Table des matières

1 Analyse 1
- 1.1 Sommes . . . 1
- 1.2 Suites . . . 1
- 1.3 Séries . . . 6
- 1.4 Fonctions usuelles . . . 8
- 1.5 Intégration, primitives . . . 10
- 1.6 Limites, continuité, dérivabilité . . . 13
- 1.7 Formules de Taylor . . . 16

2 Algèbre 17
- 2.1 Dénombrements, applications et ensembles . . . 17
- 2.2 Complexes . . . 22
- 2.3 Polynômes . . . 23
- 2.4 Espaces vectoriels . . . 23
- 2.5 Matrices et systèmes linéaires . . . 24
- 2.6 Applications linéaires . . . 26
- 2.7 Algèbre bilinéaire . . . 28

3 Probabilités 30
- 3.1 Probabilités élémentaires . . . 30
- 3.2 Variables aléatoires . . . 31

Ces exercices courts, pour la plupart donnés en colles en première année, constituent une collection des propriétés et méthodes que doit maîtriser un étudiant en fin de première année.

Nicolas MAILLARD
Contact : colasmaillard@free.fr

1 Analyse

1.1 Sommes

EXERCICE 1.

1. Démontrer par récurrence sur n la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

2. En calculant de deux façons $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4-k^4)$, retrouver la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Correction n° 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »...

2. Par télescopage $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4-k^4) = (n+1)^4$, et en développant :

$(k+1)^4 - k^4 = \cdots = 4k^3+6k^2+4k+1$,

$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$

$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$ et il n'y a plus qu'à isoler

$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \cdots = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 2.

Calculer $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)\right)$.

Correction n° 2.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\times i + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n^2(n+1)\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)-3+6n)}{12} = \frac{n(n+1)(8n-2)}{12} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

EXERCICE 3.

Soit d et f deux entiers naturels tels que $d \leqslant f$ (d =début et f =fin !).

1. a) Montrer que : $\forall i \in [\![d\,;f]\!]$, $\binom{i}{d} = \binom{i+1}{d+1} - \binom{i}{d+1}$.

Soit v la suite définie par

$$v_0 = e \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = ev_n^2.$$

1. Montrer que v est strictement positive et strictement croissante.
2. Montrer que v diverge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $u_n = \ln(v_n)$. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire v_n en fonction de n. Retrouver les réponses aux questions précédentes à l'aide de cette expression.

Correction n° 9.

1. On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \mathrm{e}$.
   Du coup : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \mathrm{e}v_n \geqslant \mathrm{e}^2 > 1$ donc v croît.
2. On peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \mathrm{e}^n$, et par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
   On peut aussi raisonner par l'absurde. Supposons v convergent, de limite ℓ. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}v_n^2 = \mathrm{e}\ell^2$. Par unicité de la limite : $\ell = \mathrm{e}\ell^2$.
   $\ell = \mathrm{e}\ell^2 \Leftrightarrow \ell(1 - \mathrm{e}\ell) = 0 \Leftrightarrow (\ell = 0 \text{ ou } \ell = 1/\mathrm{e})$.
   Or : $(\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant \mathrm{e}) \Rightarrow \ell \geqslant \mathrm{e}$, donc $\ell \neq 0$ et $\ell \neq 1/\mathrm{e}$. Contradiction : donc v diverge, et comme v est croissante, v diverge vers $+\infty$.
3. u vérifie la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(\mathrm{e}v_n^2) = 1 + 2u_n$: c'est une suite arithmético-géométrique.
   Avec $u_0 = 1$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 1$.
   Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \exp(2^{n+1} - 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Exercice 10.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n + 1).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Justifier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction n° 10.

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».
2. Par récurrence : $u_1 = \ln(2) \leqslant u_0$, et $u_n \leqslant u_{n-1} \Rightarrow u_n + 1 \leqslant u_{n-1} + 1 \Rightarrow \ln(u_n + 1) \leqslant \ln(u_{n-1} + 1) \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.
   Variante : $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n$ et on montre (en l'étudiant) que la fonction $x \mapsto \ln(x+1) - x$ est négative sur $]0; +\infty[$.
3. u est décroissante et minorée donc converge, et comme u est positive, sa limite ℓ est positive (ou nulle).
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n + 1) = \ln(\ell + 1)$, $\ell = \ln(\ell) + 1$.
   L'étude de $x \mapsto \ln(x+1) - x$ sur $[0; +\infty[$ montre que $\ell = 0$ est l'unique solution de $\ell = \ln(\ell) + 1$. Donc $\ell = 0$.

Exercice 11.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudier la variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Justifier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction n° 11.

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $2 \geqslant u_n \geqslant 0$ ».
2. Par récurrence : $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$, et $u_n \geqslant u_{n-1} \Rightarrow u_n + 2 \geqslant u_{n-1} + 2 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \geqslant \sqrt{u_{n-1} + 2} \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$.
3. u est croissante et majorée donc converge, et comme $0 \leqslant u \leqslant 2$, sa limite ℓ est positive et inférieure à 2.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n + 2} = \sqrt{\ell + 2}$, $\ell = \sqrt{\ell + 2}$.
   $\ell = \sqrt{\ell + 2} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ell = 2 \text{ ou } \ell = -1)$, or $\ell \geqslant 0$, donc $\ell = 2$.

Exercice 12.

Étudier la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$.

Correction n° 12.

Par récurrence, on montre que u_n est défini et strictement positif pour tout n de $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{u_n^2 + 1} < 1$ donc u est strictement décroissante, et minorée par 0, donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{\ell^2 + 1}$, donc $\ell^2 + 1 = 1$, donc $\ell = 0$.

Exercice 13.

Étudier la suite u définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Correction n° 13.

Se traite comme l'exercice précédent. La suite est décroissante.

Sa limite vérifie $\ell = \sqrt{\ell + 1} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $1 - \sqrt{5} < 0$ et $\ell \geqslant 0$, $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

4. Par télescopage : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n) - \ln(1)$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ln(n)$, et par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 17.

1. Soit a, $b \in]0\,;+\infty[$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$.
2. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ k réels.
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (|a_1|^n + \cdots + |a_k|^n)^{1/n}$.

Correction n° 17.

1. Supposons $a < b$. $(a^n + b^n)^{1/n} = (b^n(1 + (a/b)^n))^{1/n} = b((1 + (a/b)^n)^{1/n} = b\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1 + (a/b)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$ car $0 < a/b < 1$.
Si $a > b$, en permutant a et b dans ce qui précède, $(a^n + b^n)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
Si $a = b$, $(a^n + b^n)^{1/n} = 2^{1/n}a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a = b$
Bilan : $(a^n + b^n)^{1/n} = \xrightarrow[n\to+\infty]{} max(a, b)$
2. Un raisonnement analogue montre que :
$\lim_{n\to+\infty} (|a_1|^n + \cdots + |a_k|^n)^{1/n} = max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$.

EXERCICE 18.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que u et v convergent vers une même limite.
On note e cette limite.
2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|e - u_n\right| \leqslant \frac{1}{n.n!}$.

Correction n° 18.

1. Montrons que u et v sont adjacentes.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$: u croît.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$
$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$: v décroît.
$v_n - u_n = \frac{1}{n.n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
u et v sont adjacentes : elles convergent vers une même limite e (la base de l'exponentielle).
2. Conséquence de suites adjacentes : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant e \leqslant v_n$.
D'où : $0 \leqslant e - u_n \leqslant v_n - u_n$, donc $\left|e - u_n\right| \leqslant \frac{1}{n.n!}$.

