}}$

15.5 b) .... $\boxed{\varnothing}$

15.5 c) .... $\boxed{\{(5z,1-4z,z)\,;\,z\in\mathbb{R}\}}$

15.5 d) .... $\boxed{\left\{\left(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)\right\}}$

15.6 a) .... $\boxed{\{(5,3,-1)\}}$

15.6 b) .... $\boxed{\varnothing}$

15.6 c) .... $\boxed{\left\{\left(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c,\frac{a^2-a-1}{a^3-1}c,\frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c\right)\right\}}$

15.7 a) .... $\boxed{\{(0,0,0)\}}$

15.7 b) .... $\boxed{\{(x,y,-x-y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}}$

15.7 c) .... $\boxed{\{(x,x,x)\,;\,x\in\mathbb{R}\}}$

Corrigés

15.1 a) On calcule :

$$\begin{cases}x-2y=1\\3x+4y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2y\\3(1+2y)+4y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+2y\\10y+3=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10y=10\\x=1+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=3\end{cases}$$

15.1 b) On calcule : $\begin{cases}2x+y=16\\x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=16-2x\\x-16+2x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=5+16=21\\y=16-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=16-14=2\end{cases}$

15.1 c) On calcule : $\begin{cases}3x-6y=-3\\2x+2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=-1\\x+y=1\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x-2y=-1\\3y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2}{3}\\x=-1+2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

15.1 d) On calcule :

$$\begin{cases}3x-4y=-\sqrt{2}\\6x+2y=3\sqrt{2}\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}3x-4y=-\sqrt{2}\\8y+2y=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-4y=-\sqrt{2}\\10y=5\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\3x=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$

15.2 a) On calcule : $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ 2x+4-6x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{4} \\ y=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}a=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{8}a \end{cases}$

15.2 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ a^2y+3a^2+2a+y=2a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=ay+3a+2 \\ (a^2+1)y=2a-3-3a^2-2a \end{cases}$$
$$\underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y=\dfrac{-3-3a^2}{1+a^2}=-3 \\ x=-3a+3a+2=2 \end{cases}$$

15.2 c) On calcule :

$$\begin{cases} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 3x+5\times(2x-a^2)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-a^2 \\ 13x-5a^2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

15.2 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=5a-a^2-6a=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a+a^2 \\ x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \end{cases}$$

15.3 a) On calcule : $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

15.3 b) On calcule : $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

15.3 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \\ x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \end{cases}$$

15.3 d) On calcule :

$$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\dfrac{5}{2}+5x+2z+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4z=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-25}{6} \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x-2z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \\ y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

15.4 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=3 \\ x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ x+2y=0 \\ -5y=14-9=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=-2y=2 \end{cases}$$

15.4 b) On calcule :

$$\begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \end{cases} \iff \begin{cases} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{cases}$$

15.4 c) On calcule : $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}$.

Le système est incompatible car l'équation $0=-4$ n'a pas de solution.

15.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution. On calcule :

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

15.5 a) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ 2-2y+y-z=1 \\ 4-4y+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ -y-z=-1 \\ -4y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ -4+4z+2z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ y=1-z \\ 6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3/6=1/2 \\ y=1-1/2=1/2 \\ x=2-1=1 \end{cases}$$

15.5 b) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+4L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=5 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=5$ n'a pas de solution.

15.5 c) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-4z \\ x=-(1-4z)+z+1=5z-1+1=5z \end{cases}.$$

15.5 d) On calcule :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+(2-a)L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases}$$

On factorise le trinôme $-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

D'où : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3-a}{-(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{a+2} \\ y=1-(a+1)\times\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{a+2} \\ y=\dfrac{a+2-a-1}{a+2}=\dfrac{1}{a+2} \\ x=1-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+2}=1 \end{cases}$

15.6 a) On calcule :

$$\begin{cases} x-2z=7 \\ 2x-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ 14+4z-y=7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 14+8z-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ 7z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=7-4=3 \\ x=7-2=5 \end{cases}$$

15.6 b) On calcule :

$$\begin{cases} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ 2+z-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+z \\ y=z \\ 0=2 \end{cases}$$

Le système est incompatible car l'équation $0=2$ n'a pas de solution.

15.6 c) On calcule :

$$\begin{cases} x-az=c \\ ax-y=c \\ ay-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ a(c+az)-y=c \\ ay-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a(a-1)c+a^2z-z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ a\big((a-1)c+a^2z\big)-z=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^3-1=0$ a pour unique solution $a=1$ (fonction $t\mapsto t^3$ strictement croissante). Or $a\neq 1$, donc $a^3-1\neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=c\dfrac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1}=\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{cases}$$

15.7 a) On calcule :

$$\begin{cases} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x+3y-3x-y=0 \\ x+y+3\times(-3x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-y \\ x=y \\ -10x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

15.7 b) On calcule : $\begin{cases} 4x+y+z=3x \\ x+4y+z=3y \\ x+y+4z=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-x-y$

15.7 c) On calcule :

$$\begin{cases} 4x+y+z=6x \\ x+4y+z=6y \\ x+y+4z=6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ x-2y+2x-y=0 \\ x+y-2\times(2x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-y \\ 3x-3y=0 \\ -3x+3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=2x-x=x \end{cases}$$

Fiche n° 16. Nombres complexes

Réponses

16.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

16.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

16.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

16.1 d) .... $\boxed{5}$

16.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

16.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

16.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

16.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

16.2 a) .... $\boxed{12}$

16.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

16.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

16.2 e) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

16.2 f) .... $\boxed{5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$

16.2 g) ...... $\boxed{10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}}$

16.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

16.3 a) .... $\boxed{1}$

16.3 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

16.3 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

16.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

16.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

16.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2-2\times4\times3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

16.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

16.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times2\times3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times5\times12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.

Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

16.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

16.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

16.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

16.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

16.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

16.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

16.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \overline{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

16.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

16.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

16.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

16.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (car $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1$. Et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

16.3 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

16.3 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

16.3 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.

Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 17. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)}$

17.1 b) .... $\boxed{-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}}$

17.1 c) .... $\boxed{-\frac{1}{8}\cos(6x)+\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{3}{8}\cos(2x)+\frac{1}{4}}$

17.1 d) .... $\boxed{-\frac{\sin(9x)}{8}+\frac{3\sin(5x)}{8}-\frac{\sin(3x)}{8}-\frac{3\sin(x)}{8}}$

17.1 e) .... $\boxed{\frac{\cos(9x)}{8}+\frac{3\cos(5x)}{8}+\frac{\cos(3x)}{8}+\frac{3\cos(x)}{8}}$

17.1 f) .... $\boxed{-\frac{1}{4}\sin(11x)+\frac{1}{4}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(3x)}$

17.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$

17.2 b) .... $\boxed{\left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$

17.2 c) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{\frac{-7i\pi}{12}}}$

17.2 d) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}}$

17.2 e) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}}$

17.2 f) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}}$

17.2 g) .... $\boxed{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}e^{\frac{13i\pi}{24}}}$

17.2 h) .... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) .... $\boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

17.3 b) .... $\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{11\pi}{12}}}$

17.4 a) .... $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

17.4 b) .... $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

17.5 a) .... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

17.5 b) .... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

17.5 c) .... $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

17.5 d) .... $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

17.6 a) .... $\boxed{\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

17.6 b) .... $\boxed{\frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

17.6 c) .... $\boxed{0}$

17.7 a) .... $\boxed{\frac{e^{\pi}+1}{2}}$

17.7 b) .... $\boxed{\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)}$

Corrigés

17.1 a) On calcule :

$$\cos^3(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+\frac{3}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.$$

17.1 b) On calcule :

$$\cos(2x)\sin^2(x)=\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2=-\frac{1}{8}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$
$$=-\frac{1}{8}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+2\right)=-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.$$

17.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-e^{-9ix}-3(e^{5ix}-e^{-5ix})+e^{3ix}-e^{-3ix}+3(e^{ix}-e^{-ix})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

17.2 a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

17.2 b) $1+e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{-\frac{7i\pi}{12}}+e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0}e^{\frac{7i\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{\frac{7i\pi}{12}}e^{-i\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

17.2 c) $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

17.2 d) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1+e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$

17.2 e) $-1-e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0}e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}+i\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

17.2 f) $1-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{24}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}$.

17.2 g) On fait le quotient de a) et f).

17.2 h) $\left(1+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

17.3 a) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

17.3 b) $e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)ie^{5i\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{5i\frac{\pi}{12}+i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

17.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}(e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x))\\ &= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))\\ &= 4\cos^3(x)-3\cos(x).\end{aligned}$$

17.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(e^{4ix}) = \mathrm{Im}\left((e^{ix})^4\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^4\right)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x)+4i\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4i\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

17.5 a) $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{ix}+e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{x+3x}{2}}(e^{i(-x)}+e^{ix})\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2ix}2\cos(x)\right) = 2\cos(2x)\cos(x)$.

17.5 b) $\sin(5x) - \sin(3x) = \mathrm{Im}(e^{5ix} - e^{3ix}) = \mathrm{Im}\big(e^{4ix}(e^{ix} - e^{-ix})\big) = \mathrm{Im}\big(e^{4ix} 2i\sin(x)\big) = 2\cos(4x)\sin(x)$.

17.5 c) $\cos(x) - \cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{ix} - e^{3ix}) = \mathrm{Re}\Big(e^{i\frac{x+3x}{2}}(e^{i(-x)} - e^{ix})\Big) = \mathrm{Re}\big(e^{2ix}(-2i)\sin(x)\big) = 2\sin(x)\sin(2x)$.

17.5 d) $\sin(3x) + \sin(5x) = \mathrm{Im}(e^{3ix} + e^{5ix}) = \mathrm{Im}\big(e^{4ix}(e^{-ix} + e^{ix})\big) = \mathrm{Im}\big(e^{4ix} 2\cos(x)\big) = 2\sin(4x)\cos(x)$.

17.6 a) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \mathrm{Im}(e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix})$ $= \mathrm{Im}\big(1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + (e^{ix})^3\big)$. Or, $e^{ix} \neq 1$ donc $1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + (e^{ix})^3 = \dfrac{1 - e^{4ix}}{1 - e^{ix}}$.

On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{2ix}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{-2i\sin(2x)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{3x}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

17.6 b) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.

Si x est de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la somme vaut -4.

Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) &= \mathrm{Re}(e^{ix} + e^{3ix} + e^{5ix} + e^{7ix}) \\ &= \mathrm{Re}\Big(e^{ix}\big(1 + (e^{2ix}) + (e^{2ix})^2 + (e^{2ix})^3\big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $e^{2ix} \neq 1$ donc

$$e^{ix}\big(1 + (e^{2ix}) + (e^{2ix})^2 + (e^{2ix})^3\big) = e^{ix}\frac{1 - (e^{2ix})^4}{1 - e^{2ix}} = e^{ix}\frac{1 - (e^{8ix})}{1 - e^{2ix}} = e^{ix}\frac{e^{4ix}}{e^{ix}}\frac{-2i\sin(4x)}{-2i\sin(x)} = e^{4ix}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) = \frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

17.6 c) On calcule :

$$\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix} + e^{i(x + \frac{2\pi}{3})} + e^{i(x+\frac{4\pi}{3})}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0}\right) = 0.$$

17.7 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx &= \int_0^\pi e^x \mathrm{Im}(e^{ix})\,dx = \int_0^\pi \mathrm{Im}(e^x e^{ix})\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi e^{(1+i)x}\,dx\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi\right)\mathrm{Im}\left(\frac{e^{\pi+i\pi} - 1}{1+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-e^\pi - 1}{1+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{(-e^\pi - 1)(1-i)}{2}\right) \\ &= \frac{e^\pi + 1}{2}.\end{aligned}$$

Fiche n° 18. Sommes et produits

Réponses

18.1 a) .... $\boxed{n(n+2)}$

18.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

18.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(5n+1)}{2}}$

18.1 d)......... $\boxed{\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}}$

18.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

18.2 b)... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

18.2 c) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

18.2 d) .... $\boxed{5^{n+1}\dfrac{1-(\frac{2}{5})^{n+1}}{3}}$

18.2 e)... $\boxed{\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)}$

18.2 f) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

18.3 a)................. $\boxed{2^{q-p+1}}$

18.3 b) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

18.3 c) .... $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

18.3 d) .... $\boxed{0}$

18.4 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

18.4 b) .... $\boxed{0}$

18.4 c)...... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

18.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

18.5 a) .... $\boxed{(n+2)^3-2^3}$

18.5 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

18.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

18.5 d)............ $\boxed{(n+1)!-1}$

18.6 a) .... $\boxed{n+1}$

18.6 b)................ $\boxed{1-4n^2}$

18.6 c)...................... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

18.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

18.7 a).............. $\boxed{1-\dfrac{1}{n+1}}$

18.7 b)............. $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}}$

18.8 a)................ $\boxed{2n^2+n}$

18.8 b) .... $\boxed{\dfrac{n(3n+1)}{2}}$

18.9 a) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)}{2}}$

18.9 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{4}}$

18.9 c).............. $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

18.9 d) .. $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

18.9 e)......... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

18.9 f)....... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

18.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

18.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

18.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n} k + (n-1)\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

18.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1} k \ - \ 4\sum_{k=2}^{n-1} 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

18.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

18.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(4k(k^2+2)\right) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

18.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2\frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

18.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}.$$

18.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(7^k+4k-n+2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1)+n+4.$$

18.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

18.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2\times\cdots\times 2 = 2^{q-p+1}$.

