

TD 24 Probabilités

Ex 0 UNIVERS Déterminer les univers et calculer leur cardinal. Puis dans chacune des expériences aléatoires suivantes, calculer la probabilité de A , de B , de $A \cap B$, de $A \cup B$, de $\bar{A}$

- On lance 10 fois une pièce non pipée. A : « obtenir plus de face que de pile », B : « obtenir un nombre pair de pile »
- On tire successivement et avec remise deux boules indiscernables au toucher dans une urne en contenant 10 numérotés de 1 à 10. A : « Au moins une des deux est paire », B : « la somme des numéros des deux boules est impaire ».
- On tire successivement et sans remise deux boules indiscernables au toucher dans une urne en contenant 10 numérotés de 1 à 10. A : « Au moins une des deux est paire », B : « la somme des numéros des deux boules est impaire ».
- On tire simultanément deux boules dans une urne en contenant 10 numérotés de 1 à 10. A : « Au moins une des deux est paire », B : « la somme des numéros des deux boules est impaire ».
- On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 32. A : « la main est rouge », B : « tirer uniquement des as ».

Ex 1 Le cours

- On lance deux fois un dé cubique. Soit A l'évènement « la somme des deux chiffres obtenus est paire » et B l'évènement « la somme des deux chiffres obtenus est impaire et inférieure à 8 ». Déterminer un évènement C de sorte que (A, B, C) soit un système complet d'évènements.
 - On lance trois fois un dé. Quel est l'évènement contraire de « les trois chiffres obtenus sont strictement supérieur à 3 » ?
 - On dispose d'un dé équilibré à 8 faces numérotées de 1 à 8. On lance le dé. Voici trois évènements :
 - A « on obtient l'un des chiffres 1,2,3 ou 4 », B : « on obtient l'un des chiffres 1,4,5 ou 6 » et C : « on obtient l'un des chiffres 1,6,7 ou 8 ».
- Comparer $P(A \cap B \cap C)$ et $P(A)P(B)P(C)$.
 - Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Ex 2

- Soit P et Q deux probabilités sur un même univers fini Ω telles que : $\forall A \subset \Omega, P(A) \leq Q(A)$.
Montrer que $P = Q$.
- On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Existe-t-il un réel α et une probabilité P tel que : $P(\omega_1) = \frac{2\alpha^2}{3}, P(\omega_2) = -\frac{\alpha}{3}, P(\omega_3) = \frac{2}{3}$.
- Soit A et B deux évènements d'une espace probabilisé fini (Ω, P) tels que $P(A) = 0,9$ et $P(B) = 0,8$.
 - Montre que $P(A \cap B) \geq 0,7$.
 - Un exemple : on choisit au hasard un entier dans l'ensemble $\{1,2,\dots,10\}$. Proposer deux évènements de A et B tels que $P(A) = 0,9, P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,7$.
 - Cas général: Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements. Montrer que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + \dots + P(A_n) - (n-1)$.
- Soit A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé fini.
 - Montrer que : $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B)P(A \cap \bar{B})$.
 - Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left(x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \right)$.
 - En déduire que : $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.
- A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé fini et C est l'évènement ou bien A se réalise ou bien B se réalise mais pas les deux en même temps. Montrer que $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.
- Soit A, B et C trois évènements mutuellement indépendants tels que $P(A) = 0,8, P(B) = 0,5$ et $P(C) = 0,2$. Déterminer $P(A \cup B \cup C)$.

Ex 3 DJOKO A Rolland Garros, on a calculé le taux de réussite au service d'un des meilleurs joueurs.

Le premier service est réussi 76 fois sur 100 et le second 59 fois sur 100. Quelle est la probabilité pour que ce joueur fasse une double faute ?

Ex 4 VITAMINE C Dans un lycée , 30% des élèves boivent un jus d'orange au petit déjeuner mais malgré cela 6% de ces buveurs de jus d'orange ressentent une fatigue en milieu de matinée . De plus , parmi la totalité des élèves qui ressentent une fatigue , 80% n'ont pas bu de jus d'orange . Quelle est la probabilité pour qu'un élève ne buvant pas de jus ressente une fatigue ?

