Exercice 1. [Trigonométrie, $\mathbb{C}$]. Calculer $S = \sum_{k=0}^{8} \cos^2(\frac{k\pi}{9})$.

Exercice 2. [Equation différentielle].

1. Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f(x)$$

dans les trois cas suivants : $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = e^{x}$ et $f(x) = x + 1$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \text{ch}x + x + 1$.

Exercice 3. [Analyse réelle]. *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer $\lim_{h \to 0} \dfrac{2f(x) - f(x+h) - f(x-h)}{h^2}$.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Comparer $(\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx)^2$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx$.

Exercice 4. [Intégration]. *Inégalité de Gronwall.*

Soient $c \in \mathbb{R}^+$, et u et v deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)\, dt.$$

1. Soit $f(x) = c + \displaystyle\int_0^x u(t)v(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1. a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leq v(x)f(x)$.

1. b. En déduire que $g : x \mapsto f(x) \exp(-\displaystyle\int_0^x v(t)\, dt)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Prouver finalement que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \leq c \exp(\displaystyle\int_0^x v(t)\, dt)$.

Exercice 5. [Polynômes]. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ admet n racines complexes distinctes.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\text{Im } z|^d$.

Exercice 6. [Intégration].

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $f(x)^2 \leq x \displaystyle\int_0^x f'(t)^2\, dt$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2\, dx$.

Exercice 7. [Equations différentielles].

1. Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ d'inconnue $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$, dérivable.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-x}$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

Exercice 8. [Suite].

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Montrer que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 9. [Suites].

Donner des contre-exemples prouvant que les assertions suivantes portant sur des suites réelles sont ... **toutes fausses** :

a) en encadrant S_n avec deux intégrales, b) en faisant intervenir une somme de Riemann

---

Exercice 16. [Polynômes, sommes de Riemann].

1. Soit $n \geq 2$. Ecrire $X^{2n} - 1$ comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $r > 1$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - 2r\cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2)$ à l'aide de 1.

3. Soit $r > 1$. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx$. Calculer I à l'aide de 2.

Exercice 17. [Polynômes].

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n supérieur ou égal à 2, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Prouver que P' est scindé à racines simples.

Exercice 18. [Equations différentielles].

Résoudre sur $]0, +\infty[$: $x^2y'' - xy' - 4y = 4x^2$. *Indication : on pourra poser* $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 19. [Théorème de Rolle].

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

On fixe $x \in]a,b[$. On pose $g_x(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ où A (dépendant de x) est tel que $g_x(x) = 0$.

1. Préciser la valeur de A. Prouver, à l'aide du théorème de Rolle, l'existence d'un réel c (dépendant de x) tel que $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$.

2. Soit $M = \displaystyle\max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$. Vérifier que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M\,\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$. En déduire que $|f'(a)| \leq M\,\dfrac{b-a}{2}$ et $|f'(b)| \leq M\,\dfrac{b-a}{2}$.

Exercice 20. [Complexes].

1. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$. Prouver que $2|u| \leq |u+v| + |v+w| + |w+u|$.

2. Soit $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$. Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |z_i + z_j|$.

Exercice 21. [Complexes].

1. Soit $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Simplifier $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$.
2. En déduire la valeur de $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 22. [Equation différentielle].

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = \cos x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 23. [Moyennes arithmétique et géométrique].

Soit $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose : $m = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ et $G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq \ln m + \frac{1}{m}(x - m)$.

2. En déduire $G \leq m$. *Indication : considérer 1. avec* $x = x_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, *et sommer.*

Exercice 24. [Intégration].

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Prouver que $\displaystyle(\int_0^1 f'(x)^2\,dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx \cdot \int_0^1 f''(x)^2\,dx$.

Exercice 25. [Limite].

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$.

Exercice 26. [Une inégalité de convexité].

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq f(a) + f'(a)(t - a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.

Exercice 36. `[Algèbre linéaire]`. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

1. Justifier que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}\, f$ et $\dim \mathrm{Im}\, f$.

2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 37. `[Variables aléatoires]`. **1.** Soient $x \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}$.

2. Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

Exercice 38. `[Algèbre linéaire]`. Soit E un espace vectoriel. Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Prouver que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

Exercice 39. `[Algèbre linéaire]`. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.
Justifier que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection vectorielle p sur F, de direction G.