EXERCICE 19.

Soit a, α et β trois réels strictement positifs.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.
Exprimer u_n en fonction de n et a.
2. Soit $0 < \beta < \alpha$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :
$$x_0 = \alpha,\ y_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n} \end{cases}.$$
Étudier le comportement de x_n et de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction n° 19.

1. On montre (par récurrence par exemple) que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^{(2^n)}$.
2. Par récurrence, x et y sont à valeurs strictement positives.
$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = x_n - y_n$: la suite $x - y$ est constante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n - y_n = \alpha - \beta$, donc $y_n = x_n - \alpha + \beta$.
$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2$. Par 1., $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x_n}{y_n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n}$.
$x_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} y_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2^n} (x_n - \alpha + \beta)$
$\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2^n} - 1\right) x_n = -\alpha + \beta$ puis $x_n = \frac{\alpha - \beta}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha - \beta$ car $0 < \beta/\alpha < 1$.
Et $y_n = x_n - \alpha + \beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

EXERCICE 20.

Soit $q \in]1\,;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
Que peut-on dire de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 24.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$$
et en déduire la somme de la série précédente.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(n+1)u_n$ converge et déterminer sa somme.
4. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(n^2-1)u_n$ converge et déterminer sa somme.

Correction n° 24.

1. $u_n = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 1} 1/n!$ est une série de exponentielle convergente. Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
2. $\forall n \geqslant 1,\quad u_n = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

   Par télescopage, $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.
3. $(n+1)u_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$ et $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)u_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.
4. $(n^2-1)u_n = 0$ pour $n = 1$, et
   $\forall n \geqslant 2, (n^2-1)u_n = \dfrac{(n-1)(n+1)n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$.

   Donc : $\forall n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)u_k = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

EXERCICE 25.

Pour $n \in [\![2, +\infty[\![$, on pose $u_n = \dfrac{(n-1)}{2^n}$.

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$. et déterminer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} nu_n$ converge et déterminer sa somme.

Correction n° 25.

1. $\dfrac{(n-1)}{2^n} = (n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \overset{k=n-1}{=} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{4}$, or comme $\dfrac{1}{2} \in]-1\,;1[$,

   la somme géométrique dérivée $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ existe et vaut $\dfrac{1}{(1-1/2)^2} = 4$.

   Donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ existe et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}\times 4 = 1$.
2. $\dfrac{n(n-1)}{2^n} = n(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} \times \dfrac{1}{4}$, or comme $\dfrac{1}{2} \in]-1\,;1[$,

   la somme géométrique dérivée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ existe et vaut $\dfrac{2}{(1-1/2)^3} = 16$.

   Donc $\sum_{n\geqslant 2} nu_n$ existe et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nu_n = \frac{1}{4}\times 16 = 4$.

EXERCICE 26.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, je pose : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n$.

1. Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$?
2. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n.$$
3. Pour $n \geqslant 1$, je pose :
$$v_n = S_n - \ln(n) \text{ et } w_n = v_n - \frac{1}{n}.$$
Étudier les variations des suites v et w.
4. Montrer que v et w sont convergentes vers une même limite.
5. Montrer enfin que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Correction n° 26.

1. La série harmonique $\sum_n u_n$ diverge (et sa limite est $+\infty$ car elle est à termes positifs.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [n\,;n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Par croissance de l'intégrale, $u_{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$: v décroît.

   $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0$: w croît.

2. Démontrer que $\sin(\text{Arctan} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ en précisant le domaine de validité de cette égalité.

Correction n° 30.

1. Pour x tel que $\cos(x) \neq 0$, $1+\tan^2(x) = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ d'où $\cos^2(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(x) \in \,]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ donc $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$ (du coup $\neq 0$!).
Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan}(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. De $\cos^2 + \sin^2 = 1$ on déduit :
$\sin^2(\text{Arctan}(x)) = 1 - \cos^2(\text{Arctan}(x)) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, puis
$|\sin(\text{Arctan}(x))| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, et comme $\sin(\text{Arctan}(x))$ est du signe de x,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

EXERCICE 31.

Montrer que : $\quad \forall x \in \,]0\,;\,1\,[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Correction n° 31.

Soit $\mathrm{I} = \,]0\,;\,1\,[$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x(1-x)^{1-x}$.
$g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I par composition, avec $g' : x \mapsto (1+\ln(x))x^x$.
Et par composition, $x \mapsto (1-x)^{1-x} = g(1-x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur I de dérivée
$$x \mapsto -g'(1-x) = -(1+\ln(1-x))(1-x)^{1-x}.$$
Comme produit, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I avec
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) = [1+\ln(x) - (1+\ln(1-x))]\,f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) f(x)$$
Comme f est strictement positive sur I, le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} < 1 \Leftrightarrow x < 1-x \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < 1/2$$
f est strictement décroissante sur $]0\,;\,1/2]$ et strictement croissante sur $[1/2\,;\,1\,[$. Son minimum est $f(1/2) = 1/2$, d'où
$$\forall x \in \,]0\,;\,1\,[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

EXERCICE 32.

1. Démontrer que : $\forall x \in [\,0\,;\,\pi\,]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.
3. Donner une valeur approchée de $\sin(0,1)$ à 10^{-3} prés.

Correction n° 32.

1. Soit $\mathrm{I} = [\,0\,;\,\pi\,]$ et $f : x \mapsto x - \sin x$.
$\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur I. Comme $f(0) = 0$, f est positive sur I. Donc : $\forall x \in \mathrm{I}, \sin(x) \leqslant x$.
Soit $g : x \mapsto \sin(x) - x + x^3/6$.
$\forall x \in \mathrm{I}, g'(x) = \cos(x) - 1 + x^2/2$.
$\forall x \in \mathrm{I}, g''(x) = -\sin(x) + x = f(x) \geqslant 0$, donc g' est croissante sur I. Comme $g'(0) = 0$, g' est positive sur I. Donc g est croissante sur I, et comme $g(0) = 0$, g est positive sur I. Donc : $\forall x \in \mathrm{I}, x - x^3/6 \leqslant \sin(x)$.

2. $\forall x\, \int]\,0\,;\,\pi\,], 1 - \dfrac{x^2}{6} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$ Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.
$\forall x \in \,]-\infty\,;\,0\,[, \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{-\sin(-x)}{-(-x)} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$ donc en posant $y = -x$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$.
Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3. Appliquons 1. avec $x = 0,1$:
$0,1 - \dfrac{0,1^3}{6} \leqslant \sin(0,1) \leqslant 0,1$, donc $-\dfrac{0,1^3}{6} \leqslant \sin(0,1) - 0,1 \leqslant 0$, donc
$|\sin(0,1) - 0,1| \leqslant \dfrac{0,1^3}{6} \leqslant 0,001$: $\sin(0,1) \simeq 0,1$ à moins de $0,001$ près.

EXERCICE 33.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $e^x - x = n$.

1. Montrer que (E_n) a une unique solution x_n dans $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
2. Montrer que $x_n \geqslant \ln n$. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$?
3. Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $e^y \geqslant 2y$. En déduire $x_n \leqslant n$.

Correction n° 33.