18.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1\times 3^2\times\cdots\times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

18.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}\times k = 5^n \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

18.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

18.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n} n+1-k = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

18.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

18.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$
$$= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n)$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

18.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

18.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

18.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

18.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

18.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)\times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

18.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1.$

18.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-1} \times \frac{2n+1}{2n-1}$$
$$= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1 - 4n^2.$$

18.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$

18.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

18.7 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.7 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k+2} + \dfrac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.8 a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n\\ k \text{ impair}}} (-1)k^2 \\
&= \sum_{p=0}^{n}(2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1}\left(4p^2+4p+1\right) \\
&= \underbrace{4\sum_{p=0}^{n} p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p^2}_{=4n^2} - 4\sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n.
\end{aligned}$$

18.8 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n) &= \sum_{k=0}^{n} \min(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n - (n+1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

18.9 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

18.9 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

18.9 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{3}{2}(j^2 - j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3\times 2\times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

18.9 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n}1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j}1\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\left[i^2(n+1)-i^3\right] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

18.9 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

18.9 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n}\max(i,j)\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie}\\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 19. Coefficients binomiaux

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

19.1 b) .... $\boxed{720}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

19.1 d) .... $\boxed{15}$

19.1 e) .... $\boxed{56}$

19.1 f) .... $\boxed{140}$

19.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

19.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

19.2 c) .... $\boxed{2^n \times n!}$

19.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

19.3 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

19.3 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

19.3 c) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

19.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

19.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

19.3 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

19.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

19.4 b) .... $\boxed{\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

19.5 a) .... $\boxed{3^n}$

19.5 b) .... $\boxed{0}$

19.5 c) .... $\boxed{6^n}$

19.5 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

19.6 a) .... $\boxed{2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dbinom{n}{2p}}$

19.6 b) .... $\boxed{2^{n-1}}$

19.7 a) .... $\boxed{2^n}$

19.7 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

19.7 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

19.7 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

19.8 a) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

19.8 b) .... $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}^2}$

19.8 c) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

Corrigés

19.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

19.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

19.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

19.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

19.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

19.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

19.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

19.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

19.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

19.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente. On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

19.3 a) Par définition, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

19.3 b) Par définition, $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

19.3 c) On calcule

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!}$$
$$= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

19.3 d) On calcule $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

19.3 e) On réduit au même dénominateur $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

19.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

19.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\frac{1}{n!} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)}$$
$$\frac{1}{2n \times (n+1)!} = \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)}$$
$$\text{et} \quad \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.$$

D'où,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!}$$
$$= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

19.4 b) On a

$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} = \frac{(3n+3)!}{a^{3n+3} \times ((n+1)!)^3} \times \frac{a^{3n} \times (n!)^3}{(3n)!}.$$

Or,

$$\begin{aligned}(3n+3)! &= (3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1) \times (3n)!\\ a^{3n+3} &= a^{3n} \times a^3\\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1) \times n!)^3 = (n+1)^3 \times (n!)^3.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3}\\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3 \times (n+1)^3} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}.\end{aligned}$$

19.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

19.5 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

19.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^n \times 2^{n-k} \binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n$.

19.5 d) On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n} 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k}\\ &= 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k}\\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n.\end{aligned}$$

19.6 a) On développe $\displaystyle(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+(-1)^k)$.

Or, $1+(-1)^k = 2$ si k est pair et $1+(-1)^k = 0$ si k est impair. Ainsi, on notant $P = \{k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a

$$(1+1)^n + (1-1)^n = \sum_{k \in P} \binom{n}{k} \times 2 = 2 \times \sum_{k \in P} \binom{n}{k}.$$

Or, si $k \in P$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2p$. Comme $0 \leqslant k \leqslant n$, on a alors $0 \leqslant 2p \leqslant n$ et donc $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Comme $p \in \mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0 \leqslant p \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ainsi,

$$\sum_{k \in P} \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} \quad \text{et} \quad (1+1)^n + (1-1)^n = 2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

19.6 b) On déduit de la première question que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = \frac{1}{2}((1+1)^n + (1-1)^n) = 2^{n-1}$.

19.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x=1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

19.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x=1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

19.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x=1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

19.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x=1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

19.8 a) On développe $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Ainsi, le coefficient de x^n vaut $\binom{2n}{n}$.

19.8 b) On obtient une contribution en x^n dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ à chaque fois que l'on multiplie un terme de la forme $a_k x^k$ dans le premier facteur avec un terme de la forme $b_{n-k}x^{n-k}$ dans le deuxième facteur, et ce pour toutes les valeurs de k entières naturelles et inférieures ou égales à n. Or, $(1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right)$.

Donc, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

19.8 c) On déduit, en comparant les réponses aux questions précédentes, que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Fiche n° 20. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

20.1 a) $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

20.1 b) $\boxed{2}$

20.1 c) $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

20.1 d) $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

20.1 e) $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

20.1 f) $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

20.2 a) $\boxed{1}$

20.2 b) $\boxed{0}$

20.2 c) $\boxed{\dfrac{5}{4}}$

20.2 d) $\boxed{\dfrac{4}{3}}$

20.2 e) $\boxed{\dfrac{13}{12}}$

20.2 f) $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

20.3 a) $\boxed{\mathrm{sh}(x+y)}$

20.3 b) $\boxed{\mathrm{ch}(x+y)}$

20.4 a) $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.4 b) $\boxed{1}$

20.4 c) $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

20.4 d) $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

20.5 a) $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

20.5 b) $\boxed{\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}}$

20.5 c) $\boxed{1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.5 d) $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

20.6 a) $\boxed{1}$

20.6 b) $\boxed{0}$

20.6 c) $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

20.6 d) $\boxed{\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

20.6 e) $\boxed{\left\{\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\pi-\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

20.6 f) $\boxed{1}$

20.7 a) $\boxed{\{\ln(\sqrt{5}-2);\ln(\sqrt{5}+2)\}}$

20.7 b) $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

20.7 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)}$

20.7 d) $\boxed{[-\ln(4+\sqrt{15}),\ln(4+\sqrt{15})]}$

20.7 e) $\boxed{\left[\ln(3+\sqrt{10}),\left[\right.\right.}$

20.7 f) $\boxed{\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\ln(3)\right]}$

20.8 a) $\boxed{x\mapsto\ln(2)\times 2^x+2x}$

20.8 b) $\boxed{x\mapsto\dfrac{15^x\ln(3/5)+3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

20.8 c) $\boxed{x\mapsto(\ln(x)+1)x^x}$

20.8 d) $\boxed{x\mapsto\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}}$.

20.9 a) $\boxed{x\mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$

20.9 b) $\boxed{x\mapsto\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}$

20.9 c) $\boxed{x\mapsto\dfrac{1-\mathrm{th}^2(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}}$

20.9 d) $\boxed{x\mapsto\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(x))}$

20.10 a) $\boxed{x\mapsto 0}$

20.10 b) $\boxed{x\mapsto 0}$

20.11 a) $\boxed{x\mapsto(\ln(x)+1)x^x e^{-x^{2x}}}$

20.11 b) $\boxed{x\mapsto\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}}$

20.11 c) $\boxed{x\mapsto\arcsin(x)}$

20.11 d) $\boxed{x\mapsto\arctan(x)}$

Corrigés

20.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=2.$

20.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

20.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

20.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}.$

20.2 c) On calcule : $\mathrm{ch}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$.

20.2 d) On calcule : $\mathrm{sh}(\ln(3)) = \dfrac{e^{\ln(3)} - e^{-\ln(3)}}{2} = \dfrac{3-\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$.

20.2 e) On calcule : $\mathrm{ch}(\ln(2/3)) = \dfrac{e^{\ln(2/3)} + e^{-\ln(2/3)}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{\frac{13}{6}}{2} = \dfrac{13}{12}$.

20.2 f) On sait que $\mathrm{th}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5}$.

20.3 a) Développons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{ch}(y)\mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (e^y + e^{-y})(e^x - e^{-x})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \mathrm{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

20.4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3) = 2x\ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

20.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2) = (x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$.

20.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Alors on a l'équivalence $2^x = 3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(3) + 2x\ln(2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

20.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} &\Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10) = \ln(4) + x\ln(5) + \frac{x}{2}\ln(9) \\
&\Leftrightarrow x\left(2\ln(5) + 2\ln(2) - \ln(5) - \frac{2\ln(3)}{2}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2\ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.
\end{aligned}$$

20.5 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow$ $x\ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

20.5 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

20.5 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

20.5 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

20.6 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de arcsin, l'unique solution est 1.

20.6 b) Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

20.6 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

20.6 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

20.6 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

20.6 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

20.7 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors on a les équivalences (comme $e^x > 0$)

$$\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X^2 + 1 = 2\sqrt{5}X \Leftrightarrow X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré, dont le discriminant est $20 - 4 = 16$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$. Ces deux quantités sont positives, on a donc l'équivalence $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow e^x = \sqrt{5} \pm 2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{5} \pm 2)$. Ainsi, les deux solutions sont $\{\ln(\sqrt{5} - 2); \ln(\sqrt{5} + 2)\}$

20.7 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{2} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0$, de discriminant $4 + 4 = 8$, de solutions $\dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. La seule solution positive est $1 + \sqrt{2}$, donc $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

20.7 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow X^2 - 1 = \dfrac{1}{3}(X^2 + 1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}X^2 - \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow X^2 = 2 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{2}$. Ainsi, la seule solution positive étant $\sqrt{2}$, $\mathrm{th}(x) \Leftrightarrow e^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

20.7 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{X + \frac{1}{X}}{2} \leqslant 4 \Leftrightarrow X^2 + 1 \leqslant 8X \Leftrightarrow X^2 - 8X + 1 \leqslant 0$.
Ce polynôme du second degré a pour discriminant 60 et pour racines $\dfrac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Les deux racines sont positives, donc $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15}e^x \leqslant 4 + \sqrt{15} \Leftrightarrow \ln(4 - \sqrt{15}) \leqslant x \leqslant \ln(4 + \sqrt{15})$. On remarque ensuite que $\dfrac{1}{4 - \sqrt{15}} = \dfrac{4 + \sqrt{15}}{(5 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15}$.

....

20.7 e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = e^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \leqslant 6 \Leftrightarrow X - \dfrac{1}{X} \leqslant 6 \Leftrightarrow X^2 - 6X - 1 \leqslant 0$. Ce trinôme du second degré a pour discriminant 40, et a donc pour racines $\dfrac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$. La première racine est négative, la seconde positive, et $X \geqslant 0$, donc $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \Longleftrightarrow e^x \geqslant 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x \geqslant \ln(3 + \sqrt{10})$.

....

20.7 f) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $X = e^x$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) \leqslant \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \leqslant \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow X^2 - 1 \leqslant \frac{X^2 + 1}{2} \Longleftrightarrow X^2 - 3 \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow X^2 \leqslant 3 \Longleftrightarrow e^{2x} \leqslant 3 \Longleftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

....

20.8 a) On n'oublie pas que $2^x = e^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

....

20.8 c) On écrit que $x^x = e^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$.

....

20.8 d) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - x^2}\arccos(x)^2}.$$

....

20.9 a) On dérive une composée $x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.

....

20.9 c) Il s'agit de dériver th :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$

La suite se dérive comme la dérivée d'une composée.

....

20.10 a) La fonction est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$.

....

20.10 b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1 + x^2} - \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

....

20.11 a) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de cette fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x F'(x^x) = (\ln(x) + 1)x^x e^{-(x^x)^2} = (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^{2x}}$.

....

20.11 b) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ est $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{th}(x)$.

Donc, la dérivée de $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))})$ est

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}e^{-\ln(\mathrm{ch}(x))} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}$$

....

