Séries numériques.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\,.\,|$ la valeur absolue ou le module.

1 Généralités.

1.1 Série associée à une suite. Convergence. Somme. Divergence.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n ou encore série associée à la suite u la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. U_n est appelée somme partielle d'indice n (ou $n^{\text{ème}}$ somme partielle) de la série associée à u.

Notation. La série de terme général u_n, $n \geq 0$, est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$.

L'étude de la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est donc l'étude de la convergence (éventuelle) de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{K}$, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Dans ce cas, la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou encore $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \cdots$

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Remarque. On peut avoir à considérer une suite (u_n) dont le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un certain indice $n_0 \geq 1$. Dans ce cas, la suite des sommes partielles associée à cette suite u est définie par : $\forall n \geq n_0$, $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et la série, notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$, associée à u est, par définition, la suite des sommes partielles $(U_n)_{n\geq n_0}$.

Proposition 1. *On ne change pas la nature d'une série si on en modifie un nombre fini de termes.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. Considérons $p \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \cdots, n_p$ p entiers distincts. Soient $a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{K}$. Considérons la suite v définie par :

$$\forall n \notin \{n_1, \cdots, n_p\}, v_n = u_n \text{ et } \forall i \in \{1, \cdots, p\}, v_{n_i} = a_i.$$

On a, pour tout $n \geq \max(n_1, \cdots, n_p)$, $v_n = u_n$ et donc $V_n - U_n = \sum_{k=0}^{n}(v_k - u_k) = \sum_{i=1}^{p}(a_i - u_{n_i})$. Par conséquent, si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, de somme U, $\lim_{n\to+\infty} V_n = U + \sum_{i=1}^{p}(a_i - u_{n_i})$ et donc $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge. De même si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, de somme V, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, de somme $V - \sum_{i=1}^{p}(a_i - u_{n_i})$. □

1.2 Premiers Exemples.

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

2. La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge. En effet, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n} = 1$ et $U_{2n+1} = 0$. Donc (U_n) diverge car les deux suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}), extraites de (U_n), convergent vers deux limites distinctes (1 et 0 respectivement).

3. *Série harmonique.* La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que (U_n) converge vers un réel U. La suite extraite (U_{2n}) converge alors vers U et la suite de terme général $U_{2n} - U_n$ vers 0. Or ceci est impossible car la suite $(U_{2n} - U_n)$ est minorée par $\frac{1}{2}$: en effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n.\frac{1}{2n} (= \frac{1}{2})$. Donc (U_n) diverge. Plus précisément, $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ car la suite (U_n) est une suite strictement croissante (puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$) qui, d'après ce qui précède, est divergente.

1.7 Espace vectoriel des séries convergentes.

Proposition 4. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries convergentes. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors :*

1. La série $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2. La série $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration. 1. Notons pour simplifier $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Posons pout tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = u_n + v_n$.

Soient U_n, V_n et W_n les sommes partielles d'indice n des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} w_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = U_n + V_n$, $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n = U + V$ d'où 1.

Vocabulaire. La série $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ est appelée la série somme ou la somme des deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

2. Démonstration analogue à la précédente en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k$. □

Remarque 2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série divergente. Soit* $\alpha \in \mathbb{K}^*$. *Alors la série* $\sum_{n\geq 0} \alpha u_n$ *diverge.*

Il est clair que l'on a $u_n = \frac{1}{\alpha}\alpha u_n$. La proposition 4. 2 (appliquée avec $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ et αu_n à la place de u_n) nous dit que si la série $\sum_{n\geq 0} \alpha u_n$ était convergente, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ serait convergente ce qui contredit notre hypothèse.

Remarque 3. *Soit* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *le* $\mathbb{K}$*ev des suites* u*, indexées par* $\mathbb{N}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *Notons* Σ *le sous-ensemble de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *formé des suites* u *telles que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge. La proposition précédente signifie donc que* Σ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 5. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série convergente et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *une série divergente. Alors la série* $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ *diverge.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la série $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ converge. D'après la proposition précédente, $\sum_{n\geq 0}(-u_n)$ converge. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (u_n+v_n) + (-u_n)$, on déduit à nouveau de la proposition précédente que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge comme série somme de deux séries convergentes. Contradiction. □

Remarque 4. *Il n'y a pas d'énoncé précisant de façon générale la nature de* $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ *quand les deux séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *divergent. Pour vous en convaincre, étudier les deux exemples suivants :*
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ *et* $v_n = -1$. *b.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ *et* $v_n = 1$.