1. Soit $f : [\,0\,;\,+\infty\,[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - x$.
$\forall x > 0, f'(x) = e^x - 1 > 0$ car $e^x > 1$. f est continue et strictement croissante sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, donc f est une bijection de $[\,0\,;\,+\infty\,[$ dans $f([\,0\,;\,+\infty\,[) = [\,0\,;\,+\infty\,[$. Donc tout n de $[\,0\,;\,+\infty\,[$ possède un unique antécédent par f dans $[\,0\,;\,+\infty\,[$. Autrement dit, pour tout $n \geqslant 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution.

Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est décroissante, et est convergente, de limite nulle.

Correction n° 40.
$\forall t \in [0\,;1],\ 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ car $1+t^2 \geqslant 1$.

Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

Exercice 41.

Vrai ou faux : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \cos t.\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = 0$?

Correction n° 41.
VRAI !
$\forall t \in [0\,;\pi/2],\ 0 \leqslant \cos t\mathrm{e}^{-nt} \leqslant \mathrm{e}^{-nt}$ car $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$.

Par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t.\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-nt}}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi/2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \cos t.\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 42.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x$.

1. En posant $t = 1-x$, montrer que $\mathrm{I}_{p,q} = \mathrm{I}_{q,p}$.
2. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
3. Calculer $\mathrm{I}_{p,0}$.
4. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p et q.

Correction n° 42.

1. $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x \overset{t=1-x}{=} \int_1^0 (1-t)^p t^q \times(-1)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^p t^q\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{q,p}$.
2. En intégrant par parties sur $[0\,;1]$ avec les fonctions $\mathcal{C}^1$ $u : x \mapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v : x \mapsto (1-x)^q$, $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1}$.
3. $\mathrm{I}_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$.
4. $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1} = \dfrac{q}{p+1}\dfrac{q-1}{p+2}\mathrm{I}_{p+2,q-2} = \cdots = \dfrac{q(q-1)\ldots(1)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0}$

   $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q!p!}{(p+q+1)!}$, qu'on peut aussi démontrer par récurrence avec par exemple les propriétés :
$$\forall p \in \mathbb{N},\quad \mathcal{H}(p) : \text{« } \forall q \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!} \text{ ».}$$

Exercice 43.

1. Établir que, pour tout x de $[0\,;1]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \sin^n x\mathrm{d}x$.

Correction n° 43.

1. $[0\,;1] \subset [0\,;\pi]$ donc $\forall x \in [0\,;1], \sin(x) \geqslant 0$.
   $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$ donc sin est concave, or $y = x$ est l'équation de la tangente à sa courbe en 0, donc : $\forall x \in [0\,;1], \sin x \leqslant x$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;1], 0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant x^n$.

   Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$.

   Comme $\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$ existe et vaut 0.

Exercice 44.

1. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'intégrale $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n}\mathrm{d}x$.
2. En majorant $\left|\dfrac{n\sin x}{x+n} - \sin x\right|$ pour $x \in [0\,;\pi]$, calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\mathrm{d}x\right).$$

Correction n° 44.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\pi], 0 \leqslant \dfrac{\sin x}{x+n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Par croissance de l'intégrale, $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.
   Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n = 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;\pi], \left|\dfrac{n\sin x}{x+n} - \sin x\right| = \left|\dfrac{-x\sin x}{x+n}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{n}$

5. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln k - n\ln n\right) = \frac{1}{n}\ln(n!) - \ln n,$
d'où $\ln(n!) = n(u_n + \ln n)$. Comme $u_n = o(\ln n)$, $u_n + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
Donc $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.
Enfin : $\frac{\ln(n!) - n\ln n + n}{n} = \frac{nu_n + n}{n} = u_n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$
donc $\ln(n!) - n\ln n + n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, $\ln(n!) = n\ln n - n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

$\boxed{\text{EXERCICE 48.}}$
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt \text{ et } g(x) = \int_x^{2x} e^{t^2}dt.$$

1. Déterminer la classe de dérivabilité de f et de g sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f et g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
4. Déterminer $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$.

Correction n° 48.

1. Soit H une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ $h : t \mapsto e^{t^2}$. H est dérivable, de dérivée $\mathcal{C}^\infty$ h, donc H est $\mathcal{C}^\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = H(x) - H(0)$ et $g(x) = H(2x) - H(x)$, donc f et g sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On peut aussi remarquer que f est la primitive de h nulle en 0.
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = H'(x) = h(x) = e^{x^2} > 0$, donc f est strictement croissante.
Et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2e^{4x^2} - e^{x^2} = e^{x^2}(2e^{3x^2} - 1)$.
Or : $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow e^{3x^2} \geqslant 1 \Rightarrow 2e^{3x^2} - 1 \geqslant 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ et g est strictement croissante.
3. $\forall t \geqslant 0, e^{t^2} \geqslant 1$ donc par croissance de l'intégrale,
$\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant \int_0^x 1dt = x$ et $g(x) \geqslant \int_x^{2x} 1dt = x$.
Par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1,$
$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1.$
Ainsi : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

$\boxed{\text{EXERCICE 49.}}$
Soit $f :]-1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_0^1 \frac{t}{1+xt}dt$. À l'aide du changement de variable $u = xt$, montrer que f est continue sur $]-1\,;+\infty[$.

Correction n° 49.
$u : t \mapsto xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$.
$du = xdt$ donc pour $x \neq 0$, $dt = \frac{1}{x}du$. Ainsi, pour $x \neq 0$,
$f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{u}{1+u}du = \frac{1}{x^2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+u}du = \frac{1}{x^2}\left[u - \ln(1+u)\right]_0^x = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$
Ceci montrer déjà que f est continue sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
De plus, $f(0) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$ et au voisinage de 0 :
$f(x) = \frac{x - (x - x^2/2 + o(x^2))}{x^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$
Donc f est continue en 0 aussi.

1.6 Limites, continuité, dérivabilité

$\boxed{\text{EXERCICE 50.}}$
Déterminer l'existence des limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s). Donner leur valeur lorsqu'elles existent.

1. $h : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{x^2}$ en 0, en $+\infty$.
2. $j : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$.
3. $f : x \mapsto \frac{\ln^2(\cos x)}{x^2}$ en 0.
4. $g : x \mapsto \frac{\cos x - e^x}{x^2}$ en 0, en $+\infty$.

Correction n° 50.

1. • $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\sin^3 x \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ donc $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.
• $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ donc par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
2. • $\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ donc $\lim_{x\to 0} j(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 54.

On considère la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :
$\forall x \in [0\,;1],\quad f(x) = x^n(x-1)^n$.

1. Justifier que :
$\forall k \in [\![0\,;n-1]\!],\quad f^{(k)}(0) = 0$.
2. Justifier de même que :
$\forall k \in [\![0\,;n-1]\!],\quad f^{(k)}(1) = 0$.
3. Montrer que, pour tout k de $[\![1\,;n]\!]$, $f^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans l'intervalle $]0\,;1[$.
Conseil : On pourra commencer par étudier précisément les cas $k=1$, puis $k=2$, ...

Correction n° 54.

1. C'est une conséquence directe du cours sur les polynômes car 0 est une racine d'ordre de multiplicité n de f.
2. C'est une conséquence directe du cours sur les polynômes car 1 est une racine d'ordre de multiplicité n de f.
3. Comme f est dérivable sur $[0\,;1]$ et $f(0)=f(1)$, d'après de le théorème de Rolle, il existe $a_1 \in]0\,;1[$ tel que $f'(a_1)=0$.
Comme f' est dérivable sur $[0\,;1]$ et $f'(0)=f'(a_1)=f'(1)=0$, d'après de le théorème de Rolle, il existe $b_1 \in]0\,;a_1[$ et $b_2 \in]a_1\,;1[$ tels que $f''(b_1)=f''(b_2)=0$.
Comme f'' est dérivable sur $[0\,;1]$ et $f''(0)=f''(b_1)=f''(b_2)=f''(1)=0$, d'après de le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]0\,;b_1[$, $c_2 \in]b_1\,;b_2[$ et $c_3 \in]b_2\,;1[$ tels que $f^{(3)}(c_1)=f^{(3)}(c_2)=f^{(3)}(c_3)=0$.
Et on peut poursuivre ce raisonnement par récurrence tant que $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ sont nulles...