Fiche n° 21. Suites numériques

Réponses

21.1 a) .... $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

21.1 b) .... $\boxed{8}$

21.1 c) .... $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

21.1 d) .... $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

21.2 a) .... $\boxed{13}$

21.2 b) .... $\boxed{29}$

21.3 a) .... $\boxed{2^{\frac{1}{8}}}$

21.3 b) .... $\boxed{2^{\frac{1}{64}}}$

21.4 a) .... $\boxed{2}$

21.4 b) .... $\boxed{2}$

21.5 a) .... $\boxed{2n\ln(n)}$

21.5 b) .... $\boxed{4n\ln(2n)}$

21.6 a) .... $\boxed{21}$

21.6 b) .... $\boxed{10\,000}$

21.6 c) .... $\boxed{2\,001}$

21.6 d) .... $\boxed{10\,201}$

21.7 a) .... $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

21.7 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

21.8 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

21.8 b) .... $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

21.8 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{1\,024}}$

21.8 d) .... $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

21.9 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

21.9 b) .... $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

21.10 a) .... $\boxed{3^n+(-2)^n}$

21.10 b) .... $\boxed{211}$

21.11 a) .... $\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}}$

21.11 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

21.12 a) .... $\boxed{257}$

21.12 b) .... $\boxed{65\,537}$

21.12 c) .... $\boxed{F_n}$

21.12 d) .... $\boxed{F_{n+1}-2}$

21.12 e) .... $\boxed{F_{n+1}+2^{2^n+1}}$

21.12 f) .... $\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

21.1 a) $u_0=\dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2}=\dfrac{12}{5}$.

21.1 b) $u_1=\dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2}=\dfrac{5}{5}\times 8=8$.

21.1 c) $u_n=\dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2}=\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

21.1 d) $u_{3n}=\dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2}=\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

21.2 a) $u_1=2\times 1+3=5$ et $u_2=2\times 5+3=13$.

21.2 b) On calcule : $u_3=2\times 13+3=29$.

21.3 a) $v_3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2^3}}=2^{\frac{1}{8}}$.

21.3 b) $v_6=2^{\left(\frac{1}{2}\right)^6}=2^{\frac{1}{2^6}}=2^{\frac{1}{64}}$.

21.4 a) $w_1=\dfrac{1}{2}\times 2^2=\dfrac{4}{2}=2$ et, de même, $w_2=2$.

21.4 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

21.5 a) $t_{2n} = \ln((2n)^{2n}) - \ln(2^{2n}) = 2n\ln(2) + 2n\ln(n) - 2n\ln(2) = 2n\ln(n)$.

21.5 b) $t_{4n} = \ln((4n)^{4n}) - \ln(2^{4n}) = 8n\ln(2) + 4n\ln(n) - 4n\ln(2) = 4n\ln(2) + 4n\ln(n) = 4n\ln(2n)$.

21.6 a) $a_{100} = a_0 + 100 \times 2 = 201$.

21.6 b) $s_{100} = \dfrac{100 \times (1+199)}{2} = \dfrac{100 \times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000$.

21.6 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000 \times 2 = 2\ 001$.

21.6 d) $s_{101} = \dfrac{101 \times (1+201)}{2} = \dfrac{101 \times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201$.

21.7 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}$.

21.7 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}$.

21.8 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}$.

21.8 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\ 023}{512} = \dfrac{3069}{512}$.

21.8 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\ 024}$.

21.8 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\ 047}{1\ 024} = \dfrac{6141}{1024}$.

21.9 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$.

21.9 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

21.10 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

21.10 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

21.11 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

21.11 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$.

21.12 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$.

21.12 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\ 537$.

21.12 c) $(F_{n-1}-1)^2+1=\left(2^{2^{n-1}}\right)^2+1=2^{2^{n-1}\times 2}+1=2^{2^n}+1=F_n.$

21.12 d) $F_n\times(F_n-2)=\left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^n}-1\right)=\left(2^{2^{n+1}}-1\right)=F_{n+1}-2.$

21.12 e) $F_n^2=\left(2^{2^n}+1\right)^2=\left(2^{2^n}\right)^2+2\cdot 2^{2^n}+1=2^{2^{n+1}}+1+2^{2^n+1}=F_{n+1}+2^{2^n+1}.$

21.12 f) $F_{n+1}^2-2(F_n-1)^2=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2(F_{n+1}-1)=F_{n+2}+2\cdot 2^{2^{n+1}}-2\cdot 2^{2^{n+1}}=F_{n+2}.$

Fiche n° 22. Développements limités

Réponses

22.1 a) .... $3x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

22.1 b) .... $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

22.1 c) .... $\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$

22.1 d) .... $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$

22.2 a) .... $\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \frac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \frac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{O}(x^5)$

22.2 b) .... $1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{O}(x^7)$

22.2 c) .... $\mathrm{e}\left(1 + \mathrm{i}x - x^2 - \frac{5}{6}\mathrm{i}x^3\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

22.2 d) .... $1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$

22.3 a) .... $1 - \frac{3\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)$

22.3 b) .... $1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{O}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)$

22.3 c) .... $-1 + \frac{\pi^2}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{\pi^2}{48}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7\right)$

22.4 a) .... $-\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

22.4 b) .... $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} - \frac{5}{6x^5} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^6}\right)$

22.4 c) .... $-\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

22.4 d) .... $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{3x} - \frac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right) + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)$

Corrigés

22.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) + x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = 3x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$.

22.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 4. Observez que le développement limité à l'odre 3 de $\dfrac{1}{x+1}$ suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

22.1 c) Il suffit d'écrire : $\sin(x)(\cosh(x)-1) = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$.

22.1 d) Il suffit d'écrire :

$$e^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{o}(x^6).$$

22.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 5) et de l'exponentielle (à l'ordre 4), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{O}(x^5)\right) = e\exp\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{O}(x^5)\right)$.

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{24}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^4\right) + \underset{x\to 0}{O}(x^5)$.

Observez qu'il n'est pas utile de faire apparaître tous les termes de la partie régulière du développement limité de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ selon la puissance à laquelle on la considère.

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \dfrac{ex}{2} + \dfrac{11ex^2}{24} - \dfrac{7ex^3}{16} + \dfrac{2447ex^4}{5760} + \underset{x\to 0}{O}(x^5)$.

22.2 b) On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{O}(x^7)$$
$$\sqrt{u} = 1 + \frac{1}{2}(u-1) - \frac{1}{8}(u-1)^2 + \frac{1}{16}(u-1)^3 + \underset{u\to 1}{O}((u-1)^4)$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \underset{x\to 0}{O}(x^7)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{O}(x^7).\end{aligned}$$

22.2 c) On a : $e^{ix} = 1 + ix - \dfrac{x^2}{2} - i\dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $e^x = e + e(x-1) + e\dfrac{(x-1)^2}{2} + e\dfrac{(x-1)^3}{6} + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right)$.

D'où : $e^{e^{ix}} = e + e\left(ix - \dfrac{x^2}{2} - i\dfrac{x^3}{6}\right) + e\dfrac{\left(ix - \dfrac{x^2}{2}\right)^2}{2} + e\dfrac{(ix)^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = e\left(1 + ix - x^2 - \dfrac{5}{6}ix^3\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

22.2 d) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \dfrac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$. Or $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$ et $\dfrac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to 0}{o}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to 0}{o}(t)$. D'où $g(t) = \left(-t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to 0}{o}(t)\right) = -t + \dfrac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$ et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$.

22.3 a) La formule de Taylor-Young affirme que $\cos(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \underset{x\to \frac{\pi}{3}}{o}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (observez que l'ordre 1 sera suffisant !) et

$\sin(t) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \underset{t\to \frac{\pi}{2}}{o}\left(\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2\right)$. D'où $\sin(\pi\cos(x)) = 1 - \dfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to \frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$

22.3 b) On sait que $\tan(t) = t + \dfrac{t^3}{3} + \underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)$. Ainsi,

$$\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)} = \frac{1+t+\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)}{1-t-\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)} = \left(1+t+\frac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)\left(1+t+t^2+\frac{4}{3}t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)$$
$$= 1+2t+2t^2+\frac{8}{3}t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4).$$

D'où finalement $\tan(x) = 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)$.

22.3 c) La formule de Taylor-Young affirme que $\sin(x) = 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\right)$ (observez que l'ordre 5 sera suffisant !) et $\cos(t) = -1+\frac{1}{2}(t-\pi)^2+\underset{t\to\pi}{\mathrm{o}}\left((t-\pi)^3\right)$ (observez que l'ordre 3 sera suffisant !). D'où :

$$\cos(\pi\sin(x)) = -1+\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)^2+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right)$$
$$= -1+\frac{\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{\pi^2}{48}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right).$$

22.4 a) On a :

$$\frac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)}-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)}-\frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}+\dfrac{x^4}{120}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)}-1\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120}+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)$$
$$= -\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{1}{720}x^2+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2).$$

22.4 b) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}$, en $+\infty$ à l'ordre 5, revient à le faire, en 0 à l'ordre 5, pour l'application g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \dfrac{t\sin(t)}{1+t}$. Or $t\sin(t) = t^2-\dfrac{t^4}{6}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^6)$ et $\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)$. D'où $g(t) = t^2-t^3+\frac{5}{6}t^4-\frac{5}{6}t^5+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^6)$, puis $f(x) = \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{6x^4}-\dfrac{5}{6x^5}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$.

22.4 c) On a : $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x) = -\ln(x)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)+1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{4x^3}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

22.4 d) On a :

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \exp\left(x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)$$
$$= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x^2}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{3x}-\frac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right)+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)$$

Fiche n° 23. Arithmétique

Réponses

23.1 a) .... $\boxed{(6,7)}$	**23.4** .... $\boxed{1}$	**23.7** a) ...... $\boxed{(-5,2)}$	**23.9** d). $\boxed{\text{il est premier}}$
23.1 b) ...... $\boxed{(-7,2)}$	**23.5** a) .... $\boxed{154}$	**23.7** b) .. $\boxed{8 \pmod{13}}$	**23.10** a) .... $\boxed{67}$
23.1 c) ...... $\boxed{(-6,7)}$	**23.5** b) .... $\boxed{\dfrac{65}{18}}$	**23.7** c).. $\boxed{11 \pmod{13}}$	**23.10** b) .... $\boxed{7}$
23.1 d) .... $\boxed{(7,2)}$	**23.5** c) .... $\boxed{29\ 160}$	**23.8** .... $\boxed{5}$	**23.11** a) .... $\boxed{1}$
23.2 a) .... $\boxed{20}$	**23.5** d) ...... $\boxed{\dfrac{1}{29\ 160}}$	**23.8** .... $\boxed{(2023,6406)}$	**23.11** b) .... $\boxed{1}$
23.2 b) .... $\boxed{4}$	**23.6** a) .... $\boxed{(9,8)}$	**23.9** a)... $\boxed{2 \times 3 \times 337}$	**23.11** c) .... $\boxed{6}$
23.3 a) .... $\boxed{2}$	**23.6** b) ..... $\boxed{(12,30)}$	**23.9** b) ...... $\boxed{7 \times 17^2}$	**23.11** d) .... $\boxed{5}$
23.3 b) .... $\boxed{4}$		**23.9** c) ...... $\boxed{43 \times 47}$	**23.11** e) .... $\boxed{66}$
			23.11 f) .... $\boxed{2}$

Corrigés

23.1 a) $61 = 6 \times 9 + 7$.

23.1 b) Puisque $61 = 6 \times 9 + 7$ alors $-61 = (-6) \times 9 - 7 = (-7) \times 9 + 2$.

23.1 c) $61 = 6 \times 9 + 7$ implique $61 = (-6) \times (-9) + 7$.

23.1 d) Comme $61 = 6 \times 9 + 7$ alors $-61 = 6 \times (-9) - 7 = 7 \times (-9) + 2$.

23.2 a) $524 = 26d + r$ avec $0 \leqslant r < d$. On en déduit que $26d \leqslant 524 < 27d$ et $\dfrac{524}{27} < d \leqslant \dfrac{524}{26}$. D'où $d = 20$.

23.2 b) $r = 524 - 26 \times 20 = 4$.

23.3 a) $5 \equiv 2 \pmod 3$ et $5^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 3$. Tout dépend de la parité de 2 021. Finalement $5^{2021} \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$.

23.3 b) $3^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5$ d'où $3^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 3$. Le reste de 3^n modulo 5 dépend du reste de n modulo 4. Puisque $2\ 022 = 505 \times 4 + 2 \equiv 2 \pmod 4$ alors $3^{2\ 022} \equiv 3^2 \equiv 4 \pmod 5$.

23.4 $2\ 023 \equiv 3 \pmod{10}$ et $3^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$, par conséquent $3^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Les restes modulo 10 des puissances de 3 sont périodiques de période 4. Puisque $2\ 022 = 505 \times 4 + 2 \equiv 2 \pmod 4$ alors $\forall n \geqslant 2, 2\ 022^n \equiv 0 \pmod 4$. Finalement $2\ 023^{2022^{2021}} \equiv 3^0 \equiv 1 \pmod{10}$.

23.5 a) L'algorithme d'Euclide s'écrit ici : $10\ 010 = 3 \times 2\ 772 + 1\ 694$, $2\ 772 = 1 \times 1\ 694 + 1\ 078$, $1\ 694 = 1 \times 1\ 078 + 616$, $1\ 078 = 1 \times 616 + 462$, $616 = 1 \times 462 + 154$ et $462 = 3 \times 154 + 0$. Le dernier reste non nul est $10\ 010 \wedge 2\ 772 = 154$.

23.5 b) En utilisant le résultat du a), on établit que $10\ 001 = 154 \times 65$ et $2\ 772 = 154 \times 18$ d'où $\dfrac{10\ 001}{2\ 772} = \dfrac{65}{18}$.

