

Variables aléatoires

Dans tout le chapitre, on travaille avec un espace probabilisé fini (Ω, P) et E un ensemble.

I Variables aléatoires et ses lois

1. Définitions générales

1 Définition : Une variable aléatoire est une application X de Ω dans E .

Une variable aléatoire réelle est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$.

2 Notation : Ω est fini, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ où $n = \text{card} \Omega$. Donc $X(\Omega) = \left\{ \underbrace{X(\omega_1), X(\omega_2), \dots, X(\omega_n)}_{\text{pas tous distincts!!}} \right\} \subset E$ est fini et $m =$

$\text{card}(X(\Omega)) \leq n = \text{card}(\Omega)$ (il y aura égalité des cardinaux si et seulement si tous les réels x_i sont distincts si et seulement si X est injective). En fait $X(\Omega) = \{X(\omega_{i_1}), X(\omega_{i_2}), \dots, X(\omega_{i_m})\}$ tel que $m \leq n$ et $(k \neq l \Rightarrow X(\omega_{i_k}) \neq X(\omega_{i_l}))$.

On notera désormais $x_k = X(\omega_{i_k})$ et $X(\Omega) = \left\{ \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{\text{tous distincts}} \right\}$ et on peut simplement prendre $E = \left\{ \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{\text{tous distincts}} \right\}$.

3 Définitions : Soit A une partie de $X(\Omega)$ i.e. A est un évènement de l'univers $X(\Omega)$.

Alors, l'évènement $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$ est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ et se lit l'évènement X appartient à A .

$(X \in A)$ est donc l'ensemble des antécédents par X des éléments de A .

et $P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\})$ est noté $P(X \in A)$: c'est la probabilité que X réalise A .

Deux cas particuliers :

- Si $x \in E$ et $A = \{x\}$ alors l'évènement $(X \in \{x\})$ est noté $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ et se lit « X vaut x » et $(X = x)$ contient tous les antécédents de x par X .

$$\stackrel{\text{def.}}{P(X = x)} \stackrel{\text{def.}}{=} P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}) = \text{probabilité que } X \text{ vaille } x.$$

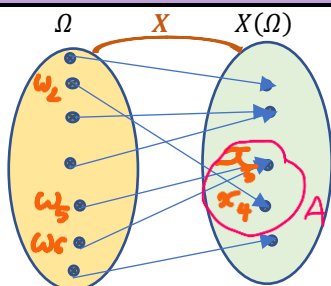
- Si $E = \mathbb{R}$ et $A =]-\infty, x]$ alors $(X \in A) \stackrel{\text{noté}}{=} (X \leq x) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$

$$\stackrel{\text{def.}}{\text{et } P(X \leq x)} \stackrel{\text{def.}}{=} P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}) = \text{probabilité que } X \text{ soit inférieur à } x.$$

$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$$

4 NB : D'après le chapitre précédent, la probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires dont la réunion est A .

$$\text{Donc } \forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \text{t.q. } X(\omega) = x}} P(\omega) \text{ et } \forall A \subset X(\Omega), P(X \in A) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \text{t.q. } X(\omega) \in A}} P(\omega)$$



$$P(X = x_3) = P(\omega_2) + P(\omega_5)$$

$$P(X = x_4) = P(\omega_6)$$

$$P(X \in A) = P(\omega_2) + P(\omega_5) + P(\omega_6)$$

5 Proposition-Définition : L'application $P_X: \left(\begin{array}{l} \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0,1] \\ A \mapsto P(X \in A) \end{array} \right)$ est une probabilité sur l'univers $X(\Omega)$, appelée **loi de probabilité de X** . $P_X(A)$ est donc la probabilité que la variable aléatoire X soit dans A (X réalise A).

On note $X \sim Y$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires sur un même univers et telles que : $P_X = P_Y$.

6 NB : P_X est entièrement définie par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)} (= (P(X = x_i))_{i \in \{1, \dots, m\}})$.