2 Séries géométriques et séries de Riemann.

Les deux exemples suivants sont fondamentaux.

2.1 Série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 6. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *La série géométrique* $\sum_{n\geq 0} z^n$ *converge si et seulement si* $|z| < 1$ *et si* $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Lemme 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.*
a. La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
b. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
c. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration. a. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = u_{n+1}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ par hypothèse.
b. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante d'après a., elle converge donc si et seulement si elle est majorée.
c. La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ signifie que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge. Et comme la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante d'après a., elle est majorée par sa limite, qui n'est autre que la somme (de série) $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. □

Remarque 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. Alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.*

En effet, la suite (U_n) est croissante et, par hypothèse, divergente. Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

3.2 Principe de comparaison.

Proposition 8. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq v_n$.*
a. Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
b. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration. On peut supposer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$, quitte à remplacer si $N \in \mathbb{N}^*$, les termes d'indices $0, \cdots, N$ des suites u et v par 0 car, d'après la proposition 1, ces éventuelles modifications ne changent pas la nature des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$. Remarquons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.
a. Notons $V = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$. Par le lemme 1. c. on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq V$ et donc $U_n \leq V_n \leq V$. La suite (U_n) est donc majorée par V et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge par le lemme 1. b.
b. Si l'on suppose que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, le résultat a. précédent nous donne la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$ ce qui est absurde. □

Exemples d'application.
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.
Rappelons que toute suite réelle convergente est majorée.
La suite (u_n) est donc majorée car, d'après la proposition 2, la suite (u_n) converge vers 0.
Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^2 \leq M u_n$ car $u_n \geq 0$. Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, $\sum_{n\geq 0} M u_n$ converge et, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8.a), la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.
2. Nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$. Rappelons que $\forall x > 0$, $\ln x \leq x$. Donc, pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$.
Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8.b), la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge. Cette série est en fait un exemple de série de Bertrand (voir plus loin).
3. Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+2^n}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 2^n \geq 2^n > 0$ et donc $0 \leq \frac{1}{n+2^n} \leq (\frac{1}{2})^n$. Or la série géométrique $\sum_{n\geq 0} (\frac{1}{2})^n$ converge, car sa raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Donc, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. a), la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+2^n}$ converge.
Remarquons que l'on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n + 2^n \geq n > 0$ et donc $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{n}$. Mais cette dernière inégalité ne permet pas d'utiliser la Proposition 8. a. car la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

8. b.), la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

$\square$

Remarque 6. *Dans l'énoncé de la proposition 10, il suffit en fait de supposer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) est positive. En effet, si par exemple (v_n) est positive, la suite (u_n) est nécessairement positive à partir d'un certain indice : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n$.*

La Proposition 10 se généralise aux suites négatives (à partir d'un certain rang) :

Proposition 11. [Règle de l'équivalent de signe constant.] *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle négative telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.*

Démonstration. On a $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$. La remarque 6 et la proposition 10 impliquent que la suite $-u$ est positive à partir d'un certain indice et que $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ sont de même nature. Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont donc aussi de même nature sachant que la série $\sum -u_n$ (resp. $\sum -v_n$) est de même nature que la série $\sum u_n$ (resp. $\sum v_n$). $\square$

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-n}$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Posons $v_n = -e^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 0$. La série $\sum v_n$ est une série géométrique convergente, de raison $e^{-1} \in]0,1[$. Donc, d'après la Proposition 11, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On aurait aussi pu raisonner avec la série $\sum -u_n$.

Exemples d'application.

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ est divergente. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^{-(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} e^{-\frac{\ln n}{n}}$.

Remarquons tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge par la règle de l'équivalent positif (Proposition 10 utilisée ici avec $v_n = \frac{1}{n}$).

2. Etude de la nature de la série $\sum_{n\geq 1} (1 - \cos(\frac{1}{n^a}))$, $a \in \mathbb{R}^+$. Posons $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n^a}) \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $a = 0$, la suite u est constante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \cos 1 \neq 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 - \cos 1 \neq 0$, la série de terme général u_n diverge donc grossièrement.

Supposons maintenant $a > 0$. Rappelons que $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2a}}$. Donc, par la règle de l'équivalent positif, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2a}}$ converge, c'est-à-dire converge si $a > \frac{1}{2}$ et diverge si $a \in]0, \frac{1}{2}]$.

3. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln(n) \ln(1 + \frac{1}{n})$. Posons $u_n = \frac{1}{n} \ln(n) \ln(1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite u est à termes positifs et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$ car $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or la série de Bertrand $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$ et $\beta = -1$), donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge par la règle de l'équivalent positif (Proposition 10 utilisée ici avec $v_n = \frac{\ln n}{n^2}$).

3.5 Critère (règle) de D'Alembert (comparaison à une série géométrique).

Proposition 12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :*

a. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0,1[$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

b. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in]1,+\infty]$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge (grossièrement).

Démonstration. a. Soit $q \in]\ell, 1[$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

En particulier, on a $u_{N+1} \leq q u_N$, $u_{N+2} \leq q u_{N+1} \leq q^2 u_N$, $u_{N+3} \leq q u_{N+2} \leq q^3 u_N$ et plus généralement

$$\forall n \geq N,\ 0 < u_n \leq q^{n-N} u_N.$$

Or la série de terme général $q^{n-N} u_N = (q^{-N} u_N).\, q^n$ est une série géométrique de raison $q \in]-1,1[$ donc une série convergente. Donc, par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. a), la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(i) Supposons $\beta \leq 0$. Alors $\forall n \geq 3$, $\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} = \dfrac{(\ln n)^{-\beta}}{n} \geq \dfrac{1}{n}$. Or $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 8. b).

(ii) Supposons $\beta > 0$. Posons, pour tout réel $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$.

On vérifie facilement que la fonction f est une fonction continue, positive, (strictement) décroissante sur $[2, +\infty[$.

Donc d'après la Proposition 13, la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\, dt \in \mathbb{R}^+$.

Si $\beta = 1$, $\int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)}\, dt = \int_2^x \dfrac{\frac{1}{t}}{\ln t}\, dt = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$ donc $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)}\, dt = +\infty$.

Si $\beta \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\, dt = \int_2^x \dfrac{\frac{1}{t}}{(\ln t)^\beta}\, dt = [\dfrac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}]_2^x = \dfrac{1}{1-\beta}((\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta})$.

Donc si $\beta \in]0,1[$, $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\, dt = +\infty$ et si $\beta > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}\, dt = \dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta - 1} \in \mathbb{R}^+$.

Par conséquent, $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$.

4 Convergence absolue.

Rappelons que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\cdot|$ la valeur absolue ou le module.

Définition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument (ou est absolument convergente) si la série (à termes positifs) $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.*

Exemple. La série complexe $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{in}}{n^2}$ converge absolument car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\dfrac{e^{in}}{n^2}| = \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Proposition 14. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} (\alpha u_n + v_n)$ est aussi absolument convergente.*

Démonstration. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha u_n + v_n| \leq |\alpha||u_n| + |v_n|$. Or la série $\sum_{n\geq 0} (|\alpha||u_n| + |v_n|)$ converge comme somme de deux séries convergentes (cf. Proposition 4). Le principe de comparaison de termes positifs (Proposition 8. a.) permet alors de conclure. □

Théorème 1. `[La convergence absolue implique la convergence.]`
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et on a

$$|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. a. Supposons tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$. Introduisons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
Si $u_n \in \mathbb{R}^+$, $u_n^+ = u_n$ et $u_n^- = 0$ alors que si $u_n \in \mathbb{R}^-$, $u_n^+ = 0$ et $u_n^- = -u_n$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. Comme $u_n^+ \in \mathbb{R}^+$ et $u_n^- \in \mathbb{R}^+$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Or, par hypothèse, la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge, donc les séries $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ convergent par comparaison de termes positifs (Proposition 8. a.) Enfin, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge comme différence des deux séries convergentes $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ (cf. Proposition 4).

b. Supposons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$. Rappelons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\text{Re}\ (z)| \leq |z|$ et $|\text{Im}\ (z)| \leq |z|$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\text{Re}\ (u_n)| \leq |u_n|$ et $|\text{Im}\ (u_n)| \leq |u_n|$. Or, par hypothèse, la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge, donc les séries $\sum_{n\geq 0} |\text{Re}\ (u_n)|$ et $\sum_{n\geq 0} |\text{Im}\ (u_n)|$ convergent par comparaison de termes positifs. Autrement dit, les séries de réels $\sum_{n\geq 0} \text{Re}\ (u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} \text{Im}\ (u_n)$ convergent absolument. D'après la partie précédente a. de cette démonstration, les séries (de réels) $\sum_{n\geq 0} \text{Re}\ (u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} \text{Im}\ (u_n)$ convergent. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge (cf. sous-section 1.4). Rappelons que l'on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Re}\ (u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Im}\ (u_n)$.

c. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $|\sum_{n=0}^{N} u_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ $(*)$. L'inégalité cherchée s'obtient, par passage à la limite, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité $(*)$ précédente car, par définition d'une somme de série convergente, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. □

$2^{\text{ème}}$ cas. Revenons au cas général en conservant les notations U_n, V_n, U, V et W_n introduites dans l'étude du 1^{er} cas.
Notons de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|, \; B_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|, \quad \omega_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k||v_{n-k}| \text{ et } C_n = \sum_{k=0}^{n} |\omega_k|.$$

Par hypothèse, les séries (à termes positifs) $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont convergentes. Donc, d'après le 1^{er} cas, la suite (C_n) converge (i.e. la série $\sum \omega_n$ converge) et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} B_n$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leq \omega_n$ et que la série $\sum \omega_n$ converge, la série $\sum |w_n|$ converge par comparaison de termes positifs. Autrement dit, la série $\sum w_n$ converge absolument.

Notons enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \{(p,q) \in \{0, \cdots, n\}^2 / p+q > n\}$. On a

$$|U_nV_n - W_n| = |\sum_{(p,q)\in\{0,\dots,n\}^2} u_pv_q - \sum_{p,q\in\mathbb{N},\, p+q\leq n} u_pv_q| = |\sum_{(p,q)\in\Delta_n} u_pv_q| \leq \sum_{(p,q)\in\Delta_n} |u_p||v_q| = A_nB_n - C_n$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_nV_n - W_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = UV$. □

Application : la fonction exponentielle.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Préciser la valeur de $E(0)$.
2. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x+y) = E(x)E(y)$.
3. Soit $h \in]-1,1[\backslash\{0\}$. Prouver que $|\frac{E(h)-E(0)}{h} - 1| \leq |h| \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|h|^n}{(n+2)!} \leq \frac{|h|}{1-|h|}$
En déduire que E est dérivable en 0 et préciser $E'(0)$.
4. Déduire de 2. et 3. que E est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E'(x) = E(x)$. Conclusion ?

5 Séries alternées.

5.1 Définition.

Définition 3. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. La série réelle $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est dite alternée si $\forall n \geq n_0$, $u_nu_{n+1} \leq 0$ ou encore si la suite $((-1)^n u_n)_{n\geq n_0}$ est de signe constant. On a alors : $\forall n \geq n_0$, $u_n = (-1)^n|u_n|$ ou $\forall n \geq n_0$, $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$.*

Nota Bene. Par convention, $(-1)^0 = 1$.

Exemple. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est une série alternée car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_nu_{n+1} = -\frac{1}{(n(n+1))^\alpha} < 0$. Plus simplement, les termes d'indices impairs (resp. pairs) sont strictement négatifs (resp. positifs).

5.2 Critère des séries alternées.

Théorème 3. `[Critère des séries alternées.]` *Soit $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ soit décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge.*

Nota Bene. Cette condition *suffisante* de convergence est aussi appelée *critère spécial des séries alternées* ou *critère de Leibniz.*

Démonstration. Nous pouvons supposer $n_0 = 0$ dans cette preuve, car la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est aussi la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_{n+n_0}$.

Notons comme d'habitude $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $u_0 \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n|u_n|$ (l'autre cas où $u_0 \leq 0$ est analogue). Les termes d'indice pairs (resp. impairs) sont alors positifs (resp. négatifs). Remarquons déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} \leq U_{2n}$ car $U_{2n+1} - U_{2n} = u_{2n+1} \leq 0$.
Montrons que les deux suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes. On a :

$$U_{2(n+1)} - U_{2n} = U_{2n+2} - U_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$$

car la suite $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est décroissante. Donc la suite (U_{2n}) est décroissante. De même, la suite (U_{2n+1}) est croissante :

$$U_{2(n+1)+1} - U_{2n+1} = U_{2n+3} - U_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geq 0.$$

v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: v_1 est la somme de la série convergente $\sum_{n\geq 1} u_n$ et pour tout $n \geq 2$, $v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^2}$ est le reste d'ordre $n-1$ de cette même série convergente. D'après la Proposition 15. b. v_1 est du signe de $u_1 = -1$ donc v_1 est négatif.
Posons, pour tout $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On a $U_1 = -1$, $U_2 = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ et $U_3 = U_2 - \frac{1}{9} = -\frac{31}{36}$. D'après la Proposition 15. a, on a $U_3 \leq v_1 \leq U_2$ ce qui est exactement l'encadrement demandé.
2. La Proposition 15. c. permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Ainsi, par comparaison de termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geq 1} |v_n|$ converge. En d'autres termes, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge absolument, donc converge.