Exercice 55.

Étudier la dérivabilité de $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos\sqrt{x}$.

Correction n° 55.

- $\sqrt{.}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et prend ses valeurs dans $]0\,;+\infty[$. cos est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc par composition f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
- $\forall x>0,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}$.

Comme $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\cos(\sqrt{x}) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\sqrt{x}^2/2$, donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} -1/2$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2}$, f est dérivable en 0.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 56.

Soit $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer la classe de dérivabilité de la fonction f.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On notera encore f le prolongement par continuité de f en 0.
4. Étudier si le prolongement obtenu est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.
5. Quel est le plus grand réel α tel que f réalise une bijection de $[0\,;\alpha]$ sur $f([0\,;\alpha])$?
6. Soit $\mathrm{I} = [0\,;\alpha]$ et $\mathrm{J} = f([0\,;\alpha])$.
On note $g : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ la bijection réciproque de f. Justifier que g est dérivable sur $\mathrm{K} = f(]0\,;\alpha[)$, et donner une expression de sa dérivée.

Correction n° 56.

1. $\forall x>0, f(x) = \exp(x\ln x)$ est dérivable avec
$\forall x>0, f'(x) = (\ln x+1)\exp(x\ln x)$, qui est du signe de $\ln x + 1$ c'est-à-dire strictement négative sur $]0\,;\mathrm{e}^{-1}[$ et strictement positive sur $]\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.
f est strictement décroissante sur $]0\,;\mathrm{e}^{-1}]$ et strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.
2. Comme $x \mapsto x\ln x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ et exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ par composition.
3. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.
4. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\exp(x\ln x)-1}{x}$,
et comme $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\exp(x\ln x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$
Donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$: f n'est pas dérivable en 0.
5. Sur $[0\,;\mathrm{e}^{-1}]$, f est continue et strictement décroissante, donc est une bijection. Mais si $\alpha > \mathrm{e}^{-1}$, f n'est plus strictement monotone au voisinage de e^{-1} et certains réels ont la même image : f n'est plus injective. Le plus grand α possible est e^{-1}.
6. Comme f est dérivable sur $]0\,;\mathrm{e}^{-1}[$ et comme sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, g est dérivable sur K.
Soit $y \in \mathrm{K}$ et $x \in]0\,;\mathrm{e}^{-1}[$ tels que $y = f(x)$.
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{(\ln(g(y))+1)\exp(g(y)\ln(g(y)))} = \frac{1}{(\ln(x)+1)\exp(x\ln(x))}$$

Exercice 57.

Soit u la suite définie par

- pour $u < 0$:
$\left|\int_0^u \frac{u-t}{1!}\sin^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_u^0 \frac{u-t}{1!}\sin^{(2)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^0 \left|(u-t)\sin^{(2)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_u^0 (t-u)\mathrm{d}t$,
et $\int_0^u (u-t)\mathrm{d}t \overset{x=t-u}{=} \int_{-u}^0 x\mathrm{d}x = \frac{u^2}{2}$.
- Bon bin voilà, on peut affirmer que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ |\sin u - u| \leqslant \frac{u^2}{2}.$$

2. Pour $u > 0$, $\int_u^{2u} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln|x|]_u^{2u} = \ln(2u) - \ln(u) = \ln(2) + \ln(u) - \ln(u) = \ln 2$
3. Pour $u > 0$:
$\left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x - \ln 2\right| = \left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_u^{2u} \frac{\sin x - x}{x^2}\mathrm{d}x\right|$
Par l'inégalité triangulaire et par 1. :
$\left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x - \ln 2\right| \leqslant \int_u^{2u} \frac{|\sin x - x|}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_u^{2u} \frac{1}{2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{u}{2}$
Par encadrement : $\left|\int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x - \ln 2\right| \xrightarrow[u\to 0+]{} 0$
$\lim\limits_{u\to 0+} \int_u^{2u} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x = \ln 2.$

EXERCICE 59.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
Justifier que $\mathcal{B} = \left(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, \ldots, (\mathrm{X}+1)^n\right)$ est une base de E.
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. Justifier que les coordonnées de P dans $\mathcal{B}$ sont $\left(\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}'(-1), \frac{\mathrm{P}''(-1)}{2!}, \ldots, \frac{\mathrm{P}^{(n)}(-1)}{n!}\right)$.
3. Déterminer les coordonnées de $\mathrm{P} = 4\mathrm{X}^3 + 15\mathrm{X}^2 + 20\mathrm{X} + 10$ dans la base $\left(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, (\mathrm{X}+1)^3\right)$.

Correction n° 59.

1. La famille $\mathcal{B}$ est constituée de $n+1$ vecteurs échelonnés en degré de 1 à n : c'est une base de E.
2. En appliquant la formule de Taylor en -1 avec reste intégral à l'ordre n à P qui est $\mathcal{C}^\infty$, le reste intégral est nul car $\mathrm{P}^{(n+1)} = 0$, d'où :
$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k.$
3. Les coordonnées de P dans $(1, \mathrm{X}+1, (\mathrm{X}+1)^2, (\mathrm{X}+1)^3)$ sont $\left(\mathrm{P}(-1), \mathrm{P}'(-1), \frac{\mathrm{P}''(-1)}{2}, \frac{\mathrm{P}^{(3)}(-1)}{6}\right) = (1, 2, 3, 4)$.

EXERCICE 60.

Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \exp(x^2)$ en 0 à l'ordre 3

1. à l'aide de la formule de Taylor-Young ;
2. à l'aide du développement limité de exp.

Correction n° 60.

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition.
$f(0) = 1$, $f'(x) = 2x\exp(x^2)$ donc $f'(0) = 0$, $f''(x) = (2+4x^2)\exp(x^2)$ donc $f''(0) = 2$ et $f^{(3)}(x) = (12x + 8x^2)\exp(x^2)$ donc $f^{(3)}(0) = 0$.
Par la formule de Taylor-Young : $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
2. $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$.
Posons $u = x^2$, on a bien $u \to 0$ quand $x \to 0$.
Alors $\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$.
Et comme $\frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$,
$f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
Cette méthode est bien plus rapide, mais attention, un développement limité à l'ordre 1 de exp aurait été insuffisant. Il aurait donné : $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

2 Algèbre

2.1 Dénombrements, applications et ensembles

EXERCICE 61.

Dans chacun des cas suivants, on donne un ensemble E et des parties A et B de E : déterminer $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$.

1. $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = [0;2]$ et $\mathrm{B} =]-1;1[$.
2. $\mathrm{E} = \{1;2;3;4;5\}$, $\mathrm{A} = \{1;3;4\}$ et $\mathrm{B} = \{3;5\}$.
3. $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{B} = [0;12]$.

Correction n° 61.

1. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} =]-1;2]$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = [0;1[$, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = [1;2]$, $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} =]-1;0[$.
2. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1;3;4;5\}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{3\}$, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{1;4\}$, $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \{5\}$.
3. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathbb{Z}^- \cup]0;12[\cup [\![12;+\infty[\![$ (par exemple), $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = [\![1;12]\!]$,

EXERCICE 66.

Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$, puis

$\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} 2k\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}(2k+1)\binom{n}{2k+1}$.

Correction n° 66.

Notons $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$.

$\mathrm{P}_n + \mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} \overset{binme}{=} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n \quad (1).$

$\mathrm{P}_n - \mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} \overset{binme}{=} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i(-1)^{n-i} = (1-1)^n = 0^n = 0 \text{ si } n \geqslant 1 \quad (2).$

$(1)+(2)$ donne $\mathrm{P}_n = 2^{n-1}$ et $(1)-(2)$ donne $\mathrm{I}_n = 2^{n-1}$.
Cas particulier : $n = 0 \Rightarrow \mathrm{P}_0 = 1$ et $\mathrm{I}_0 = 0$.

Pour les deux autres sommes, on peut utiliser $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$:

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} 2k\binom{n}{2k} = \sum_{1\leqslant 2k\leqslant n} 2k\binom{n}{2k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} n\binom{n-1}{2k-1} = n\mathrm{I}_{n-1} = n2^{n-2}$$

$$\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}(2k+1)\binom{n}{2k+1} = \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} n\binom{n-1}{2k} = n\mathrm{P}_{n-1} = n2^{n-2}$$

Cas particuliers pour $n = 0$ et $n = 1$...

EXERCICE 67.

Montrer que :

$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![0\,;p]\!],\ \displaystyle\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$

On pourra exprimer $\binom{k}{n}$ à l'aide de $\binom{k+1}{n+1}$ et $\binom{k}{n+1}$.

Correction n° 67.

Pascal : $\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$. Puis par télescopage :

$$\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{p}\left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}\right) = \binom{p+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{p+1}{n+1}.$$

EXERCICE 68.

On considère un jeu de dominos dont chaque moitié est frappée de 0 à 9 points.

1. De combien de dominos est constitué un tel jeu ?
2. Que vaut la somme de tous les points marqués sur ces dominos ?

Correction n° 68.

1. L'ensemble de dominos peut-être représenté par $\{(i,j) \in [\![0\,;9]\!]^2 / i \leqslant j\}$. On impose $i \leqslant j$ pour éviter de compter des dominos en double.
Il y exactement 10 dominos du type $(0,j)$, puis 9 dominos du type $(1,j)$, etc.... et 1 domino $(9,9)$. Soit au total $10+9+\cdots+2+1 = 10\times 11/2 = 55$ dominos.
2. Le chiffre i apparaît exactement 11 fois : 2 fois sur le domino (i,i) et 9 fois en "simple".
La somme totale vaut donc $11\times 0 + 11\times 1 + \cdots + 11\times 9 = 11\times(0+1+\cdots+9) = 11\times 9\times 10/2 = 495$.

EXERCICE 69.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche le nombre de façons F_n de payer une somme de n euros à l'aide exclusivement de pièces de 1 ou 2 euros, d'abord sans tenir compte de l'ordre dans lequel on débourse les pièces, puis en en tenant compte.

1. Lorsque l'on ne tient pas compte de l'ordre, déterminer F_n pour $n = 0,1,2,3$ et 4 puis montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{F}_n = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$.
Jusqu'à la fin de l'exercice, on tient compte de l'ordre dans lequel on débourse les pièces.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \left(-\varphi^{-1}\right)^{n+1}\right),$$
où $-\varphi^{-1} < \varphi$ sont les deux racines de $x^2 - x - 1$.
3. *Première méthode*
   a) En notant k le nombre de pièces de 2 euros utilisées, montrer que $\mathrm{F}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}$.
   b) Montrer à l'aide de la formule de Pascal que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$.
   c) En déduire F_n pour tout n de $\mathbb{N}$.
4. *Seconde méthode*

2. Soit k un entier de $[\![0\,;m]\!]$. Combien de ces parties ont exactement k éléments dans A ?

3. Justifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}=\binom{a+b}{m}$.

4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ et montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\leqslant 4^n$.

Correction n° 71.

1. Il y en a $\binom{a+b}{m}=\binom{n}{m}$, c'est dans le cours.

2. Recensons les parties à m éléments dont exactement k sont dans A. On choisit k éléments de A - il y a $\binom{a}{k}$ possibilités -, puis à chaque fois $m-k$ éléments dans le complémentaire de A - soit $\binom{b}{m-k}$. Au total, il y a $\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}$ parties de ce type.

3. Parmi les parties $\binom{a+b}{m}$ à m éléments, il y en a exactement $\binom{a}{0}\binom{b}{m-0}$ sans élément dans A, $\binom{a}{1}\binom{b}{m-1}$ avec 1 élément dans A, $\binom{a}{2}\binom{b}{m-2}$ avec 2 éléments dans A, etc.
D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}=\binom{a+b}{m}$.

4. Prenons la formule précédente avec $a=b=m=n$:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$, or $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$,
donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.
Et comme $\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'une ensemble à $2n$ éléments alors que 2^{2n} est le nombre total de parties d'un ensemble à $2n$ éléments (et pas seulement celles à n éléments),
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\leqslant 2^{2n}=4^n$.

EXERCICE 72.

Montrer que l'application suivante est bijective :

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z},n\mapsto\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair}\\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}.$$

Correction n° 72.

Il est conseillé de calculer les premières valeurs de f pour comprendre ... $f(0)=?$, $f(1)=?$, $f(2)=?$, $f(3)=?$,...

- Si n et m sont pairs, $f(n)=f(m)\Rightarrow \dfrac{n}{2}=\dfrac{m}{2}\Rightarrow n=m$.

Si n et m sont impairs, $f(n)=f(m)\Rightarrow -\dfrac{n+1}{2}=-\dfrac{m+1}{2}\Rightarrow n=m$.
Si n est pair et m est impair, alors $f(n)\geqslant 0>f(m)$ donc $f(n)\neq f(m)$.
Bilan : f est injective.

- Soit $m\in\mathbb{Z}$.

Si $m\geqslant 0$, alors $m=f(2n)$.
Si $m<0$, alors $m=f(-2n-1)$.
Bilan : f est surjective.
Sur-bilan : f est bijective.

EXERCICE 73.

Soit E un ensemble. On rappelle qu'une *partition de* E est un ensemble $\{A_1,A_2,\dots,A_p\}$ de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont la réunion vaut E. Lorsque que $E=[\![1\,;n]\!]$ (où $n\in\mathbb{N}^*$), on note π_n le nombre de partitions possibles de E. On convient que $\pi_0=1$.

1. Que valent π_1, π_2 et π_3 ?

2. En considérant le cardinal de la partie qui contient l'élément 1, montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \pi_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi_k.$$

3. En déduire π_4 et π_5.

Correction n° 73.

1.
- Il n'y a qu'une partition de $E_1=\{1\}$, celle formée du singleton $\{1\}$: $\pi_1=1$.
- Il y a deux partitions de $E_2=\{1;2\}$, $E_2=\{1\}\cup\{2\}=\{1;2\}$: $\pi_2=2$.
- Il y a cinq partitions de $E_3=\{1;2;3\}$,
$E_3=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}=\{1;2\}\cup\{3\}=\{1;3\}\cup\{2\}=\{2;3\}\cup\{1\}=\{1;2;3\}$: $\pi_3=5$.