Si toutes ces probabilités sont connues alors $\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$.

En particulier, $1 = P_X(X(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{i=1}^m P(X = x_i)$ où $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

On peut présenter la loi de probabilité par le tableau ci-contre :

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_m
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_m

7 NB : Si on ne considère pas $E = X(\Omega)$, alors $\forall x \in E \setminus X(\Omega), P(X = x) = 0$ et par conséquent $(P(X = x))_{x \in E}$ est égale à la distribution $(P(X = x_i))_{i \in \{1, \dots, m\}}$ à laquelle on a ajouté des zéros. P_X est donc aussi entièrement définie par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$.

2. Loi uniforme

8 Définition : Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un ensemble fini et X une variable aléatoire à valeurs dans E . X suit la **loi uniforme** sur E lorsque P_X est la probabilité uniforme sur E ; autrement dit, lorsque chaque valeur possible $x_1, x_2, \dots, x_m$ a la même probabilité d'être atteinte i.e. $\forall i \in \{1, \dots, m\}, P(X = x_i) = \frac{1}{m}$. On note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_m\})$.

9 Exemple : Dans une urne contenant n boules identiques au toucher numérotées de 1 à n . Tirons au hasard une boule. Notons X le chiffre sur cette boule. On définit ainsi une variable aléatoire et $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(X = i) = \frac{1}{n}$. Idem avec le lancer d'un dé non pipé.

3. Loi de Bernoulli

10 Définition : La **loi de Bernoulli** de paramètre p réel tel que : $p \in]0, 1[$ est la loi d'une variable aléatoire qui ne prend que les valeurs $x_1 = 0$ ou $x_2 = 1$ telle que $P(X = 1) = p$ appelée **probabilité de succès**.

On a alors $P(X = 0) = 1 - p = q$ appelée **probabilité d'échec**. On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

11 NB : Cette loi est associée à une épreuve n'ayant que deux issues telle que le lancer d'une pièce de monnaie par exemple : X prend la valeur 1 si on obtient Pile et 0 si l'on obtient Face. Si p est la probabilité d'obtenir pile alors X suit alors la loi de Bernoulli de paramètre p . Si la pièce est bien (non pipée), $p = \frac{1}{2}$.

4. Loi binomiale

12 Définition : La **loi de Binomiale** de paramètres n et p tel que : $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ est la loi d'une variable aléatoire qui prend les valeurs entières comprises entre 0 et n et telle que :

$\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

13 On vérifie que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = 1$ et par conséquent $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \in [0, 1]$.

Ainsi, cette probabilité existe et est unique (Cf théo. 8 chapitre précédent)!! Pour $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli.

14 Prop : Cette loi binomiale apparait lorsque l'on répète n fois une même épreuve n'ayant que deux issues, dans les mêmes conditions et de manières indépendantes. L'évènement « succès » se réalise avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Alors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès au bout de n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p .

15 Exemple : Une urne contient n boules dont v vertes. On tire b boules avec remise. On range les résultats dans un b -uplet : au $i^{\text{ème}}$ tirage, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du b -uplet prend la valeur 1 si la boule est verte et 0 si la boule est blanche. On définit alors X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées sur les b tirages. X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(b, \frac{v}{n})$.

5. Couple de variables aléatoires

16 Déf : Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire $Z = (X, Y)$ telle que X et Y sont deux variables aléatoires. Par définition, la loi conjointe de X et Y est la loi de Z .

17 Notons $E = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $F = Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ l'ensemble des valeurs prises par X et Y .