23.5 c) L'algorithme d'Euclide pour 729 et 360 donne : $729 = 2 \times 360 + 9$ et $360 = 40 \times 9 + 0$. D'où $729 \wedge 360 = 9$ et, comme $a \times b = (a \wedge b) \times (a \vee b)$, $729 \vee 360 = \dfrac{360 \times 729}{9} = 40 \times 729 = 29\,160$.

Ces calculs (et surtout les calculs fractionnaires) auraient été plus digestes en utilisant la décomposition en facteurs premiers des deux entiers : $360 = 36 \times 10 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $729 = 3^6$. Ainsi $729 \vee 360 = 2^3 \times 3^6 \times 5$... Il faut néanmoins effectuer ce produit d'une façon ou d'une autre.

23.5 d) D'après les calculs faits au c), puisque $\dfrac{360}{729 \wedge 360} = \dfrac{360}{9} = 40$ et $\dfrac{729}{729 \wedge 360} = \dfrac{729}{9} = 81$, on réduit au même dénominateur : $\dfrac{1}{360} - \dfrac{2}{729} = \dfrac{81}{360 \times 81} - \dfrac{2 \times 40}{729 \times 40} = \dfrac{81 - 80}{29\,160} = \dfrac{1}{29\,160}$.

23.6 a) Puisque $a \wedge b = 24$, il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux tels que $a = 24x$ et $b = 24y$. Le système s'écrit alors $\begin{cases} (24x)^2 - (24y)^2 = 24^2 \times 17 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 17 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$. Ainsi les deux entiers $x + y$ et $x - y$ sont-ils des diviseurs de 17. Puisque x et y sont des naturels, on a $x - y \leqslant x + y$ et donc nécessairement $x + y = 17$ et $x - y = 1$. On obtient une unique solution : $(x, y) = (9, 8)$. On vérifie que $(a, b) = (216, 192)$ est bien (l'unique !) solution du système de départ.

23.6 b) Puisque $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, ab = (a \wedge b) \times (a \vee b)$, le système l'énoncé équivaut à $\begin{cases} a \times b = 360 \\ a \wedge b = 6 \\ 6 < a < b \end{cases}$. Posons $a = 6x$ et $b = 6y$ de sorte que $x \wedge y = 1$. On obtient le système équivalent $\begin{cases} xy = 10 \\ x \wedge y = 1 \\ 1 < x < y \end{cases}$.

Puisque $10 = 2 \times 5$ et $1 < x < y$, la seule solution du système est $(x, y) = (2, 5)$ et, par conséquent $(a, b) = (12, 30)$.

23.7 a) L'algorithme d'Euclide pour 13 et 5 donne : $13 = 2 \times 5 + 3$; $5 = 1 \times 3 + 2$; $3 = 1 \times 2 + 1$. On "remonte" ces égalités : $1 = 3 - 1 \times 2 = 3 - (5 - 1 \times 3) = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 2 \times (13 - 2 \times 5) - 1 \times 5 = 2 \times 13 - 5 \times 5$. Et $(-5, 2)$ est solution.

23.7 b) D'après le a) : $5 \times (-5) + 2 \times 13 = 1$ d'où $5 \times (-5) \equiv 1 \pmod{13}$. Ainsi $\mathrm{inv}_{13}(5) \equiv 8 \equiv -5 \pmod{13}$.

23.7 c) $5x + 4 \equiv 7 \pmod{13} \iff 5x \equiv 3 \pmod{13}$. On en déduit que $8 \times 5x \equiv 8 \times 3 \equiv 24 \equiv 11 \pmod{13}$ et, puisque 8 est l'inverse de 5 modulo 13, que $x \equiv 11 \pmod{13}$. Réciproquement, on vérifie que tous les entiers congrus à 11 modulo 13 sont solution de l'équation. Son ensemble de solutions est donc $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 11 \pmod{13}\}$.

23.8 L'algorithme d'Euclide pour 19 et 6 se résume à $19 = 3 \times 6 + 1$ et $6 = 6 \times 1 + 0$. Ceci donne directement une solution particulière de (E) : $(1, 3)$. Si (x, y) est solution de (E) alors $19x - 6y = 19 \times 1 - 6 \times 3$ et $19(x - 1) = 6(y - 3)$. $19 \wedge 6 = 1$ et 19 divise $6(y - 3)$, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $y - 3$. Ainsi $\exists k \in \mathbb{Z}, y = 19k + 3$. On en déduit que $19(x - 1) = 6 \times 19k$ et finalement que $x = 6k + 1$. On a prouvé que si (x, y) est solution de (E) alors $\exists k \in \mathbb{Z}, (x, y) = (6k + 1, 19k + 3)$. Réciproquement, un couple de cette forme vérifie $19(6k + 1) - 6(19k + 3) = 19 - 18 = 1$ et est bien solution de (E). D'où l'ensemble des solutions de l'équation : $S = \{(6k + 1, 19k + 3) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{cases} (x, y) \in S \\ 1999 \leqslant x \leqslant 2023 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) = (6k + 1, 19k + 3) \\ 1999 \leqslant 6k + 1 \leqslant 2023 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) = (6k + 1, 19k + 3) \\ 333 \leqslant k \leqslant 337 \end{cases}.$$

Il y a $N = 337 - 333 + 1 = 5$ entiers entre 333 et 337 inclus.

23.8 $k \mapsto 19k + 3$ est une fonction croissante de k, le plus grand y est donc atteint lorsque $k = 337$. D'où $(x_0, y_0) = (2023, 6406)$.

23.9 a) 2 022 est pair et divisible par 3 et $2\,022 = 2 \times 3 \times 337$. Puisque $\sqrt{337} < 19$ il faut tester la divisibilité de cet entier par tous les premiers inférieurs ou égaux à 17. 337 n'est pas divisible par 5 et on obtient successivement $337 \equiv 1 \pmod{7}$, $337 \equiv 7 \pmod{11}$, $337 \equiv 12 \pmod{13}$ et $337 \equiv 14 \pmod{17}$. 337 est donc premier.

23.9 b) En appliquant les critères, on établit que 2 023 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. La division euclidienne de 2023 par 7 s'écrit $2\,023 = 7 \times 289$. Si on ne reconnaissait pas le carré de 17, il fallait tester la divisibilité par 11 (évidemment négatif), 13 et 17 pour obtenir la décomposition $2\,023 = 7 \times 17^2$.

23.9 c) On a $\sqrt{2\,021} < 45$: il suffit donc de tester la divisibilité par tous les premiers jusqu'à 43. 2 021 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. On obtient (en posant les divisions ?) un résultat négatif pour le test de divisibilité par tous les premiers compris entre 7 et 41. Par contre 43 divise 2 021 et le quotient vaut 47. Enfin, on a $2\,021 = 43 \times 47$, les deux facteurs étant premiers.

23.9 d) On a $\sqrt{2\,027} \approx 45$. Il faut donc tester la divisibilité par tous les premiers jusqu'à 43. C'est le bon moment pour programmer une fonction en Python qui teste la divisibilité de son argument par tous les entiers impairs compris entre 3 et sa racine carrée. Le test est ici systématiquement négatif, 2 027 est donc premier.

23.10 a) On écrit $477 = q \times n + 8$ avec $0 \leqslant 8 < n$. D'où $q \times n = 469$. n est donc un diviseur de 469 strictement supérieur à 8. Puisque la décomposition en facteurs premiers de 469 est $469 = 7 \times 67$, on a nécessairement $n = 67$.

23.10 b) Puisque $469 = 7 \times 67$, on a nécessairement $q = 7$.

23.11 a) D'après le théorème de Fermat, puisque 3 est premier à la fois avec 5 et 7, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ et $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. On en déduit, d'une part, que $3^{24} = (3^4)^6 \equiv 1^6 \equiv 1 \pmod 5$ et, de l'autre, que $3^{24} = (3^6)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod 7$. C'est un corollaire connu du théorème de Gauss (à démontrer en exercice !) que puisque $3^{24} - 1$ est divisible par 5 et 7, deux entiers premiers entre eux, alors $3^{24} - 1$ est divisible par $5 \times 7 = 35$. D'où $3^{24} \equiv 1 \pmod{35}$

23.11 b) On déduit immédiatement du a) que $3^{72} \equiv (3^{24})^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{35}$.

23.11 c) Puisque $2 \wedge 5 = 2 \wedge 7 = 1$, on établit comme aux a) et b) que $2^{72} \equiv 1 \pmod{35}$. D'où $6^{72} = (2 \times 3)^{72} = 2^{72} \times 3^{72} \equiv 1 \times 1 \pmod{35}$. Enfin, $6^{75} = 6^{72} \times 6^3 \equiv 1 \times 6^3 \equiv 6 \pmod{35}$.

23.11 d) En procédant comme aux a) et b) avec $5^{6\times 10+1}$ modulo 7×11, on obtient que $5^{61} \equiv 5 \pmod{77}$.

23.11 e) Idem avec $(7 \times 11)^{10\times 12+2} \pmod{11 \times 13}$: $77^{61} \equiv 77^2 \equiv 66 \pmod{77}$.

23.11 f) Idem pour $(5 \times 7 \times 11)^{12\times 16\times 18} \pmod{13 \times 17 \times 19}$. On obtient pour reste 1.

Fiche n° 24. Polynômes

Réponses

24.1 a) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 + 2X + 1 \\ R = 2 \end{array}}$

24.1 b) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 - 4X + 7 \\ R = -3X - 8 \end{array}}$

24.1 c) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 - 1 \\ R = -X^2 + X + 1 \end{array}}$

24.1 d) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = 13X + \dfrac{25}{2} \\ R = \dfrac{1}{2}(29X^2 - 5X - 23) \end{array}}$

24.2 a) .... $\boxed{R = 1}$

24.2 b) .... $\boxed{R = 0}$

24.2 c) .... $\boxed{R = -2nX + 2n - 1}$

24.2 d) .... $\boxed{R = X^2 + X - 1}$

24.3 a) .... $\boxed{R = 2X - 3}$

24.3 b) .... $\boxed{R = -2X^3 - 3X^2 + 1}$

24.3 c) .... $\boxed{R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5}$

24.3 d) .... $\boxed{R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1}$

24.4 a) .... $\boxed{R = -36X + 64}$

24.4 b) .... $\boxed{64 - 36\mathrm{i}}$

24.5 a) .... $\boxed{R = -108X - 110}$

24.5 b) .... $\boxed{-110 - 108\sqrt{2}}$

24.6 a) .... $\boxed{116 - 92\sqrt{2}}$

24.6 b) .... $\boxed{48 - 206\mathrm{i}}$

Corrigés

24.1 a)

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^3 & + & X^2 & - & X & + & 1 & X - 1 \\
\cline{8-8}
-(X^3 & - & X^2) & & & & & X^2 + 2X + 1 \\
\cline{1-3}
 & & 2X^2 & - & X & + & 1 & \\
 & & -(2X^2 & - & 2X) & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & X & + & 1 & \\
 & & & & -(X & - & 1) & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 2 &
\end{array}$$

Ainsi, $Q = X^2 + 2X + 1$ et $R = 2$.

24.2 a) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$X^n = Q \times (X - 1) + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 1.$$

Ainsi, R est un polynôme constant. On évalue la relation précédente en 1. On obtient alors $1^n = Q(1) \times (1 - 1) + R(1)$. Donc, $R = 1$.

24.2 b) On constate que $X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n} = X^{3n} \times (X^2 + X + 1)$. Ainsi, $X^2 + X + 1 | X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$. Donc, $R = 0$.

24.2 c) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$(*) \quad (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2 = Q \times (X - 2)^2 + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 2.$$

Ainsi, R est de la forme $R = aX + b$. On évalue la relation $(*)$ en 2. On obtient alors

$$(2 - 3)^{2n} + (2 - 2)^n - 2 = Q(2) \times (2 - 2)^2 + R(2).$$

Donc, $-1 = 2a + b$. On dérive la relation $(*)$. On obtient alors

$$2n(X - 3)^{2n-1} + n(X - 2)^{n-1} = Q' \times (X - 2)^2 + Q \times 2(X - 2) + R'$$

On évalue cette dernière relation en 2. On obtient ainsi

$$2n(2-3)^{2n-1} + n(2-2)^{n-1} = Q'(2) \times (2-2)^2 + Q(2) \times 2(2-2) + R'(2).$$

Donc, $-2n = a$. On en déduit que $a = -2n$ puis que $b = -1 - 2a = 2n - 1$. Ainsi, $R = -2nX + 2n - 1$.