2. Classons les différentes partitions de E_{n+1} suivant le cardinal de la partie U qui contient 1. Soit k le nombre d'éléments de U autres que 1, de sorte que $0\leqslant k\leqslant n$.
Pour $k=0$, $U=\{1\}$, et il reste n éléments à partitionner, soit π_n possibilités.

Correction n° 77.
$\Delta = -1 = i^2$, les solutions sont $z_1 = 3$ et $z_2 = 3 - i$.

EXERCICE 78.
Exprimer $\sin^3(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'aide de $\sin(3\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

Correction n° 78.
$\sin^3 \alpha = \left(\dfrac{e^{i\alpha} - e^{i-\alpha}}{2i}\right)^3 = \dfrac{1}{(2i)^3}(e^{i3\alpha} - 3e^{i\alpha} + 3e^{i-\alpha} - e^{i-3\alpha})$
$= \dfrac{-1}{4\times 2i}((e^{i3\alpha} - e^{i-3\alpha}) - (3e^{i\alpha} - 3e^{i-\alpha})) = \dfrac{-1}{4}(\sin(3\alpha) - 3\sin\alpha)$
$\sin^3 \alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin(3\alpha)}{4}$

EXERCICE 79.
Exprimer $\cos(3\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'aide de $\cos^3(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

Correction n° 79.
$\cos^3 \alpha = \left(\dfrac{e^{i\alpha} + e^{i-\alpha}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2^3}(e^{i3\alpha} + 3e^{i\alpha} + 3e^{i-\alpha} + e^{i-3\alpha})$
$= \dfrac{1}{4\times 2}((e^{i3\alpha} + e^{i-3\alpha}) + 3e^{i\alpha} + 3e^{i-\alpha}) = \dfrac{1}{4}(\cos(3\alpha) + 3\cos\alpha)$
$\cos^3 \alpha = \dfrac{\sin(3\alpha) + 3\sin(\alpha)}{4}$

2.3 Polynômes

EXERCICE 80.
Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 1$.

Correction n° 80.
Soit R le reste. Puisque $\deg(X^2 - 1) = 2$, $\deg R \leqslant 1$ donc $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, R = a_nX + b_n$.
On évalue $X^n = (X^2 - 1)Q + a_nX + b_n$ en $X = 1$ puis $X = -1$:

$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n \\ (-1)^n = -a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = (1-(-1)^n)/2 \\ b_n = (1+(-1)^n)/2 \end{cases}, \ R = \frac{1-(-1)^n}{2}X + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

EXERCICE 81.
Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 1$.

Correction n° 81.
Soit R le reste. Puisque $\deg(X^2 + 1) = 2$, $\deg R \leqslant 1$ donc $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, R = a_nX + b_n$.
On évalue $X^n = (X^2 + 1)Q + a_nX + b_n$ en $X = i$ puis $X = -i$:

$$\begin{cases} i^n = a_n i + b_n \\ (-i)^n = -a_n i + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = (i^n - (-i)^n)/(2i) \\ b_n = (i^n + (-i)^n)/2 \end{cases},$$

Si n est pair : $R = (-1)^{n/2}$.
Si n est impair : $R = (-1)^{(n-1)/2}X$

EXERCICE 82.
L'objectif est de résoudre le système (S) d'inconnues a, b et c :

$$(S)\begin{cases} a < b < c \\ a + b + c = 9 \\ abc = 15 \\ ab + ac + bc = 23 \end{cases}$$

1. Déterminer un polynôme P dont a, b et c sont les racines.
2. En déduire toutes les solutions de (S).

Correction n° 82.

1. $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ admet exactement a, b et c pour racines. En développant : $P(X) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$, donc $P(X) = X^3 - 9X^2 + 23X - 15$.
2. Puisque P est de degré 3, on essaie des racines "évidentes". $P(1) = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$ donc P est factorisable par $X - 1$. Par division euclidienne (ou par toute autre méthode), $P(X) = (X-1)(X^2 - 8X + 15) = (X-1)(X-3)(X-5)$: les racines de P sont 1, 3 et 5, et la première condition de (S) impose $a = 1$, $b = 3$ et $c = 5$.

EXERCICE 83.
Factoriser $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction n° 83.
Cherchons les racines de P.
$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow (z^2 = i \text{ ou } z^2 = -i)$.
Comme $i = e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi/4}$ et $-e^{i\pi/4} = e^{i5\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$ sont les racines carrées de i.
Les racines carrées de $-i$ sont alors :
$ie^{i\pi/4} = e^{i3\pi/4}$ et $-ie^{i\pi/4} = e^{i7\pi/4} = e^{-i\pi/4}$.
La factorisation de R sur $\mathbb{C}$ est alors :
$P = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4})(X - e^{i3\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})$.
La factorisation sur $\mathbb{R}$ s'obtient en regroupant les racines complexes conjuguées car $(X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha}) = X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. La fonction nulle est dans C et dans E_0. Toute combinaison linéaire de fonctions constantes (respectivement de fonctions tendant vers 0 en $+\infty$) est une fonction constante (respectivement une fonction tendant vers 0 en $+\infty$).
Donc C et E_0 sont deux sous-espaces vectoriels de E.

3. Soit $f \in E$. Soit $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$, g la fonction constante égale à ℓ et $h = f - g = f - \ell$.
Alors : $f = g + h$, $g \in C$ et $h \in E_0$.
Toute fonction de E est la somme d'une fonction de C et d'une fonction de E_0.
Supposons $f = g + h = g_1 + h_1$, $g, g_1 \in C$ et $h, h_1 \in E_0$.
Alors $g - g_1 = h_1 - h$ est constante et tend vers 0, donc est nulle. D'où $g = g_1$ et $h = h_1$: la décomposition est bien unique.

2.5 Matrices et systèmes linéaires

EXERCICE 88.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si
$$^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}.$$

1. Donner un exemple de matrice antisymétrique non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la somme de deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.
3. Que peut-on dire du produit de deux matrices antisymétriques ?
4. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Correction n° 88.

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.
2. Soit A et B antisymétriques. $^t(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B} = -\mathrm{A} - \mathrm{B} = -(\mathrm{A}+\mathrm{B})$: $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est antisymétrique.
3. Soit A et B antisymétriques. $^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A} = (-\mathrm{B})(-\mathrm{A}) = \mathrm{BA}$: le produit de deux matrices antisymétriques n'est a priori pas antisymétrique.
4. *Analyse* - Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe S symétrique et A antisymétrique telles que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$.
$^t\mathrm{M} = {}^t\mathrm{S} + {}^t\mathrm{A} = \mathrm{S} - \mathrm{A}$. Ainsi :
$$\begin{cases} \mathrm{S} + \mathrm{A} = \mathrm{M} \\ \mathrm{S} - \mathrm{A} = {}^t\mathrm{M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{S} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) \\ \mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}) \end{cases}$$
Ceci montre que s'il y a une solution, celle-ci est **unique**.
Synthèse - Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.
Soit : $\begin{cases} \mathrm{S} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) \\ \mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}) \end{cases}$
Alors :
   - $\mathrm{S} + \mathrm{A} = \mathrm{M}$;
   - $^t\mathrm{S} = \frac{1}{2}({}^t\mathrm{M} + {}^t({}^t\mathrm{M})) = \frac{1}{2}({}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}) = \mathrm{S}$: S est symétrique ;
   - $^t\mathrm{A} = \frac{1}{2}({}^t\mathrm{M} - {}^t({}^t\mathrm{M})) = \frac{1}{2}({}^t\mathrm{M} - \mathrm{M}) = -\mathrm{A}$: A est antisymétrique.