Alors $Z(\Omega) = E \times F$ et la loi conjointe de X et Y est entièrement déterminée par la donnée des $n \times p$ réels :

$$P(Z = (x_i, y_j)) = P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) \stackrel{\text{notée}}{=} P(X = x_i, Y = y_j) \stackrel{\text{notée}}{=} p_{ij} \quad \text{tq } \begin{cases} i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket \end{cases}$$

18 Théorème : A la loi conjointe de X et Y sont associées deux lois dites **marginales** correspondantes aux lois de X et de Y définies par les distributions de probabilités suivantes : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$P(X = x_i) = \sum_{k=1}^p P(X = x_i, Y = y_k) = \sum_{k=1}^p p_{ik} \quad \text{et} \quad P(Y = y_j) = \sum_{k=1}^n P(X = x_k, Y = y_j) = \sum_{k=1}^n p_{kj}$$

19 Conséquence : Dès que je connais la loi conjointe de deux variables aléatoires, je connais les lois de ces 2 variables aléatoires.

20 Rque : A la loi conjointe de X et Y sont associées des lois conditionnelles : la loi de X sachant que $Y = y_j$ fixé ou encore la loi

$$\text{de } Y \text{ sachant que } X = x_i \text{ fixé. } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_i | Y = y_j) = P_{[Y=y_j]}(X = x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}.$$

$$\text{Et } \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, P_{[X=x_i]}(Y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^p p_{ij}}.$$

21 Exercice : Soit X et Y deux variables aléatoires. Le couple (X, Y) des variables aléatoires prend les valeurs (i, j) avec les probabilités $p_{ij} = P((X = i) \cap (Y = j))$ définies dans le tableau ci-dessous :

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	1	2	3
1	$0.1 = p_{1,0}$	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0	0.1
3	0.1	0	0.2	0

a) Vérifier que ces données permettent de définir une probabilité sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

b) Déterminer les lois de X et de Y .

- Former la table de « Y sachant que $X = 1$ » (notée $Y_{[X=1]}$).
- Déterminer la loi de $U = XY$.
- Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.
- Former la table de (U, V) la loi conjointe de U et V .

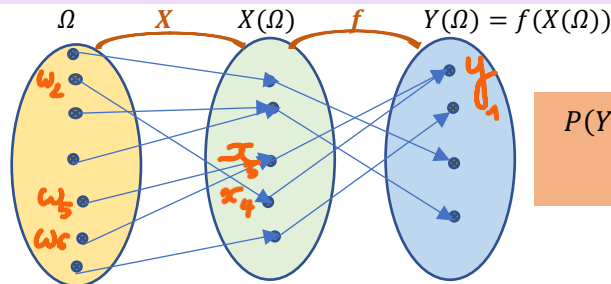
6. Image d'une variable aléatoire

22 Théorème : Soit X variable aléatoire sur Ω et f une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F .

On pose $Y = f(X) = f \circ X$. Alors, Y est la variable aléatoire sur (Ω, P) telle que :

$$\forall y \in f(X(\Omega)), P(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tel } f(x)=y}} P(X = x) \text{ et } \forall A \subset f(X(\Omega)), P(Y \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tel } f(x) \in A}} P(X = x).$$

23 NB : Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires telles que $X_1 \sim X_2$ et f une application définie sur D à valeurs dans un ensemble F telle que, $X_1(\Omega) \subset D$ et $X_2(\Omega) \subset D$ alors $f(X_1) \sim f(X_2)$.



$$P(Y = y) = P(X = x_3) + P(X = x_4) \\ = P(\omega_2) + P(\omega_5) + P(\omega_6)$$

II Espérance d'une variable aléatoire complexe.

1. Définitions

24 Définition : Soit X une variable aléatoire complexe sur Ω .

L'espérance de X est le complexe $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

25 Autres expressions : Soit X une variable aléatoire complexe sur Ω .

1) Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{C}$, alors $E(X) = \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i)$

2) $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$.

26 Interprétation : L'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives.

2. Exemples.

27 Cas particuliers :

- Si X est constante égale à x alors $E(X) = x$.
- Si X suit la loi uniforme alors $E(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$.
- Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors $E(X) = p$.
- Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors $E(X) = np$.