Ex 5 JEU TV Dans un jeu télévisé , un candidat doit choisir d'ouvrir une porte parmi trois . L'une des portes cache une voiture , les deux autres un cadeau sans intérêt .

Le candidat choisi l'une des portes , et avant l'ouverture , le présentateur (qui sait ce qui se cache derrière chaque porte) ouvre l'une des deux autres portes cachant évidemment un cadeau sans valeur et demande au candidat s'il souhaite changer de porte. Le candidat a -t-il intérêt de changer ?

Ex 6 BRICOLAGE Un bricoleur range tous les soirs au hasard ces n outils $O_1, \dots, O_n$ dans n tiroirs $T_1, \dots, T_n$.

1. Quelles est la probabilité pour qu'un tiroir donné T_i reste vide ?
2. Quelle est la probabilité pour que deux tiroirs donnés restent vides ?
3. Quelle est la probabilité pour que k tiroirs donnés restent vides ?

Ex 7 « QCM » Lors d'une interrogation , un étudiant se trouve face à une question dont m réponses sont proposées mais une seule est correcte . Soit l'étudiant connaît la réponse , soit il répond au hasard parmi les m réponses données . La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est $p \in]0,1[$.

Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée , quelle est la probabilité qu'il connaissait la réponse ?

Ex 8 ASSURANCE Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes d'âges . Voici un tableau donnant ces classes d'âges ainsi que la proportion de chaque classe dans le portefeuille de l'assureur et la probabilité qu'un membre de chaque classe déclare un accident au cours de l'année .

Classe	Proportion	Probabilité
Moins de 25 ans	0,25	0,12
De 25 à 50 ans	0,53	0,06
Plus de 50 ans	0,22	0,09

1. Un assuré est tiré au hasard dans le portefeuille de l'assureur ? Quelle est la probabilité pour qu'il ait déclaré un accident cette année ?
2. Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident dans l'année soit âgé d'au plus de 25 ans ?
3. Quelle la probabilité qu'un assuré de plus de 25 ans déclare au moins un accident dans l'année ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident soit âgé de 25 à 50 ans ?

Ex 9 JEU DE CARTES On dispose d'un jeu de 32 cartes .

A) On tire simultanément trois cartes .

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois rois ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois cœurs ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un carreau ?
4. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun pique ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir trois cartes de familles différentes ?
6. Quelle est la probabilité d'obtenir trois as sachant que l'une des cartes est un as ?
7. Quelle est la probabilité pour que la somme des valeurs des trois cartes soit 21 sachant que l'une des cartes est une dame ?

B) Mêmes questions mais en tirant et remettant chaque carte avant de tirer la suivante .

Ex 10 URNE 1

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10 : 1 noire , 3 blanches et 6 rouges .

A. On tire trois fois de suite avec remise . Quelle est la probabilité d'obtenir :

- 1) trois nombres dans un ordre strictement croissant ?
- 2) trois nombres dans un ordre croissant ?

- 3) un tirage tricolore ?
 - 4) exactement une noire et au moins une rouge ?
 - 5) trois boules de la même couleur
- B. On tire simultanément et au hasard trois boules. Répondre à nouveau aux questions .

Ex 11 URNE 2 Une urne contient une boule rouge et une boule noire . On effectue n tirages avec remise . On définit les événements suivants :

A_n : "on obtient , au cours des n tirages , des boules de deux couleurs"

B_n : "on obtient , au cours des n tirages , au plus une boule rouge"

- a) Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$
- b) Etudier l'indépendance des événements A_n et B_n pour $n = 2$, puis $n = 3$ puis $n = 4$.

Ex 12 URNE 3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

- 1) Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. On prélève en une fois p boules de l'urne .
Soit $k \in \{p, \dots, n\}$. Calculer la probabilité que le plus grand numéro de la poignée soit .
En déduire que : $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.
- 2) On tire successivement et sans remise p boules de l'urne . déterminer la probabilité pour que la dernière boule tirée ait un numéro supérieur à toutes les autres déjà tirées .

Ex 13 URNE 4 On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 dont chacune contient 2 boules noires et 3 blanches . On tire une boule de U_1 , une autre de U_2 , puis on les place dans U_3 . On tire alors une boule dans U_3 . Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules noires ? Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au dernier tirage ?