5.4 Utilisation d'un développement asymptotique du terme général.

1. *Une série alternée convergente ne vérifiant pas les hypothèses du critère des séries alternées.*
Considérons la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. Notons u_n son terme général. Pour tout $n \geq 2$, $n+(-1)^n \geq n-1 \geq 1$ donc u_n est bien définie et la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série alternée car $\forall n \geq 2$, $u_n = (-1)^n |u_n|$. Comme $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Mais le critère des séries alternées n'est pas applicable car la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante à partir d'un certain indice. En effet, $|u_{n+1}| - |u_n| = \frac{1}{n+1+(-1)^{n+1}} - \frac{1}{n+(-1)^n} = \frac{2(-1)^n - 1}{(n+1+(-1)^{n+1})(n+(-1)^n)}$ et donc, pour tout entier n pair, $|u_{n+1}| > |u_n|$. Pour déterminer la nature de cette série, on effectue un développement asymptotique de u_n lorque n tend vers l'infini. Rappelons que $(1+x)^{-1} = 1 - x + o_0(x)$. On a alors :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n(1+\frac{(-1)^n}{n})} = \frac{(-1)^n}{n}(1+\frac{(-1)^n}{n})^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o_{+\infty}(\frac{(-1)^n}{n})) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$$
Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = -\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. La série $\sum a_n$ est une série alternée convergente d'après le critère des séries alternées car $(\frac{1}{n}) \searrow 0$. De plus, comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$, la série $\sum b_n$ converge par la règle de l'équivalent de signe constant. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.
Nota Bene. Cette exemple montre que le critère des séries alternées n'est qu'une condition **suffisante** de convergence.
2. *Un exemple montrant que la règle de l'équivalent ne s'applique pas si l'équivalent du terme général est alterné.*
Posons $u_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $n \geq 2$, et étudions la nature de la série $\sum u_n$. Effectuons comme dans l'exemple précédent un développement asymptotique de u_n lorque n tend vers l'infini. Rappelons à cet effet que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$. On a alors : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$.
Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = -\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$. La série $\sum a_n$ est une série alternée convergente d'après le critère des séries alternées car $(\frac{1}{\sqrt{n}}) \searrow 0$. De plus, comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$, la série $\sum b_n$ diverge par la règle de l'équivalent de signe constant. Par conséquent, la série $\sum u_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.
Cet exemple nous permet de noter deux erreurs de raisonnement classiques (à éviter !) :
a. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et l'on sait que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série (alternée) convergente. Il est tentant d'en déduire que la série $\sum u_n$ converge mais c'est évidemment faux puisque l'on sait que la série $\sum u_n$ diverge : les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **ne sont pas de même nature.** Attention donc à une utilisation abusive de la règle de l'équivalent : l'équivalent du terme général d'une série doit être **de signe constant !**
b. On a $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est décroissante donc (?) la suite $(|u_n|)$ décroît : cette dernière affirmation est fausse car si la suite $(|u_n|)$ décroissait, la série $\sum u_n$ convergerait par le critère des séries alternées (ce qui est faux !).

Exercices.

Exercice 1. *Les deux questions sont indépendantes.*
1. Soit $u_n = e^{-\frac{n^2+1}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de u_n et préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
2. Soit $v_n = \frac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^5+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence absolue et la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$.
Exercice 2. Soit (a_n) une suite à termes positifs. Soit (u_n) définie par :
$$u_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$
Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.
Exercice 3. Montrer que la série complexe $\sum_{n\geq 1} (1 - \frac{1-i}{n})^{n^2}$ converge absolument.
Exercice 4. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} (\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))^n - \frac{1}{\sqrt{e}})$.

Aux futurs étudiantes et étudiants de PC,

Il faut avant tout vous reposer après cette année de PCSI bien remplie, mais aussi penser à préparer raisonnablement l'année de PC pendant ces vacances d'été. Il serait bon de commencer à reviser au moins trois semaines avant la rentrée.