3. Propriétés.

28 Proposition : Propriétés de l'espérance Soit X une variable aléatoire complexe sur Ω .

- Pour tous complexes a et b , $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- Si X réelle et positive, alors $E(X) \geq 0$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires complexes, alors pour tous complexes a et b , $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Si X et Y sont réelles telles que $X \geq Y$, alors $E(X) \geq E(Y)$.

29 Théorème du transfert

Si X est une variable aléatoire sur Ω et f est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$

30 Exemple : $E(X^2) = \sum_{i=1}^m x_i^2 P(X = x_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$

31 Théorème d'Inégalité de Markov

Si X est réelles et à valeurs positives alors $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq t) \leq \frac{E(X^n)}{t^n}$ et en particulier, $\forall t \in \mathbb{R}^+, P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$.

III Variance et covariance

1. Définition et règles de calcul .

32 Définition : Soit X une variable aléatoire **réelle**. La variance de X est définie par $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et l'écart type par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variance et l'écart mesurent la dispersion des valeurs de X autour de la moyenne pondérée $E(X)$.
 X , $E(X)$ et $\sigma(X)$ ont les mêmes unités .

33 Règles de calcul : Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω .

- 1) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- 2) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

34 Définition : Covariance de deux variables aléatoires réelles

Soit X et Y deux variables aléatoires **réelles** sur Ω .

On appelle covariance de X et Y le réel : $cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

On dit que X et Y sont décorrélées lorsque $cov(X, Y) = 0$.

35 Théorème $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + 2cov(X, Y) + V(Y)$

2. Exemples

36 Proposition : Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors $V(X) = p(1 - p)$.

Si X suit la loi binomiale $B(n, p)$ alors $V(X) = np(1 - p)$.

37 Définition : X est dite centrée lorsque $E(X) = 0$ et réduite lorsque $\sigma(X) = 1$.

38 Proposition : Si X est d'écart - type non nul alors $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite .

3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

39 Théorème d' Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est **réelle et d'écart - type non nul** alors $\forall t \in \mathbb{R}^{++}, P(|X - E(X)| \geq t\sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}$ ce qui signifie que la probabilité que X soit à une distance de $E(X)$ supérieure à $t\sigma(X)$ est inférieure à $\frac{1}{t^2}$.

40 Autres versions équivalence : Si X est **réelle et d'écart - type non nul** alors l'inégalité s'écrit aussi :

1. $\forall t \in \mathbb{R}^{++}, P(X \in]E(X) - t\sigma(X), E(X) + t\sigma(X)[) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$.
2. $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma(X)^2}{\varepsilon^2}$ en posant $\varepsilon = t\sigma(X)$.

41 Exemple : $P(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{1}{9} \approx 11\%$; autrement dit, la probabilité que X prenne des valeurs dans $]E(X) - 3\sigma(X), E(X) + 3\sigma(X)[$ est supérieur à 89% .

V Variables aléatoires indépendantes

1. Cas de deux variables

42 Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P) . On dit que X et Y sont indépendantes lorsque : $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x) \times P(Y = y)$ ie. lorsque $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega)$, les évènements $P(X = x)$ et $P(Y = y)$ sont indépendants.

43 Proposition : Si X et Y sont indépendantes alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)), P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

44 Proposition : Espérance d'un produit, variance d'une somme de variables indépendantes

Si X et Y sont réelles et indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

45 Proposition : Images de deux variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont indépendantes et f et g deux applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2. Cas de n variables

46 Définition : Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur (Ω, P) .

1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes lorsque pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.

2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes lorsque :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), P(\cap_{k=1}^n \{X_k = x_k\}) = \prod_{k=1}^n P(X_k = x_k).$$

47 Proposition : une généralisation (admise)

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors pour toutes parties A_k de $X_k(\Omega)$, on a :

$$P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in A_k)$$

48 Proposition : variance (admis)

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont réelles et mutuellement indépendantes alors $V(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$

49 Exemple important : Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p alors $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p et donc $V(X) = np(1 - p)$.