Ex 14 URNE 5 Une urne contient n boules blanches ($n \geq 5$) et 10 boules noires . On tire au hasard 10 boules .

1. Calculer la probabilité p_n de tirer exactement 5 boules noires.
2. Montrer que : $\forall n \geq 5, \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+7n-44}$.
3. Etudier les variations de la suite p et préciser les valeurs de n pour lesquelles p_n est maximale.

Ex 15 Urnes 6 On dispose de N urnes , numérotées de 1 à N . L'urne k contient k billes blanches et $N - k$ billes noires . On choisit une urne au hasard , sans connaître son numéro , et on tire avec remise n fois de suite une bille dans cette urne .

- 1) Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une bille blanche sachant qu'au cours des n premiers tirages, seules des billes blanches ont été tirées ?
- 2) Calculer la limite de cette probabilité quand N tend vers l'infini .

Ex 16 ROBOT Soit p et q deux entiers naturels donnés.

Un robot se déplace sur un quadrillage, part du point $O(0,0)$ pour rejoindre le point $A(p, q)$ en se déplaçant vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins possibles ?
2. Quelle est la probabilité que le robot, qui choisit au hasard l'un des chemins, emprunte un chemin avec un seul changement de direction ?

Ex 17 ELECTROMENAGER Un appareil électroménager obéit aux règles de fonctionnement suivantes :

- a) S'il fonctionne à la date $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a une probabilité a de fonctionner à la date n .
- b) S'il est en panne à la date $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a une probabilité b de ne pas fonctionner à la date n où a et b sont des réels de $]0,1[$.

On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0 . p_n est la probabilité de l'évènement M_n : « l'appareil est en état de marche à la date n ». Déterminer p_n en fonction de n, a et b puis calculer sa limite .

Ex 18 NEUTRON Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à un autre d'un triangle noté ABC en suivant la règle suivante :

- Si, à l'instant n , elle se trouve en A , à l'instant $n + 1$, elle a une probabilité de 0,75 de se trouver en B et une probabilité de 0,25 de se trouver en C .
- Si, à l'instant n , elle se trouve en B , à l'instant $n + 1$, elle a une probabilité de 0,75 de se trouver en A et une probabilité de 0,25 de se trouver en C .
- Si, à l'instant n , elle se trouve en C , à l'instant $n + 1$, elle se trouve en B .

On note a_n, b_n, c_n les probabilités qu'à l'instant n la particule se trouve en A, B ou C .

- Etablir une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n .
- En déduire l'existence d'une matrice carrée d'ordre 3 telle que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
- Démontrer que M est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}$.
- En déduire a_n, b_n, c_n en fonction de n .
- A quel sommet a-t-on le plus de chance de trouver la particule dans quelques millénaires ?

Ex 19 GENETIQUE On étudie la fréquence d'apparition d'une paire de gènes dans une population donnée. La gène prend deux formes : A et B et le couple de gènes peut donc être AA, AB et BB .

Dans la première génération,

la paire AA a pour fréquence d'apparition x ,

la paire AB a pour fréquence d'apparition $2y$,

la paire BB a pour fréquence d'apparition z tel que x, y, z réels positifs et $x + 2y + z = 1$.

Chaque parent contribue pour moitié au patrimoine génétique de son enfant en fournissant un gène sélectionné au hasard dans la paire qu'il possède.

- Déterminer les fréquences d'apparition des paires de gènes pour la seconde génération.
- Déterminer les fréquences d'apparition des paires de gènes pour la troisième génération. Que constate-t-on ?

EX 20 CLEFS Un gardien de phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clefs dont une seule convient. Il essaie les clefs les unes après les autres. Calculer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité que la porte s'ouvre à la k ème tentative exactement (pas avant!).

EX 21 Combien de personnes doit contenir ma population pour que la probabilité que cette population contienne 2 personnes nées le même jour soit égale à $\frac{1}{2}$?

Ex 22 Une urne contient n boules rouges et n boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément n boules de l'urne.

- Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et A_k l'évènement : «obtenir exactement k boules rouges». Calculer $P(A_k)$.
- En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

EX 23 FORMULE DE POINCARÉ Soit (Ω, P) espace probabilisé fini et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements.

Montrer que : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$