24.2 d) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$(*) \quad X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = Q \times (X^3 - 2X + 1) + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 3.$$

Ainsi, R est de la forme $R = a(X^2 + bX + c)$. On constate que $X^3 - 2X + 1$ s'annule en 1. Ainsi, $X - 1$ divise $X^3 - 2X + 1$. Par division euclidienne, on obtient $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$. On constate également que $X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = X^n \times (X^2 + X - 1)$. Donc, $(*)$ devient $(X^2 + X - 1) \times (X^n - Q \times (X-1)) = R$. Ainsi, $X^2 + X - 1 | R$. Or, $deg(R) \leqslant 2$. Donc, $R = a(X^2 + X - 1)$. On évalue $(*)$ en 1. On obtient $a = 1$. Donc, $R = X^2 + X - 1$.

24.3 a) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici, $P = A + B = X^5 + X^4 + 2X - 3 = X^4(X+1) + 2X - 3$. Ainsi, $R = 2X - 3$.

24.3 b) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici, $P = A \times B = Q \times X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 1$. Ainsi, $R = -2X^3 - 3X^2 + 1$.

24.3 c) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici,

$$P = A \circ B = ((X-2)^2)^2 - 3(X-2)^2 + 1 = (X-2)^4 - 3(X-2)^2 + 1 = Q \times X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 20X + 5.$$

Ainsi, $R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5$.

24.3 d) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici,

$$P = A \circ B = 2(X^3 + X^2 - 2X + 1)^3 - 3(X^3 + X^2 - 2X + 1)^2 - (X^3 + X^2 - 2X + 1) + 1 = Q \times X^4 - 29X^3 + 11X^2 + 2X - 1.$$

Ainsi, $R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1$.

24.4 a) On trouve $Q = X^4 - 2X^3 - 9X^2 - 20X - 44$ et $R = -36X + 64$.

24.4 b) On a $P = Q \times (X^2 + 1) + R$. On évalue en i. Ainsi, $P(\mathrm{i}) = Q(\mathrm{i}) \times (\mathrm{i}^2 + 1) + R(\mathrm{i})$. Donc $P(\mathrm{i}) = R(\mathrm{i}) = 64 - 36\mathrm{i}$.

24.5 a) On trouve $Q = X^4 - 2X^3 - 6X^2 - 26X - 65$ et $R = -108X - 110$.

24.5 b) On a $P = Q \times (X^2 - 2) + R$. On évalue en $\sqrt{2}$. Ainsi, $P(\sqrt{2}) = Q(\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}^2 - 2) + R(\sqrt{2})$. Donc, $P(\sqrt{2}) = R(\sqrt{2}) = -110 - 108\sqrt{2}$.

24.6 a) On commence par chercher un polynôme simple ayant $\sqrt{2} - 1$ pour racine. Posons $X = \sqrt{2} - 1$. Ainsi, $X^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$. Or, $\sqrt{2} = X + 1$. Donc, $X^2 = 3 - 2(X+1) = -2X + 1$. Ainsi, $\sqrt{2} - 1$ est racine de $X^2 + 2X - 1$. On effectue ensuite la division euclidienne de P par $X^2 + 2X - 1$. On trouve $Q = X^4 - 4X^3 + X^2 - 28X + 4$ et $R = -92X + 24$. Donc, $P = Q \times (X^2 + 2X - 1) + R$. On évalue enfin en $\sqrt{2} - 1$. On obtient $P(\sqrt{2}-1) = Q(\sqrt{2}-1) \times ((\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) - 1) + R(\sqrt{2}-1)$. Donc, $P(\sqrt{2}-1) = R(\sqrt{2}-1) = 116 - 92\sqrt{2}$.

24.6 b) On commence par chercher un polynôme simple ayant $1 + \mathrm{i}$ pour racine. Posons $X = 1 + \mathrm{i}$. Ainsi, $X^2 = 1 + 2\mathrm{i} + (\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$. Or, $\mathrm{i} = X - 1$. Donc, $X^2 = 2(X-1)$. Ainsi, $\mathrm{i} + 1$ est racine de $X^2 - 2X + 2$. On effectue ensuite la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 2$. On trouve $Q = X^4 - 10X^2 - 42X - 117$ et $R = -206X + 254$. Donc, $P = Q \times (X^2 - 2X + 1) + R$. On évalue enfin en $\mathrm{i}+1$. On obtient $P(\mathrm{i}+1) = Q(\mathrm{i}+1) \times ((\mathrm{i}+1)^2 - 2(\mathrm{i}+1) + 2) + R(\mathrm{i}+1)$. Donc, $P(\mathrm{i}+1) = R(\mathrm{i}+1) = 48 - 206\mathrm{i}$.

Fiche n° 25. Décomposition en éléments simples

Réponses

25.1 a) .... $\boxed{X-3-\frac{1}{X}+\frac{1}{X+1}+\frac{7}{X+2}}$

25.1 b) .... $\boxed{1-\frac{2}{X}+\frac{1}{2(X+1)}+\frac{3}{2(X-1)}}$

25.1 c) .... $\boxed{1+\frac{\pi}{2(X-\pi)}-\frac{\pi}{2(X+\pi)}}$

25.2 a) .... $\boxed{\frac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\frac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}}$

25.2 b) .... $\boxed{\frac{3}{2(X-1)}-\frac{1+i}{4(X-i)}-\frac{1-i}{4(X+i)}}$

25.2 c) .. $\boxed{1-\frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}-\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}}$

25.3 a) ..... $\boxed{\frac{-3}{X-2}+\frac{1}{X-3}+\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}}$

25.3 b) .. $\boxed{\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}}$

25.3 c) .... $\boxed{\frac{1}{\pi^2X}-\frac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\frac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}}$

25.3 d) ..... $\boxed{\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}}$

25.4 a) ... $\boxed{\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2(X-1)}-\frac{1+3i}{4(X-i)}-\frac{1-3i}{4(X+i)}}$

25.4 b) . $\boxed{\frac{1}{2X}+\frac{5}{6(X+2)}+\frac{2}{3(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}.}$

25.5 a) .... $\boxed{\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4}}$

25.5 b) .... $\boxed{-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{3}}$

25.6 a) .... $\boxed{\frac{2}{X+1}+\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{1-2X}{X^2+1}}$

25.6 b) ...... $\boxed{\frac{1}{2(X-1)}-\frac{3}{2(X+1)}+\frac{X-1}{X^2+X+1}}$

25.7 a) .... $\boxed{1-2\ln(3)}$

25.7 b) .... $\boxed{-\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{2}{3}\ln(2)}$

25.7 c) .... $\boxed{\frac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)}$

25.7 d) .... $\boxed{\frac{1}{18}-\frac{1}{9}\ln(5)+\frac{2}{9}\ln(2)}$

25.7 e) .... $\boxed{\frac{\pi}{8}}$

25.7 f) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(3)}$

25.8 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|}$

25.8 b) .... $\boxed{x\mapsto\frac{1}{4(1-2x)^2}}$

25.8 c) .... $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$

25.8 d) .... $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

25.8 e) .... $\boxed{2}$

25.8 f) . $\boxed{\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{16}{3}\ln|x-2|}$

25.8 g) $\boxed{x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$

25.8 h) .... $\boxed{x\mapsto\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$

Corrigés

25.1 a) Pour commencer, effectuons la division euclidienne de X^4-2 par $X(X+1)(X+2)=X^3+3X^2+2X$: on trouve $X^4-2=(X^3+3X^2+2X)(X-3)+7X^2+6X-2$. Ainsi, on a

$$\frac{X^4}{X(X+1)(X+2)}=X-3+\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}.$$

On écrit ensuite la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}.$$

Pour calculer a, on multiplie la fraction par X, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en 0 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times X = \frac{7X^2+6X-2}{(X+1)(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en 0, donne } a = \frac{-2}{2} = -1.$$

Pour calculer b, on multiplie la fraction par $X+1$, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en -1 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+1) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en } -1, \text{ donne } b = \frac{7-6-2}{(-1)(-1+2)} = 1.$$

Enfin, pour c,

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+2) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)}, \text{ ce qui, évalué en } -2, \text{ donne } c = \frac{28-12-2}{(-2)(-2+1)} = \frac{14}{2} = 7.$$

D'où

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2},$$

donc

$$\frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)} = X - 3 - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2}.$$

25.3 a) Pour cette décomposition en éléments simples, pas de partie entière. On écrit la décomposition théorique :

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X-3}.$$

Par les méthodes du premier exercice, on détermine facilement $c=-3$ et $d=1$. De même, en multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1, on obtient $b=1$. Ensuite, en évaluant en 0, on obtient

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{-1} + b + \frac{c}{-2} + \frac{d}{-3},$$

donc $a = 1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 2$. Ainsi,

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{-3}{X-2} + \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

25.4 a) Il suffit de remarquer que $X^4-1=(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ et de se ramener à la méthode des pôles simples vue précédemment !

25.4 b) Il faut remarquer que $X^4-3X^2+2X=(X-1)^2(X+2)X$, puis utiliser les méthodes des pôles multiples !

25.5 a) Si l'on considère la fraction rationnelle $\frac{1}{(X-1)X(X+1)}$, alors

$$\frac{1}{(X-1)X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2(X-1)}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(2-1)}\right) \text{ par télescopage} \qquad = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

25.5 b) On remarque que

$$\frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right).$$

Par télescopage, on obtient que cette somme vaut $-\dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3}$.

25.6 a) Déjà, il n'y pas de partie entière. Ensuite, la forme de la décomposition en éléments simples est

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en -1, on obtient $b=1$.
En évaluant en 0, on obtient

$$4 = a+b+d,$$

donc $a+d=3$.
En multipliant par X, en évaluant en $x \in \mathbb{R}$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$0 = a+c,$$

donc $c=-a$.
Enfin, en évaluant en 1, on obtient

$$\frac{6}{8} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c+d}{2},$$

donc

$$3 = 2a+b+2c+2d,$$

soit, comme $a+c=0$, et $b=1$, on en déduit que $2d = 3-1 = 2$, donc $d=1$.
Donc $a=2$, donc $c=-2$. Donc

$$\frac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1-2X}{X^2+1}.$$

25.7 a) On effectue la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X+1)}$:

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)} = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \Big[-\ln(x+1) + \ln(1-x)\Big]_{-1/2}^{1/2} \\ &= 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 2\ln(3).\end{aligned}$$

25.7 e) On remarque que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{8}.$$

25.7 f) On effectue la décomposition en éléments simples $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$ de $\dfrac{X}{X^4-1}$.

On a $X^4-1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Donc, on écrit

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Par la méthode déjà décrite, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$. En multipliant par x et en faisant $x \to +\infty$, $0 = a+b+c$, donc $c = -\dfrac{1}{2}$.

Enfin, en évaluant en 0, $-a+b+d=0$ donc $d=0$. Donc

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)} = \frac{X}{2(X^2-1)} - \frac{X}{2(X^2+1)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_2^3 \\
&= \frac{1}{4}(\ln(8) - \ln(10) - \ln(3) + \ln(5)) \\
&= \frac{1}{4}(3\ln(2) - \ln(2) - \ln(5) - \ln(3) + \ln(5)) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(3)
\end{aligned}$$

25.8 a) On écrit que, $\dfrac{1}{X^2-1} = \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{2(X+1)}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|.$$

25.8 c) On écrit que, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

de primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

25.8 d) L'idée pour primitiver cet élément simple est d'utiliser une forme canonique afin de se ramener à arctan :

$$\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{4}{3}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est $x \longmapsto \dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

25.8 e) L'idée est de faire apparaître $\dfrac{u'}{u}$:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3}.$$

Or, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|$. De plus,

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

de primitive $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$. Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+2x+3}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

25.8 f) La décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}$ est

$$\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)} = X+2+\frac{1}{6(X+1)} - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{16}{3(X-2)},$$

donc $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{1}{6}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + \dfrac{16}{3}\ln|x-2|$.