   M est bien la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

EXERCICE 89.

1. Justifier que $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $^t\mathrm{MM}$ et retrouver M^{-1} grâce à ce calcul.

Correction n° 89.

1. $\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on n'oubliera pas de signaler au bon moment que M est inversible car $\mathrm{rg(M)} = 3$ et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. $^t\mathrm{MM} = 2\mathrm{I}_3$ donc $\left(\frac{1}{2}{}^t\mathrm{M}\right)\mathrm{M} = \mathrm{I}_3$ ce qui prouve que M est inversible d'inverse $\frac{1}{2}{}^t\mathrm{M}$, ce que l'on peut remarquer sur l'expression de 1..

EXERCICE 90.

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^3.
2. En déduire M^n pour tout entier naturel n.
3. Justifier que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Correction n° 90.

1. $\mathrm{M}^3 = \mathrm{I}_3$.
2. Si $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{M}^n = (\mathrm{M}^3)^k = \mathrm{I}_3$.

Correction n° 95.

1. $M^2 - M - 2I_2 = 0_2$.
2. Soit R le reste cherché. Comme $\deg P = 2$, $\deg R \leqslant 1$. Écrivons $R = aX + b$. Les racines de P sont 2 et -1.
$X^n = Q(X)P(X) + aX + b$ donne pour $X = 2$ et $X = -1$:
$$\begin{cases} 2^n = 2a + b \\ (-1)^n = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (2^n - (-1)^n)/3 \\ b = (2^n + 2(-1)^n)/3 \end{cases}$$
$R = \frac{1}{3}((2^n - (-1)^n)X + (2^n + 2(-1)^n))$.
3. Comme $P(M) = 0$, $X^n = Q(X)P(X) + aX + b$ évaluée en $X = M$ donne $X^n = \frac{1}{3}((2^n - (-1)^n)M + (2^n + 2(-1)^n)I_2)$.

2.6 Applications linéaires

Exercice 96.

On traitera le plus de questions grâce aux matrices. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $p : E \longrightarrow E$, $(x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2}(x + z, 2y, x + z)$.

1. Déterminer la matrice M représentant p dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de p en en donnant une base.
3. Montrer qu'ils sont supplémentaires.
4. Déterminer un endomorphisme q de E vérifiant $p + q = \mathrm{Id}_E$ en donnant explicitement la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$, puis en donnant l'image du vecteur (x, y, z) de E par q.
5. Déterminer le noyau et l'image de q en en donnant une base.
6. Vérifier que $\mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}q$ et $\mathrm{Im}q = \mathrm{Ker}p$.

Correction n° 96.

1. $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$, $\mathrm{Im}p = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.
3. • On peut montrer que la concaténation des deux bases de Ker$p$ et Imp donne une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^3$ (grâce à la dimension)
   • On peut montrer que $\mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Im}p = \{0\}$, puis invoquer $\dim \mathrm{Ker}p + \dim \mathrm{Im}p = \dim \mathbb{R}^3$...
4. Soit $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$. $p + q = id_E \Rightarrow M + N = I_3 \Rightarrow N = I_3 - M$
$$N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } q(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - z, 0, -x + z).$$
5. $\mathrm{Ker}q = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ et $\mathrm{Im}q = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$.

Exercice 97.

On traitera toutes les questions grâce aux matrices. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $f : E \longrightarrow E$, $P \longmapsto P - P'$ et $g = \alpha \mathrm{Id}_E - f$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que g soit un automorphisme de E.
3. Déterminer le noyau et l'image de g en donnant une base de chacun de ces espaces.

Correction n° 97.

1. f est linéaire, de E dans E. De plus, $f(P) = 0 \Leftrightarrow P = P'$. Or si P est non nul, $\deg(P') < \deg(P)$ et $P \neq P'$. Donc $f(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$, et $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.
f est injectif, et comme E est de dimension finie, f est un automorphisme.
2. g est un endomorphisme car différence d'endomorphismes. $g(P) = 0 \Leftrightarrow \alpha P - P + P' = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha)P = P'$.
   • 1er cas : $\alpha = 1$. $g(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow$ (P *constant*). $\mathrm{Ker}g = \mathbb{R}_0[X]$ et g n'est pas injectif.
   • 2nd cas : $\alpha \neq 1$. $g(P) = 0 \Rightarrow \deg P = \deg P' \Rightarrow P = 0$. $\mathrm{Ker}g = \{0\}$, et g injectif, et comme E est de dimension finie, g est un automorphisme.
   g automorphisme si, et seulement si, $\alpha \neq 1$.
3. • 1er cas : $\alpha = 1$. $g : P \mapsto P'$, $\mathrm{Ker}g = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}g = \mathrm{Vect}((g(X^k))_{0 \leqslant k \leqslant n}) = \mathrm{Vect}(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $(1, 2X, \dots, nX^{n-1})$ est échelonnée en degré de 0 à $n - 1$. .
   • 2nd cas : $\alpha \neq 1$. g est un automorphisme, donc $\mathrm{Ker}g = \{0\}$ et $\mathrm{Im}g = E$.

Exercice 98.

On traitera toutes les questions grâce aux matrices. $\mathcal{B}$ désignera la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On considère un réel α et l'application f définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par
$$f(P) = (X^2 - 1)P'' + \alpha P.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans $\mathcal{B}$.
2. À quelle condition sur α f est-il un automorphisme de E ?

Reste à normaliser :
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0),(0,0,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,0,2)\right)$ est une base orthonormale de F.

- $(x,y,z,t)\in F \Leftrightarrow x-y+t=0 \Leftrightarrow \langle (x,y,z,t),(1,-1,0,1)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x,y,z,t)\in (\mathrm{Vect}((1,-1,0,1)))^{\perp}$, donc $F^{\perp}=\mathrm{Vect}((1,-1,0,1))$.

Et une base orthonormale de $F^{\perp}$ est $(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1))$.

Exercice 100. Recherche de minimums

Déterminer :

1. $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left((x-y+1)^2+(y-1)^2\right)$ (se fait de tête !) ;
2. $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left((x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2\right)$.
3. $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left((2-x-y)^2+(1-x)^2+(1-2x-y)^2\right)$.

Correction n° 100.