Comme nous allons commencer par des révisions sur les suites, puis approfondir le cours sur les séries, je vous invite **à retravailler attentivement le cours et les exercices de Mme Ploquin** sur les suites, les séries, l'intégration sur un segment et les développements limités. Vous trouverez ci-dessous une généralisation du théorème de Césaro et trois énoncés de devoirs (corrigés) sur les suites que vous pouvez étudier pour vous entraîner et faire le point sur vos connaissances.

J'ai joint également le cours (très important) sur les séries que nous étudierons en septembre 2025 et je vous propose enfin de travailler divers exercices de révisions (avec corrigés).

Bonnes vacances à tous.

D. Guibourg.

I. Une généralisation du théorème de Cesàro. Applications.

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = +\infty.$$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

1. *Etude de la convergence de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. a. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vérifier que $\forall n > N$, $|v_n - \ell| \leq \dfrac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

1. b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

1. c. *Application.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et déduire de 1. que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} = \dfrac{\ell}{2}$.

2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ et $B_n = b_1 + \cdots + b_n$.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty$. Déduire de 1. que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

3. *Deux applications de la question précédente.*

3. a. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\ln(n+1) - \ln(n)$, et déduire de 2. que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. b. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, et déduire de 2. un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$.

puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + o_0(x)$, et enfin $\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ (série de Riemann divergente vers $+\infty$ car d'exposant $\frac{2}{3} \leq 1$). Comme, par telescopage, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}) = \sqrt[3]{n+1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$, d'après 2. : $B_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$, d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\sqrt[3]{n}$.

II. Trois devoirs corrigés pour s'entraîner.

$\boxed{\textbf{Devoir n° 1.}}$

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$$

1. On pose : $M_n = \max(u_n, u_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Prouver que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} M_n$.
2. a. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\ell \leq M_n \leq \ell + \varepsilon$.
2. b. Prouver en raisonnant par l'absurde que pour tout $n \geq N$, $u_n > \ell - 4\varepsilon$.
3. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 2.
`A. Rappels sur les sommes de Riemann.`
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Il a été admis, dans le chapitre intégration du cours de mathématiques de PCSI, que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

Le but de cette partie A. est de démontrer l'égalité (1) sous une hypothèse plus forte sur f.
1. Soient C un réel positif et f une application C-lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
a. (Re)démontrer que f est continue sur $[0,1]$.
b. Vérifier que

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx.$$

c. En déduire que $\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{C}{2n}$ et prouver (1).
d. Dans cette question, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver (1).
`B. Application.` Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

1. a. $|f|$ est-elle bornée sur $[0,1]$?
1. b. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$, $\frac{1}{n}|f(\frac{k}{n})| \leq \frac{1}{2}$.
2. Vérifier que $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.
Indication : considérer $\ln(u_n)$ avec $n \geq N$ et utiliser (1).

Exercice 3. Soient f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{p=0}^{n} u_{f(p)}$.
On suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'on note S sa limite.
1. Prouver que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente. On note T sa limite.
2. Prouver que $T \leq S$.
3. a. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}$, a_i l'unique antécédent de i par f.
Vérifier que $S_n \leq T_{\max(a_0,\ldots,a_n)}$.
3. b. Prouver finalement que $T = S$.

$\boxed{\textbf{Corrigé du devoir n° 1.}}$

3. Soit $n \geq N$. Comme $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, on a d'après la question précédente :

$$\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) - (\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}))^2 \leq \ln(1+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})) \leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

et en sommant :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}). \qquad (*)$$

D'après (1), $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Comme f^2 est continue sur $[0,1]$ on a aussi d'après (1), $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 = \int_0^1 (f(x))^2\,dx$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 = 0.\int_0^1 (f(x))^2\,dx = 0$.

Les deux suites encadrantes dans l'inégalité $(*)$ ci-dessus convergent donc vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Le théorème des gendarmes nous dit que la suite $(\ln(u_n))$ converge également vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Par continuité de la fonction exponentielle, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

Remarque. L'encadrement $0 \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 \leq \frac{M^2}{n}$ et le théorème des gendarmes permettent d'obtenir plus simplement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 = 0$ (sans faire appel au résultat (1) sur les sommes de Riemann).

Exercice 3. La suite (S_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ et comme par hypothèse (S_n) converge (vers S), on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq S$ $(**)$.