Fiche n° 26. Calcul matriciel

Réponses

26.1 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 3 & 3 & 4\\ 9 & -7 & 3\end{pmatrix}}$

26.1 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix}-2 & -6 & -5\\ 15 & -1 & 11\\ 18 & -26 & -1\end{pmatrix}}$

26.1 c) .... $\boxed{17 \text{ (matrice } 1\times 1)}$

26.1 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 2 & 14 & -4\\ -1 & -7 & 2\end{pmatrix}}$

26.1 e) .... $\boxed{\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}}$

26.1 f) .... $\boxed{\begin{pmatrix}-5 & 15 & 3\end{pmatrix}}$

26.1 g) .... $\boxed{\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}}$

26.1 h) .... $\boxed{\begin{pmatrix}5 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}}$

26.1 i) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 7 & 49 & -14\\ -2 & -14 & 4\end{pmatrix}}$

26.2 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

26.2 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

26.2 c) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

26.2 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix}}$

26.2 e) .... $\boxed{\begin{pmatrix}8 & 19\\ 0 & 27\end{pmatrix}}$

26.2 f) .... $\boxed{\begin{pmatrix}2^k & 3^k-2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}}$

26.2 g) .... $\boxed{\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & -\sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\end{pmatrix}}$

26.2 h) .... $\boxed{\begin{pmatrix}\cos(3\theta) & -\sin(3\theta)\\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta)\end{pmatrix}}$

26.2 i) .... $\boxed{\begin{pmatrix}\cos(k\theta) & -\sin(k\theta)\\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta)\end{pmatrix}}$

26.2 j) .... $\boxed{\begin{pmatrix}n & \cdots & n\\ \vdots & (n) & \vdots\\ n & \cdots & n\end{pmatrix}}$

26.2 k) .... $\boxed{\begin{pmatrix}n^2 & \cdots & n^2\\ \vdots & (n^2) & \vdots\\ n^2 & \cdots & n^2\end{pmatrix}}$

26.2 l) .... $\boxed{n^{k-1}D}$

26.3 a) .... $\boxed{2\times 3^{j-i}\times 5^{i-1}}$

26.3 b) .... $\boxed{2^{i+1}3^{j-i}(2^n-1)}$

26.3 c) .... $\boxed{2\times 3^{i+j}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$

26.3 d) .... $\boxed{\binom{i-1}{j}+\binom{i-1}{j-2}}$

26.4 a) .... $\boxed{2^{i-j}\binom{i-1}{j-1}}$

26.4 b) .... $\boxed{\begin{array}{c}(1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1}+\delta_{i,j})\\ +(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j-1})\end{array}}$

26.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2(\pi-e)}\begin{pmatrix}2 & -e\\ -2 & \pi\end{pmatrix}}$

26.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1-2\mathrm{i}\\ 1 & -1+\mathrm{i}\end{pmatrix}}$

26.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ -6 & -2 & 2\end{pmatrix}}$

26.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}}$

26.5 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -2\\ -16 & -6 & 7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}}$

26.5 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}}$

26.5 g) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

26.5 h) .... $\boxed{\text{Non inversible !}}$

26.5 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

26.6 a) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$

26.6 c) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

26.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme $(1, 2)$ est égal à k.

26.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

26.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

26.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2, $4 + 5 = 9$, pour A^3, $8 + 19 = 27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

26.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

26.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

26.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

26.2 l) La conjecture est alors évidente.

26.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned}
[A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\
&= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}
\end{aligned}$$

26.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

26.3 c) On calcule :

$$[B^\top \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

26.3 d) On calcule

$$[A \times C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) = \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$$

26.4 a) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leqslant i$. Alors

$$\begin{aligned}
[A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\
&= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}.
\end{aligned}$$

26.4 b) Pour vérifier ses calculs, il est conseillé de regarder des exemples !

$$n=4\ :\ \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\1&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},\ n=5\ :\ \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&1&0\\1&0&2&0&1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}[C^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\delta_{i,k+1}+\delta_{i,k-1})(\delta_{k,j+1}+\delta_{k,j-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k+1}\delta_{k,j+1}+\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k+1}\delta_{k,j-1}+\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k-1}\delta_{k,j+1}+\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k-1}\delta_{k,j-1}.\end{aligned}$$

Si $(i,j)\notin\{1,n\}^2$. Donc

$$[C^2]_{ij} = \delta_{i-1,j+1}+2\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j-1}.$$

Ceci est confirmé par la structure « tridiagonale espacée » .
Sinon, pour (i,j) quelconque dans $[\![1,n]\!]^2$, on trouve

$$[C^2]_{ij} = (1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1}+\delta_{i,j})+(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j-1}),$$

car $\delta_{1,k+1}=0=\delta_{n,k-1}$ pour tout k entre 1 et n.

26.5 a) On remarque que $2\pi-2e=2(\pi-e)\neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2(\pi-e)}\begin{pmatrix}2&-e\\-2&\pi\end{pmatrix}$.

26.5 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\3&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&2&2&-3&0&1\end{array}\right)L_3\leftarrow L_3-3L_1$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1/2&0&1/2&0\\0&2&2&-3&0&1\end{array}\right)L_2\leftarrow L_2/2$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1/2&1&1/2&0\\0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1+L_2\\ \\ L_3\leftarrow L_3-2L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5/2&1&-1/2\\0&1&0&3/2&1&-1/2\\0&0&1&-3&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1-1/2L_3\\ L_2\leftarrow L_2-1/2L_3\\ \ \end{array}$$

Donc B est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5&2&-1\\3&2&-1\\-6&-2&2\end{pmatrix}$

26.5 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C=\pi\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0&4&0\\0&-2&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0&4&0\\0&-2&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$

26.5 h) On remarque que $L_3=L_1+2L_2+2L_4$.

26.6 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{1-\lambda} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda) L_3 \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-\lambda} L_2 \\ \end{array}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Fiche n° 27. Algèbre linéaire

Réponses

27.1 a) .... $\boxed{(3,-1)}$

27.1 b) .... $\boxed{(-1,3)}$

27.1 c) .... $\boxed{(9/11,2/11)}$

27.1 d) .... $\boxed{(-2,4/5,11/5)}$

27.1 e) .... $\boxed{(-1,1/2,1/2)}$

27.1 f) .... $\boxed{(0,2,4,1)}$

27.1 g) .... $\boxed{(1/2,-\sqrt{3}/2)}$

27.2 a) .... $\boxed{2}$

27.2 b) .... $\boxed{1}$

27.2 c) .... $\boxed{1}$

27.2 d) .... $\boxed{2}$

27.2 e) .... $\boxed{2}$

27.2 f) .... $\boxed{1}$

27.3 a) .... $\boxed{2}$

27.3 b) .... $\boxed{2}$

27.3 c) .... $\boxed{3}$

27.3 d) .... $\boxed{4}$

27.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -5\end{pmatrix}}$

27.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$

27.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-19 & -43\\ 9 & 21\end{pmatrix}}$

27.4 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}$

27.4 e) .... $\boxed{\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

27.5 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 4 & 15 & 0\end{pmatrix}}$

27.5 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$

Corrigés

27.1 a) Notons $u=\lambda(0,1)+\mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases}-\mu & =1\\ \lambda+2\mu & =1\end{cases}$. Ainsi, $u=3(0,1)-(-1,2)$.

27.1 b) Notons $u=\lambda(0,1)+\mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases}-\mu & =1\\ \lambda+2\mu & =1\end{cases}$. Ainsi, $u=-(-1,2)+3(0,1)$.

27.1 c) Notons $u=\lambda(1,2)+\mu(12,13)$. Alors,

$$\begin{cases}\lambda+12\mu & =3\\ 2\lambda+13\mu & =4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+12\mu & =3\\ -11\mu & =-2\end{cases}$$

Ainsi, $u=\dfrac{9}{11}(1,2)+\dfrac{2}{11}(12,13)$.

27.1 d) On note $u=\lambda(0,1,3)+\mu(4,5,6)+\nu(-1,0,1)$. Alors,

$$\begin{cases}4\mu-\nu & =1\\ \lambda+5\mu & =2\\ 3\lambda+6\mu+\nu & =1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+5\mu & =2\\ 4\mu-\nu & =1\\ -9\mu+\nu & =-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+5\mu & =2\\ -\nu+4\mu & =1\\ -5\mu & =-4\end{cases}$$

Ainsi, $u=-2(0,1,3)+\dfrac{4}{5}(4,5,6)+\dfrac{11}{5}(-1,0,1)$.

27.1 e) Notons $u=\lambda(1,0,1)+\mu(1,1,1)+\nu(-1,-1,3)$. Alors,

$$\begin{cases}\lambda+\mu-\nu & =-1\\ \mu-\nu & =0\\ \lambda+\mu+3\nu & =1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu-\nu & =-1\\ \mu-\nu & =0\\ 4\nu & =2\end{cases}$$

Ainsi, $u=-(1,0,1)+\dfrac{1}{2}(1,1,1)+\dfrac{1}{2}(-1,-1,3)$.

27.1 f) Notons $u = \lambda + \mu X + \nu X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2)$.

En évaluant en 0, $\lambda = 0$.

En évaluant en 1, $\mu = 2$.

En évaluant en 2, $2\mu + 2\nu = 8 + 4 = 12$ soit $\nu = 4$.

En identifiant les coefficients de X^3 dans chacun des membres, $1 = \delta$.

Finalement, $u = 2X + 4X(X-1) + X(X-1)(X-2)$.

27.1 g) En utilisant les formules d'addition, $u(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$.

27.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

27.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

27.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

27.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

27.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

27.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

27.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effecutant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

27.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

27.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

27.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

27.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

27.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

27.4 c) $f(1,2) = (4,-1)$ et $f(3,4) = (10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1,2) = -\frac{19}{2}(1,2) + \frac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4) = -\frac{43}{2}(1,2) + \frac{21}{2}(3,4)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$.

27.4 d) Comme $f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,0,1) = 0 \cdot (1,0,0) - (0,1,0) + (1,1,1)$ et $f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

27.4 e) Comme $f(1) = 1$, $f(X) = X + 2$ et $f(X^2) = (X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27.5 a) Comme $f(0,1,3) = (4,-1) = -1(0,1) + 4(1,0)$, $f(4,5,6) = (15,-1) = -1(0,1) + 15(1,0)$ et $f(-1,0,1) = (0,-1) = -(0,1) + 0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

27.5 b) Comme $f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, $f(X) = 1 = 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$ et $f(X^2) = 2X = 0 \cdot 1 + 2X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Fiche n° 28. Équations différentielles

Réponses

28.1 a) .... $\boxed{x \mapsto 56e^{12x}}$

28.1 b) .... $\boxed{x \mapsto 6e^{x} - 1}$

28.1 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}}$

28.1 d) .... $\boxed{x \mapsto 9e^{2x} - 6}$

28.2 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{(6-x)/5}}$

28.2 b) .... $\boxed{x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}}$

28.2 c) .... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

28.2 d) .... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}}$

28.3 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{2x}}$

28.3 b) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

28.3 c) .... $\boxed{x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}}$

28.3 d) .... $\boxed{x \mapsto (2 - 3i)e^{x} + (3i - 1)e^{2x}}$

28.4 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

28.4 b) .... $\boxed{x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}}$

28.4 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}}$

28.4 d) .... $\boxed{x \mapsto (2 - x)e^{x}}$

28.4 e) .... $\boxed{x \mapsto (2 - x)e^{2-2x}}$

28.5 a) .... $\boxed{x \mapsto \cos x + 2\sin x}$

28.5 b) .... $\boxed{x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)}$

28.5 c) .... $\boxed{x \mapsto e^{-x}\sin(x)}$

28.5 d) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}\left(\dfrac{-1+i}{2}e^{2ix} + \dfrac{1+i}{2}e^{-2ix}\right)}$

Corrigés

28.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{12x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56e^{12x}$.

....

28.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6e^{x} - 1$.

....

28.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}$.

....

28.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9e^{2x} - 6$.

....

28.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-x/5}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = e = \lambda e^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto e^{(6-x)/5}$.

....

28.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \frac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

28.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\frac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$.

28.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\frac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \frac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \frac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \frac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \frac{2e}{\pi}$.

28.3 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

28.3 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

28.3 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$.

28.3 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3i$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 3i - 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - 3i)e^{x} + (3i - 1)e^{2x}$.

28.4 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

28.4 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2 - 1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

28.4 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+r-2=0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda+\mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda+\mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

28.4 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{x}$.

Alors, $y(0) = \lambda = 2$ et $y'(0) = \lambda + \mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2-x)e^{x}$.

28.4 e) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont la racine double est -2. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x}$.

Alors, $y(1) = (\lambda+\mu)e^{-2} = 1$ et $y'(1) = (-2\lambda + \mu - 2\mu)e^{-2} = -3$. Le système s'écrit $\lambda + \mu = e^2$ et $2\lambda + \mu = 3e^2$. Il se réduit en $\lambda + \mu = e^2$ et $\lambda = 2e^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2-x)e^{2-2x}$.

28.5 a) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = 2 = \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos x + 2\sin x$.

28.5 b) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda \cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = -1 = -\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

28.5 c) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1 - i$ et $-1 + i$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))$.

Alors, $y_0(0) = 0 = \lambda$ et $y_0'(0) = 1 = -\lambda + \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x}\sin(x)$.

28.5 d) L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -4 et ses racines sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^{x}\left(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}\right),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{x}\left(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}\right)$.

Alors, $y_0(0) = i = \lambda + \mu$ et $y_0'(0) = -i = (\lambda+\mu) + (2i\lambda - 2i\mu)$. Le système réduit s'écrit $\lambda + \mu = i$ et $4i\lambda = 2 - 2i$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}\left(\dfrac{-1+i}{2}e^{2ix} + \dfrac{1+i}{2}e^{-2ix}\right)$.

En utilisant les formules d'Euler, cette solution peut également s'écrire $y_0 : x \mapsto ie^{x}(\cos(2x) - \sin(2x))$.