1. $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left((x-y+1)^2+(y-1)^2\right)$? (se fait effectivement de tête !)
$(x-y+1)^2+(y-1)^2$ est positif, et s'annule pour $x-y+1=0$ et $y-1=0$, donc pour $(x,y)=(0,1)$. Le minimum cherché est 0.
2. $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left((x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2\right)$?
Soit $f:(x,y)\mapsto (x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2$. Le raisonnement précédent ne s'applique plus car $\begin{cases} x-y+1=0\\ y-1=0\\ x+y=0\end{cases}$ n'a aucune solution, donc f est certes positive mais ne s'annule pas.
On peut écrire, en utilisant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$:
$f(x,y)=(x-y+1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2=\|(x-y+1,y-1,x+y)\|^2=\|x(1,0,1)+y(-1,1,1)-(-1,1,0)\|^2=\|xu+yv-b\|^2$ où $u=(1,0,1)$, $v=(-1,1,1)$ et $b=(-1,1,0)$.
Alors $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\|xu+yv-b\|^2=\min\limits_{w\in\mathrm{Vect}(u,v)}\|w-b\|^2$.
D'après la propriété de minimisation en norme, ce minimum est atteint pour $w=p_{\mathrm{Vect}(u,v)}(b)$.
Une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u,v)$ est (u',v') où $u'=\frac{1}{\sqrt{2}}u$ et $v'=\frac{1}{\sqrt{3}}v$.
$w=p_{\mathrm{Vect}(u,v)}(b)=\langle b,u'\rangle u'+\langle b,v'\rangle v'=\frac{1}{2}\langle b,u\rangle u+\frac{1}{3}\langle b,v\rangle v=\frac{1}{6}(-7,4,1)$.
Ainsi : $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=\min\limits_{w\in\mathrm{Vect}(u,v)}\|w-b\|^2=\left\|\frac{1}{6}(-1,-2,1\right\|^2=\frac{1}{36}\times 6=\frac{1}{6}$.
3. $f(x,y)=\|(x+y-2,x-1,2x+y-1)\|^2=\|x(1,1,2)+y(1,0,1)-(2,1,1)\|^2$, donc en posant :
   - $v_1=(1,1,2)$, $v_2=(1,0,1)$ et $u=(2,1,1)$,
   - puis $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)=\{xv_1+yv_2/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$,

   alors lorsque (x,y) parcourt $\mathbb{R}^2$, xv_1+yv_2 parcourt F.
Ainsi, déterminer $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ revient à déterminer $\min\limits_{v\in F}\|v-u\|^2$.
Par la propriété de meilleure approximation en norme, on sait que ce minimum existe et est atteint lorsque $v=p_F(u)$.

Exercice 101. Quatre applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Montrer que le carré de la moyenne (arithmétique) de n nombres réels est inférieur (ou égal) à la moyenne (arithmétique) de leur carré.
2. Quel est le minimum de $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)$ pour $(a_i)_{i=1}^n\in(\mathbb{R}_+^*)^n$?
3. Quel est le minimum de
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$
pour f continue strictement positive sur $[a\,;b]$?
4. Soit $a<b$. Montrer que, pour toute fonction f continue sur $[a\,;b]$,
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\frac{1}{b-a}\int_0^1\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t.$$

Correction n° 101.

1. Soit $a_1,\dots,a_n$ n nombres réels.
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x=(a_i,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=\frac{1}{n}(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$.
Alors $(\langle x,y\rangle)^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2$ est le carré de la moyenne des $(a_i)_i$.
Et $\|x\|^2\|y\|^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)(n\times\frac{1}{n^2})=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$ est la moyenne des carrés des $(a_i)_i$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité voulue... avec égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux entre eux.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x=\left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $y=(\sqrt{a_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)=\|x\|^2\|y\|^2\geqslant\langle x,y\rangle^2=n^2$.

2. Calculer $\mathbb{P}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\big)$.
3. Que signifie cette dernière probabilité ?

Correction n° 105.

1. Soit N_i l'événement « une boule noire sort au $i^{\text{ème}}$ tirage ». Alors $\mathrm{B}_n = \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{N}_n$, et par la formule des probabilités composées,
$\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{N}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{N}_2)\ldots\mathbb{P}_{\mathrm{M}_1\cap \mathrm{N}_{n-1}}(\mathrm{N}_n) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n+1}\times = \dfrac{1}{n+1}$.
2. La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante car : $\forall n \geqslant 1, \mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n \cap \mathrm{N}_{n+1} \subset \mathrm{B}_n$.
Par la propriété de continuité monotone : $\mathbb{P}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = 0$
3. L'événement « la boule blanche ne sort jamais » est quasi-impossible (ou presque-impossible), ou encore « la boule blanche sort » est quasi-certain (ou presque-sûr).

Exercice 106.

On dispose de trois pièces équilibrée dont une a deux « faces ». On prend une pièce au hasard et on effectue des lancers indépendant de cette pièce.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » au premier lancer ?
2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir « face » au cours des n premiers lancers.
3. Sachant que l'on a obtenu « face » au cours de n premiers lancers, on note p_n la probabilité que l'on ait choisi la pièce truquée. Déterminer p_n.
4. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$? Ce résultat était-il prévisible ?

Correction n° 106.

1. Soit T l'événement « la pièce choisie est la pièce truquée » et F_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer donne face ».
$(\mathrm{T}, \overline{\mathrm{T}})$ étant un système complet, la formule des probabilités totales donne :
$\mathbb{P}(\mathrm{F}_1) = \mathbb{P}(\mathrm{T})\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{F}_1) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{T}})\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{F}_1) = \dfrac{1}{3}\times 1 + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
2. De la même façon,
$\mathbb{P}(\mathrm{F}_1 \cap\cdots\cap \mathrm{F}_n) \overset{\text{FPT}}{=} \dfrac{1}{3}\times 1 + \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.
3. Notons $\mathrm{S}_n = \mathrm{F}_1 \cap\cdots\cap \mathrm{F}_n$.
$p_n = \mathbb{P}(\mathrm{T})_{\mathrm{S}_n} \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{T})\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{S}_n)}{\mathbb{P}(\mathrm{S}_n)} = \dfrac{1/3}{(1+(1/2^{n-1}))/3} = \dfrac{1}{1+(1/2^{n-1})}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$: plus on a une grande série ininterrompue de faces, plus il est probable que l'on utilise la pièce truquée.

3.2 Variables aléatoires

Exercice 107.

Soit k un entier naturel et X une variable aléatoire répartie uniformément sur les nombres pairs de 0 à $2k$.

1. a) Déterminer la loi de X.
   b) En déduire $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.
2. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/2 + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle et retrouver ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

Correction n° 107.

1. a) $\mathrm{X}(\Omega) = \{0, 2, 4, \ldots, 2k\} = \{2i / i \in [\![0\,;k]\!]\}$ et $\forall i \in [\![0\,;k]\!], \mathbb{P}(\mathrm{X}=i) = \dfrac{1}{k+1}$.

   b) $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(2i)\times\frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i = \frac{2}{k+1}\times\frac{k(k+1)}{2} = k$.
   $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(2i)^2\times\frac{1}{k+1} = \frac{4}{k+1}\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{4}{k+1}\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{2k(2k+1)}{3}$.
   $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \dfrac{2k(2k+1)}{3} - k^2 = \dfrac{k^2+2k}{3}$

2. a) Soit $j = 2i \in \mathrm{X}(\Omega)$. Alors $\dfrac{j}{2}+1 = i+1 \in [\![1\,;k+1]\!]$.
   Donc $\mathrm{Y}(\Omega) \subset [\![1\,;k+1]\!]$, et $\forall j \in [\![1\,;k+1]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=j) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2(j-1)) = \dfrac{1}{k+1}$ car $j-1 \in [\![0\,;k]\!]$.
   Donc $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;k+1]\!])$, et comme $\mathrm{X} = 2(\mathrm{Y}-1) = 2\mathrm{Y}-2$,
   $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 2\mathbb{E}(\mathrm{Y}) - 2 = 2\times\dfrac{(k+1)+1}{2} - 2 = k$
   $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 4\mathbb{V}(\mathrm{Y}) = 4\times\dfrac{(k+1)^2-1}{12} = \dfrac{k^2+2k}{3}$

Exercice 108. *Lois uniformes*

Soient $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1\,;ab]\!]$. On suppose que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in [\![1\,;ab]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

1. Quelles conditions doivent vérifier les entiers a et b ?
2. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et trouver a et b tels que $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{13}{2}$.