1. La suite (T_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = u_{f(n+1)} \geq 0$. De plus, comme f est bijective, les entiers $f(0),\cdots,f(n)$ sont distincts et comme la suite u est positive, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = u_{f(0)} + \ldots + u_{f(n)} \leq u_0 + \ldots + u_{\max(f(0),\cdots,f(n))} = S_{\max(f(0),\cdots,f(n))} \quad (***)$$

Par exemple, si $f(0) = 4$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$, $T_2 = u_4 + u_2 + u_1 \leq u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = S_4$.
D'après $(***)$ et $(**)$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq S$. La suite (croissante) (T_n) est donc majorée (par S). Par conséquent, la suite (T_n) converge.

2. On a montré dans la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq S$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient $T \leq S$ ("passage à la limite dans une inégalité entre deux suites convergentes").

3. a. Essayons tout d'abord de comprendre l'inégalité cherchée à l'aide d'un exemple. Supposons que les antécédents par f des entiers 0, 1 et 2 soient respectivement 5, 3 et 7, c'est-à-dire que $f(5) = 0$, $f(3) = 1$ et $f(7) = 2$. Alors, comme la suite u est positive, on a

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = u_{f(5)} + u_{f(3)} + u_{f(7)} \leq u_{f(0)} + \cdots + u_{f(7)} = T_7$$

car les entiers $f(5)$, $f(3)$ et $f(7)$ sont trois des huit entiers distincts $f(0),\cdots,f(7)$.
De manière générale avec une bijection f quelconque de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, comme la suite u est positive, on a

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = u_{f(a_0)} + \cdots + u_{f(a_n)} \leq u_{f(0)} + \cdots + u_{f(\max(a_0,\cdots,a_n))} = T_{\max(a_0,\cdots,a_n)} \quad (****)$$

car les $(n+1)$ entiers distincts $f(a_0),\cdots,f(a_n)$ font partie de la liste $f(0),\cdots,f(\max(a_0,\cdots,a_n))$ d'entiers distincts.

3. b. Comme la suite (croissante) (T_n) converge (vers T), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq T$. Donc, d'après $(****)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T$ et par passage à la limite, on obtient $S \leq T$. D'où $S = T$ d'après 2.

Remarque. Reformulons le résultat obtenu dans cet exercice en utilisant le mot série. On vient en fait de prouver que si la série **à termes positifs** $\sum u_n$ converge, alors, f étant une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{f(n)}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{f(k)}$.

Devoir n° 2.

Exercice 1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{a^n+b^n}{2})^{\frac{1}{n}} = \max(a,b)$.

Exercice 2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $v_n = u_n - \ln n$.

1. a. En utilisant la décroissance sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$, prouver que

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}.$$

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \leq 0$. Donc d'après le cours d'intégration, $v_{n+1} - v_n \leq 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leq v_n$. La suite (v_n) est par conséquent une suite décroissante. De plus, d'après 1. b, pour tout $n \geq 2$,

$$v_n := u_n - \ln n \geq 1 - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln n \geq 1 - \ln 2$$

car ln est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a aussi $v_1 = 1 \geq 1 - \ln 2$. Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par $1 - \ln 2$.
La suite (v_n), décroissante et minorée, converge donc par théorème.

2. c. D'après 1. b. on a, pour tout $n \geq 2$, $1 - \ln 2 \leq v_n \leq 1$. En passant à la limite dans cet encadrement (on peut maintenant "passer à la limite" car on a établi en 2. b la convergence de la suite (v_n)), on obtient l'encadrement souhaité, à savoir $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.

Exercice 3.

On montre facilement par récurrence que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites de réels strictement positifs.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1}b_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}(b_n - a_{n+1}) = (\frac{b_n + a_n}{2})(\frac{b_n - a_n}{2}) = \frac{1}{4}(b_n^2 - a_n^2)$. Donc la suite $(b_n^2 - a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

2. D'après **1.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n^2 - a_n^2 = (\frac{1}{4})^n(b_0^2 - a_0^2) = (\frac{1}{4})^n(b^2 - a^2)$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n^2 > a_n^2$ ce qui implique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > a_n$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} < b_n$ car $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} < b_n$. Ainsi la suite (a_n) (resp. (b_n)) est strictement croissante (resp. décroissante). Comme la suite (a_n) est majorée par b car $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n < b$, elle converge vers une limite $A > 0$. Idem (b_n) converge vers une limite $B > 0$ car la suite (b_n) est minorée par a. Or d'après ce qui précède,

$$B^2 - A^2 = \lim_{n\to+\infty}(b_n^2 - a_n^2) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{4})^n(b^2 - a^2) = 0.$$

Donc $A = B$ et les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien adjacentes.