Fiche n° 29. Séries numériques

Réponses

29.1 a).... $\boxed{\text{divergente}}$

29.1 b)............ $\boxed{2}$

29.1 c)...... $\boxed{\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}}$

29.1 d)....... $\boxed{\dfrac{1}{2\times 3^9}}$

29.2 a)............ $\boxed{\mathrm{e}}$

29.2 b)........ $\boxed{\mathrm{e}^2-3}$

29.2 c)........... $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$

29.3 a).......... $\boxed{\dfrac{\pi^2}{6}}$

29.3 b).... $\boxed{\text{divergente}}$

29.3 c).... $\boxed{\text{divergente}}$

29.3 d)...... $\boxed{\dfrac{7-49i}{35\sqrt{2}}}$

29.3 e)... $\boxed{\dfrac{-2-5\sqrt{2}i}{54}}$

29.4 a)............ $\boxed{1}$

29.4 b)........... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

29.4 c)......... $\boxed{\ln(2)}$

29.4 d)........... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

29.5 a).......... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

29.5 b)........ $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$

29.5 c).... $\boxed{\text{divergente}}$

29.5 d)............ $\boxed{4}$

29.6 a)............ $\boxed{2}$

29.6 b).......... $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

29.6 c)........... $\boxed{16}$

29.6 d)..... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

Corrigés

29.1 a) La série est géométrique de raison $2 \notin]-1,1[$, donc elle diverge.

29.1 b) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

29.1 c) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}.$$

29.1 d) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Donc,

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

Autre solution : avec le changement d'indice $j = k-10$, on a

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{j+10}} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^{10}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

29.2 a) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{1^k}{k!}$.

29.2 b) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{2^k}{k!}$, et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$, donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} = \mathrm{e}^2-3.$

29.2 c) On a $\dfrac{1}{2^k\times k!} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ et on reconnaît donc une série exponentielle.

29.3 a) Il s'agit d'une série de Riemann convergente, et vous savez peut-être que sa somme est $\frac{\pi^2}{6}$; en général, si $a > 1$, on ne connaît pas la valeur exacte de la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

29.3 b) Il s'agit d'une série de Riemann divergente.

29.3 c) La série harmonique diverge !

29.3 d) Il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{\mathrm{i}}{7}$ et $\left|\frac{\mathrm{i}}{7}\right| \in]-1,1[$, donc la série converge. De plus,

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}} = \frac{\mathrm{i}^3}{7^2} \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{7}\right)^{k-3} = \frac{\mathrm{i}^3}{7^2} \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{7}} = \frac{-\mathrm{i}}{49-7\mathrm{i}}.$$

Enfin, en multipliant par l'expression conjuguée, on trouve

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}} = \frac{-\mathrm{i}(49+7\mathrm{i})}{49^2+7^2} = \frac{1-7\mathrm{i}}{350}.$$

29.3 e) On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}$ qui est de module $\frac{1}{\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$. Ainsi, la série converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k} &= \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^4} \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{k-4} \\
&= \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^4} \frac{1}{1-\frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}-1}{\mathrm{i}\sqrt{2}} \\
&= \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

En développant, on obtient $(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^4 = -7-4\mathrm{i}\sqrt{2}$, donc $\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 = \frac{-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}}{81}$ et

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k} = \frac{-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}}{81} \times \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \frac{-2-5\mathrm{i}\sqrt{2}}{54}.$$

29.4 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

29.4 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + 1 - \frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

29.4 c) Soit $n \geqslant 2$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n} (2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-1)) = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

29.4 d) Soit $n \geqslant 0$ fixé. On remarque que pour tout k,

$$\arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right) = \arctan(k+2) - \arctan(k+1).$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+2) - \arctan(k+1)) = \arctan(n+2) - \arctan(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$.

29.5 a) On a $\dfrac{1}{2^{2k}} = \dfrac{1}{4^k}$, donc la série est géométrique de raison $\dfrac{1}{4} \in\ ]-1,1[$: elle converge. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} - \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12}$.

29.5 b) On a $\mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^k}$. Or la série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in\ ]-1,1[$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^k} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

Autre solution : le changement d'indice $j = k-1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-1})^j = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

29.5 c) La série diverge grossièrement.

29.5 d) On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in\ ]-1,1[$, donc convergente, dont la somme vaut

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

29.6 a) On a $k2^{-k} = \dfrac{1}{2}k\dfrac{1}{2^{k-1}}$; la série $\displaystyle\sum_k k\frac{1}{2^{k-1}}$ est une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in\ ]-1,1[$, et est donc convergente. Sa somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$.

29.6 b) La série converge comme somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in\ ]-1,1[$ et d'une série géométrique dérivée de même raison, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1)\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{11}{4}.$$

29.6 c) On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois, de raison $\dfrac{1}{2}$, convergente, de somme $\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16$.

29.6 d) On a affaire à une série géométrique dérivée deux fois.

Fiche n° 30. Structures euclidiennes

Réponses

30.1 a) .... $\boxed{4\ln 2 - 2}$

30.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{12}}$

30.1 c) .... $\boxed{2\sin(1) + \cos(1) - 1}$

30.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}(e^2 - 1)}$

30.2 a) .... $\boxed{11}$

30.2 b) .... $\boxed{10}$

30.2 c) .... $\boxed{0}$

30.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6\sqrt{5}}}$

30.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5\sqrt{3}}}$

30.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

30.4 a) .... $\boxed{(1, 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}))}$

30.4 b) .... $\boxed{(\sqrt{3}X, \sqrt{\frac{240}{43}}(X^2 - \frac{9}{4}X + 1))}$

30.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

30.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

30.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -7 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}}$

Corrigés

30.1 a) On calcule : $\langle f_1, f_6\rangle = \displaystyle\int_0^1 2\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on a le choix : première possibilité faire une intégration par parties, seconde possibilité utiliser une primitive connue de ln (sur $\mathbb{R}_+^*$) qui est $t \longmapsto t\ln t - t$ et on a alors besoin de faire un changement de variable. Si on applique la seconde technique, on trouve

$$\langle f_1, f_6\rangle = \int_0^1 2\ln(1+t) = 2\int_1^2 \ln(t) = 2\Big[t\ln t - t\Big]_1^2 = 4\ln 2 - 2.$$

....

30.1 b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^2(1+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 + t^3\,\mathrm{d}t.$

....

30.1 c) On calcule : $\displaystyle\int_0^1 \cos(t)(1+t)\,\mathrm{d}t$. Par intégration par parties, on a

$$\int_0^1 \cos(t)(1+t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2\sin(1) + \cos(1) - 1.$$

....

30.1 d) On calcule : $\displaystyle\int_0^1 e^t e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2t} = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$

....

30.2 a) On calcule $\mathrm{tr}(A^\top B) = 11$. On pouvait aussi faire la somme des produits des coefficients de A et de B, puisque

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ij}$$

si A et B sont deux matrices carrées de taille n.

....

30.2 b) $\mathrm{tr}(B^\top B) = 10$

....

30.2 c) Le calcul est inutile, il s'agit du produit scalaire entre une matrice symétrique et une matrice antisymétrique. Ces deux matrices sont orthogonales donc le produit scalaire est nul.

30.3 a) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(1,X)}(X^2)$ de X^2 sur $\mathrm{Vect}(1, X)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a + bX = p_{\mathrm{Vect}(1,X)}(X^2) \iff \begin{cases} \langle X^2 - (a + bX),\ 1\rangle = 0 \\ \langle X^2 - (a + bX),\ X\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1/6 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| X^2 - \left(X - \frac{1}{6}\right) \right\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$.

30.3 b) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(1,X^3)}(X)$ de X sur $\mathrm{Vect}(1, X^3)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a + bX^3 = p_{\mathrm{Vect}(1,X^3)}(X) \iff \begin{cases} \langle X - (a + bX^3),\ 1\rangle = 0 \\ \langle X - (a + bX^3),\ X^3\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4/15 \\ b = 14/15 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| X - \left(\frac{4}{15} + \frac{14}{15}X^3\right) \right\| = \frac{1}{5\sqrt{3}}$.

30.3 c) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(X,X^2)}(1 + X^2)$ de $1 + X^2$ sur $\mathrm{Vect}(X, X^2)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$aX + bX^2 = p_{\mathrm{Vect}(X,X^2)}(1 + X^2) \iff \begin{cases} \langle 1 + X^2 - (aX + bX^2),\ X\rangle = 0 \\ \langle 1 + X^2 - (aX + bX^2),\ X^2\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -7/3 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| 1 + X^2 - \left(4X - \frac{7}{3}X^2\right) \right\| = \frac{1}{3}$.

30.4 a) Appliquer le processus de Gram-Schmidt.

30.4 b) Appliquer le processus de Gram-Schmidt.

30.5 a) Une base orthonormale de $P^\perp$ est $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$. Donc la matrice dans la b.o.n $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $P^\perp$ est $AA^\top$ où A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (car u est une b.o.n de l'espace sur lequel on projette et $\mathcal{B}$ est une b.o.n de l'espace). Donc la matrice dans la b.o.n $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $P^\perp$ est $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice cherchée est $I_3 - M$.

30.5 b) Une base orthonormale de D est $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(i + 2k)$ donc la matrice de la projection orthogonale sur D dans la base $\mathcal{B}$ est $AA^\top$ où A est la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ *i.e.* $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

30.5 c) La symétrie σ de l'énoncé vérifie $\sigma = id - 2\pi$ où π est la projection orthogonale sur la droite dirigée par le vecteur $i + 3j - k$. Or la matrice P de π dans la base $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la matrice cherchée est $\mathrm{I}_3 - 2P$.

Fiche n° 31. Groupes symétriques

Réponses

31.1 a).. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}}$

31.1 b).. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&1&3&4\end{pmatrix}}$

31.1 c).. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&2&5&1\end{pmatrix}}$

31.1 d).. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}}$

31.1 e).. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&2&3\end{pmatrix}}$

31.1 f).. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}}$

31.2 a)................. $\boxed{(a\ b)}$

31.2 b)................ $\boxed{(c\ b\ a)}$

31.2 c)............ $\boxed{(7\ 2\ 5\ 3\ 1)}$

31.2 d)................ $\boxed{(a\ c\ b)}$

31.2 e).............. $\boxed{(2\ 1\ 5\ 4)}$

31.2 f)............ $\boxed{(1\ 2\ 7\ 5\ 3)}$

31.3 a) $\boxed{(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)}$

31.3 b).. $\boxed{(1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9)}$

31.3 c)....... $\boxed{(1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8)}$

31.3 d)............. $\boxed{(1\ 2)(3\ 4)}$

31.3 e).......... $\boxed{(1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)}$

31.4 a)........... $\boxed{(1\ 4\ 2)(5\ 6)}$

31.4 b)..................... $\boxed{\mathrm{id}}$

31.4 c)............ $\boxed{(1\ 2\ 6\ 5\ 3)}$

31.4 d)....... $\boxed{(1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)}$

31.5 a)................... $\boxed{-1}$

31.5 b)..................... $\boxed{1}$

31.5 c)..................... $\boxed{1}$

31.5 d)................... $\boxed{-1}$

31.5 e)................... $\boxed{-1}$

31.5 f)...................... $\boxed{1}$

31.6 a)................... $\boxed{-1}$

31.6 b)..................... $\boxed{1}$

31.6 c)..................... $\boxed{1}$

31.6 d)..................... $\boxed{1}$

Corrigés

31.1 a) Pour déterminer la permutation ρ^{-1}, il suffit de lire de bas en haut la matrice représentant la permutation ρ. Ainsi, la quatrième colonne donne $\rho^{-1}(1) = 4$, la première $\rho^{-1}(2) = 1$, *etc.* Au total $\rho^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}$.

31.1 b) On procède comme pour ρ^{-1} pour obtenir $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&1&3&4\end{pmatrix}$.

31.1 c) Par définition, $\sigma(1) = 4$ et $\sigma(4) = 6$, ainsi $\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \sigma(4) = 6$. On procède de même pour les autres images et au total $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&2&5&1\end{pmatrix}$.

31.1 d) Par définition, $\sigma(1) = 4$ et $\rho(4) = 1$, ainsi $\rho\sigma(1) = \rho(\sigma(1)) = \rho(4) = 1$. On procède de même pour les autres images et au total $\rho\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}$.

31.1 e) On procède comme pour $\rho\sigma$ pour obtenir $\sigma\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&2&3\end{pmatrix}$. Notons que $\rho\sigma \neq \sigma\rho$, ce qui n'est en rien surprenant.

31.1 f) D'après b), $\sigma^{-1}(1) = 2$ et, d'après e), $\sigma\rho(2) = 6$, ainsi $\sigma\rho\sigma^{-1}(1) = 6$. On procède de même pour les autres images et au total $\sigma\rho\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}$.

31.2 a) Les transpositions sont des involutions et ainsi leur propre inverse.

31.2 b) Pour inverser un cycle, il suffit de le parcourir dans l'autre sens. Ainsi $(a\ b\ c)^{-1} = (c\ b\ a)$.

31.2 c) On procède comme à la question précédente.

31.2 d) Notons $\sigma = (a\ b\ c)$. On a $\sigma(a) = b$ et $\sigma(b) = c$, d'où $\sigma^2(a) = c$. On obtient de même $\sigma^2(c) = b$ et $\sigma^2(b) = a$. Au total, $(a\ b\ c)^2 = (a\ c\ b)$.

Remarquons que $(a\ b\ c)^2 = (a\ b\ c)^{-1}$, ce qui était prévisible dans la mesure où le 3-cycle $(a\ b\ c)$ vérifie $(a\ b\ c)^3 = \mathrm{id}$.

31.2 e) Notons $\sigma = (2\ 4\ 5\ 1)$. On a $\sigma(2) = 4$, $\sigma(4) = 5$ et $\sigma(5) = 1$, ains $\sigma^3(2) = 1$. On obtient de la même façon $\sigma^3(1) = 5$, $\sigma^3(5) = 4$ et $\sigma^3(4) = 2$. Au total, $(2\ 4\ 5\ 1)^3 = (2\ 1\ 5\ 4)$.

On pourrait aussi remarquer que σ est un 4-cycle, ainsi $\sigma^3 = \sigma^{-1}$ et on a donc

$$(2\ 4\ 5\ 1)^3 = (2\ 4\ 5\ 1)^{-1} = (1\ 5\ 4\ 2) = (2\ 1\ 5\ 4).$$

31.2 f) Puisque $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)$ est un 5-cycle, on a $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42} = (1\ 5\ 2\ 3\ 7)^r$, avec r le reste de la division euclidienne de 42 par 5, à savoir 2. Ainsi $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42} = (1\ 5\ 2\ 3\ 7)^2 = (1\ 2\ 7\ 5\ 3)$.

31.3 a) Notons σ la permutation considérée et partons de l'élément 1. On a $\sigma(1) = 7$, $\sigma(7) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, d'où un premier cycle $(1\ 7\ 4)$. On procède de même à partir d'un élément de $\{1, \dots, 10\} \setminus \{1, 4, 7\}$, par exemple 2, pour lequel on a $\sigma(2) = 6$, $\sigma(6) = 8$, $\sigma(8) = 10$ et $\sigma(10) = 2$, d'où un second cycle $(2\ 6\ 8\ 10)$. On continue à partir d'un élément de $\{1, \dots, 10\} \setminus \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$, par exemple 3, pour lequel on a $\sigma(3) = 9$, $\sigma(9) = 5$ et $\sigma(5) = 3$, d'où un troisième cycle $(3\ 9\ 5)$. La réunion des supports de ces trois cycles étant $\{1, \dots, 10\}$, la décomposition est terminée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5).$$

Rappelons que

$$(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5) = (1\ 7\ 4)(3\ 9\ 5)(2\ 6\ 8\ 10) = (2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)(1\ 7\ 4) = \textit{etc.}$$

Bref, les cycles à supports disjoints commutent entre eux.

31.3 b) Notons σ la permutation considérée et procédons comme à la question précédente. On a $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 10$, $\sigma(10) = 6$, $\sigma(6) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, d'où un premier cycle $(1\ 3\ 10\ 6\ 4)$. Ensuite $\sigma(2) = 2$ et le cycle (2) est donc omis. On a enfin $\sigma(5) = 7$ et $\sigma(7) = 5$, d'où la transposition $(5\ 7)$, et $\sigma(8) = 9$ et $\sigma(9) = 8$, d'où la transposition $(8\ 9)$. En résumé

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9).$$

31.3 c) Notons $\rho = (1\ 3\ 5\ 2)$, $\sigma = (2\ 4\ 1\ 7)$ et $\tau = (5\ 8)$. On a $\rho\sigma\tau(1) = \rho\sigma(1) = \rho(7) = 7$ et $\rho\sigma\tau(7) = \rho\sigma(7) = \rho(2) = 1$, d'où une première transposition $(1\ 7)$. Par ailleurs, $\rho\sigma\tau(2) = \rho\sigma(2) = \rho(4) = 4$ et on obtient de même $\rho\sigma\tau(4) = 3$, $\rho\sigma\tau(3) = 5$, $\rho\sigma\tau(5) = 8$ et $\rho\sigma\tau(8) = 2$, d'où le cycle $(2\ 4\ 3\ 5\ 8)$. Enfin $\rho\sigma\tau(6) = 6$ et le cycle (6) est donc omis. En résumé

$$(1\ 3\ 5\ 2)(2\ 4\ 1\ 7)(5\ 8) = (1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8).$$

31.3 d) On procède comme à la question c.

31.3 e) On procède comme à la question c.

31.4 a) Commençons par décomposer la permutation en un produit de cycle à supports disjoints :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)(5\ 6).$$

Ainsi $\sigma^{47} = (1\ 2\ 4)^{47}(5\ 6)^{47} = (1\ 2\ 4)^2(5\ 6)^1 = (1\ 4\ 2)(5\ 6)$, dans la mesure où les permutations $(1\ 2\ 4)$ et $(5\ 6)$ commutent et sont respectivement un 3-cycle et un 2-cycle ($47 \equiv 2\,[3]$ et $47 \equiv 1\,[2]$).

31.4 b) On procède comme à la question précédente :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&4&3&1&5&2\end{pmatrix}^{168}=(1\ 6\ 5)^{168}(2\ 7)^{168}(3\ 4)^{168}=\mathrm{id}\circ\mathrm{id}\circ\mathrm{id}=\mathrm{id}.$$

31.4 c) On procède toujours de la même façon :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&5&2&4&1&3&7\end{pmatrix}^{168}=(1\ 6\ 3\ 2\ 5)^{168}=(1\ 6\ 3\ 2\ 5)^{3}=(1\ 2\ 6\ 5\ 3).$$

31.4 d) On procède toujours de la même façon :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&3&5&7&2&1&6\end{pmatrix}^{227}=(1\ 4\ 7\ 6)^{227}(2\ 3\ 5)^{227}=(1\ 4\ 7\ 6)^{3}(2\ 3\ 5)^{2}=(1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)$$

31.5 a) Puisque la signature est un morphisme de groupe, $\varepsilon((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6))=\varepsilon((1\ 2))\varepsilon((3\ 4))\varepsilon((5\ 6))=(-1)^3=-1$.

31.5 b) Rappelons que la signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$. Ainsi la signature du 5-cycle $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ est $(-1)^4=1$.

31.5 c) Puisque la signature est un morphisme de groupe à valeurs dans $\{\pm1\}$, une permutation et son inverse ont même signature, ainsi $\varepsilon\big((1\ 5\ 3\ 2\ 4)^{-1}\big)=\varepsilon((1\ 5\ 3\ 2\ 4))=1$, d'après la question précédente.

31.5 d) On a $\varepsilon((1\ 3\ 2\ 4))=(-1)^{4-1}=-1$, ainsi $\varepsilon\big((1\ 3\ 2\ 4)^{37}\big)=\varepsilon((1\ 3\ 2\ 4))^{37}=(-1)^{37}=-1$.

31.5 e) On a $\varepsilon\big((1\ 3)(2\ 6\ 7)^{-1}(4\ 7\ 3\ 1\ 2)\big)=\varepsilon((1\ 3))\varepsilon((2\ 6\ 7))\varepsilon((4\ 7\ 3\ 1\ 2))=-1\times(-1)^{3-1}\times(-1)^{5-1}=-1$.

31.5 f) On a $\varepsilon\big(((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2))^{64}\big)=(\varepsilon((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2)))^{64}=1$, puisque l'exposant 64 est pair.

31.6 a) On commence par décomposer la permutation en un produit de cycles à supports disjoints.

$$\varepsilon\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\7&6&9&1&3&8&4&10&5&2\end{pmatrix}\right)=\varepsilon((1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5))=(-1)^{3-1}(-1)^{4-1}(-1)^{3-1}=-1.$$

31.6 b) De la même façon,

$$\varepsilon\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&2&10&1&7&4&5&9&8&6\end{pmatrix}\right)=\varepsilon((1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9))=(-1)^{5-1}(-1)(-1)=1.$$

31.6 c) $\varepsilon\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&4&7&1&8&9&10&2&6&5\end{pmatrix}\right)=\varepsilon((1\ 3\ 7\ 10\ 5\ 8\ 2\ 4)(6\ 9))=(-1)^{8-1}(-1)=1.$

31.6 d) $\varepsilon\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\7&1&6&10&5&9&2&3&8&4\end{pmatrix}\right)=\varepsilon((1\ 7\ 2)(4\ 10)(3\ 6\ 9\ 8))=(-1)^{3-1}(-1)(-1)^{4-1}=1.$

Fiche n° 32. Déterminants

Réponses

32.1 a) $\boxed{-2a^2}$

32.1 b) $\boxed{6}$

32.1 c) $\boxed{-5+6\mathrm{i}}$

32.1 d) $\boxed{20}$

32.2 a) $\boxed{-2}$

32.2 b) $\boxed{9\ln(2)}$

32.2 c) $\boxed{227/336}$

32.2 d) $\boxed{3\,919}$

32.2 e) $\boxed{7\sqrt{2}+13}$

32.3 a) $\boxed{0}$

32.3 b) $\boxed{-40}$

32.3 c) $\boxed{0}$

32.4 a) $\boxed{-4}$

32.4 b) $\boxed{6\mathrm{i}-12}$

32.4 c) $\boxed{4/375}$

32.5 a) $\boxed{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

32.5 b) $\boxed{-6\ln^3(a)}$

32.5 c) $\boxed{(y-x)(z-y)(z-x)}$

32.5 d) $\boxed{0}$

Corrigés

32.1 a) Le déterminant vaut $-a^2-a^2=-2a^2$.

32.1 b) Le déterminant vaut $-(-2)\times 3=6$.

32.1 c) Le déterminant vaut $\mathrm{i}\times 5\mathrm{i}-(-2)\times 3=-5+6\mathrm{i}$.

32.1 d) La matrice est triangulaire inférieure donc son déterminant vaut $-4\times(-5)=20$.

32.2 a) Le déterminant vaut $\dfrac{1}{4}\times(3\times 9-5\times 7)=\dfrac{1}{4}\times(27-35)=-2$.

32.2 b) Le déterminant vaut $\ln(2)\times 3\times\ln(\mathrm{e})-(-2)\times 3\times\ln(2)=9\ln(2)$.

32.2 c) Le déterminant vaut $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{7}{8}\right)-\dfrac{5}{9}\times\left(-\dfrac{3}{7}\right)=\dfrac{227}{336}$.

32.2 d) Le déterminant vaut 3 919.

32.2 e) Le déterminant vaut $(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{8})-(2+\sqrt{8})(1-\sqrt{32})=7\sqrt{2}+13$.

32.3 a) Le déterminant vaut 0.

32.3 b) Deux permutations de colonnes, $C_2\leftrightarrow C_1$ puis $C_3\leftrightarrow C_2$, ramènent ce déterminant à celui d'une matrice triangulaire supérieure. Son déterminant vaut $-2\times 5\times 4=-40$.

32.3 c) On remarque que la deuxième colonne C_2 vaut $-\mathrm{j}\times C_1$. Ainsi, le déterminant est nul.

32.4 a) Le déterminant vaut -4.

32.4 b) Le déterminant vaut $6\mathrm{i}-12$.

32.4 c) Le déterminant vaut $\dfrac{4}{375}$.

32.5 a) On reconnaît une matrice circulante. Son déterminant vaut $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

32.5 b) Le déterminant vaut $-6\ln^3(a)$.

32.5 c) Le déterminant de cette matrice de Vandermonde vaut $(y-x)(z-y)(z-x)$.

32.5 d) Les opérations sur les colonnes $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ramènent au calcul du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ x+1 & 1 & 2 \\ x+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, lui-même nul.

Fiche n° 33. Fonctions de deux variables

Réponses

33.1 a) .... $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-1\leqslant y\leqslant x+1\}}$

33.1 b) .... $\boxed{]0,+\infty[\times[0,+\infty[}$

33.1 c) .... $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}}$

33.1 d) .... $\boxed{\varnothing}$

33.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5y^4+x}$

33.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y\cos(2xy-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2x-1)\cos(2xy-y)}$

33.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2xy,2x) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x^2,-2y)}$

33.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}}$

33.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin(x-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x-y)}$

33.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(\mathrm{e}^{xy})-xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}}$

33.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,x^{y-1} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x}$

33.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

33.4 a) .... $\boxed{\sin(2t)}$

33.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}}}$

33.4 c) .... $\boxed{-72\cos(4t)-46\sin(4t)}$

33.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)-\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

33.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)+\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

33.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

33.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

Corrigés

33.2 b) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_y' : t \mapsto 2y\cos(2ty - y)$. On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 2y\cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

33.3 d) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0,0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \dfrac{ty^2}{t^2 + y^2}$. Sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{y^2 \cdot (t^2 + y^2) - ty^2 \cdot 2t}{(t^2 + y^2)^2}$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ en évaluent en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0,0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{\frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$.

33.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))\dfrac{\partial v}{\partial t}(t) = 8\sin t\cos t + 6\cos t(-\sin t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$.

33.5 a) La règle de la chaîne donne $\dfrac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$, avec les notations $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u,v) = \dfrac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.