3. a. Calculons tout d'abord a_1 et b_1. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.
Comme $a = b\cos(\alpha)$, $a_1 = \dfrac{a+b}{2} = b\dfrac{1 + \cos(\alpha)}{2} = b\cos^2(\dfrac{\alpha}{2})$ et

$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{ba_1} = \sqrt{b^2\cos^2(\frac{\alpha}{2})} = b\cos(\frac{\alpha}{2})$$

car $\cos(\frac{\alpha}{2}) \in [0,1]$ puisque $\dfrac{\alpha}{2} \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.
Prouvons maintenant par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_n\ : << a_n = b\cos(\frac{\alpha}{2^n}) \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^k} \text{ et } b_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} >>$$

Initialisation. Le calcul précédent des termes a_1 et b_1 montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
En effet, en utilisant $\mathcal{P}_n$, on obtient que :

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} \cdot \frac{1 + \cos(\frac{\alpha}{2^n})}{2} = \underbrace{b\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\alpha}{2^k})}_{b_n} \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\frac{\alpha}{2^k}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}})$$

et, d'après le calcul précédent de a_{n+1}, on obtient également que :

$$b_{n+1} := \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{b_n\cos^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}})b_n} = b_n\cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. b. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{Q}_n$ suivante est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{Q}_n\ : << b_n \cdot \sin\frac{\alpha}{2^n} = b \cdot \frac{\sin\alpha}{2^n} >>$$

Initialisation. D'après **3. a.**, on a effectivement $b_1.\sin\frac{\alpha}{2} = b\cos(\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2}\sin(\alpha)$.

Exercice 3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\alpha| < 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \alpha^{n-p} a_p$.

1. On suppose tout d'abord $\ell = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-|\alpha|)$.

1. a. Vérifier que $\forall n > N$, $|u_n| \leq \sum\limits_{p=0}^{N} \frac{|a_p|}{|\alpha|^p} .|\alpha|^n + \frac{\varepsilon}{2}$.

1. b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On suppose maintenant que $\ell \in \mathbb{R}^*$.

En considérant la suite (b_n) définie par : $b_n = a_n - \ell$, $n \in \mathbb{N}$, déduire de 1. b. que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{\ell}{1-\alpha}$.

3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $v_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \alpha v_n + a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

3. a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \alpha^n v_0 + \sum\limits_{p=0}^{n-1} \alpha^{n-1-p} a_p$.

3. b. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Corrigé du devoir n° 3.

Exercice 1. Posons, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $p_n = \prod\limits_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})$. Transformons et simplifions p_n :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$. *Remarque : la suite (p_n) est décroissante, minorée par 0, donc... convergente.*

Exercice 2.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n - (u_n + 2v_n)) = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$.
La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - v_n = (\frac{1}{3})^n(u_0 - v_0) = (\frac{1}{3})^n(a - b).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ car $a < b$.

1. b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après **1. a.**, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est donc strictement croissante (resp. décroissante).

1. c. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes car par **1. b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et par **1. a.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{3})^n(b-a) = 0$. Donc, d'après une propriété des suites adjacentes, ces deux suites convergent vers une même limite réelle.

Variante de rédaction : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par le théorème de convergence monotone : elle est croissante et majorée par v_0, d'après **1. a.** et **1. b.** car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n \leq v_0$. De même, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, car elle est décroissante et minorée par u_0. Notons $U = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $V = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$, vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $U = V$.

2. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n + u_n + 2v_n) = u_n + v_n$. La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite constante, de constante $u_0 + v_0$. Cette suite constante converge donc... vers sa constante $u_0 + v_0$ mais aussi, d'après ce qui précède, vers 2ℓ où ℓ est la limite commune des suites u et v. Par unicité de la limite d'une suite convergente, on a donc :

$$\ell = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 3.

1. a. Soit $n > N$. Comme $u_n = \sum\limits_{p=0}^{N} \alpha^{n-p} a_p + \sum\limits_{p=N+1}^{n} \alpha^{n-p} a_p$, on a :

$$|u_n| \leq \sum_{p=0}^{N} |\alpha|^{n-p}|a_p| + \frac{\varepsilon}{2}(1-|\alpha|) \sum_{p=N+1}^{n} |\alpha|^{n-p}. \tag{2}$$