Probabilités sur un univers fini.

I. Expérience aléatoire et univers.

Définition 1: On appelle **épreuve ou expérience aléatoire** une expérience dont le résultat dépend du hasard. L'**univers**, souvent noté Ω , est alors l'ensemble de tous les résultats possibles.

Définition 2: Considérons une expérience aléatoire dont l'univers associé est Ω. Dans cet univers Ω,

1. On appelle **évènement** tout sous-ensemble de Ω . $\mathcal{P}(\Omega\ )est\ donc\ l'ensemble\ de\ tous\ les\ événements$
2. Un **évènement élémentaire** est un évènement contenant un seul élément i.e. un singleton (un seul résultat, une seule issue possible).
3. $\emptyset$ est l'**évènement impossible.**
4. Ω est **l'évènement certain**.
5. L'**évènement contraire** de l'évènement A est «naturellement » $\bar{A}$ $(= C_\Omega^A)$, le complémentaire de A dans Ω.
6. On dit que **l'évènement A implique ou entraine l'évènement B** lorsque $A \subset B$.

Les définitions sur les ensembles s'adaptent à cette modélisation : Soit $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements :

7. réunion d'évènements : $A \cup B$ se lit « A ou B », $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ se lit $A_1\ ou\ A_2\ ou \dots ou\ A_n$.

8. conjonction (ou intersection) **d'évènements** $A \cap B$ se lit « A et B », $\bigcap_{i=A}^{n} A_i$se lit $A_1\ et\ A_2\ et \dots et\ A_n$.

9. A et B sont disjoints ou **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

10. $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un **système complet d'évènements de Ω** lorsque $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une partition de Ω**.**

Exemples 3:

1. Lancer un dé équilibré à 6 faces est une expérience aléatoire dont l'univers est : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Les évènements élémentaires sont $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$.
   L'évènement concret « obtenir un chiffre impair » est modélisé par l'évènement $A = \{1,3,5\}$ .Son évènement contraire est $\bar{A} = \{2,4,6\}$. L'évènement B « obtenir 1 » vérifie alors $B \subset A$.
2. Lancer successivement deux fois un dé équilibré à 6 faces est une expérience aléatoire dont l'univers est : $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots., (2,1), (2,2), \dots., (2,6), \dots, (6,4), (6,5), (6,6)\}$ i.e. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$. Les évènements élémentaires sont $\{(1,1)\}, \{(1,2)\} \dots$
   L'évènement « la somme des deux chiffres vaut 5 » est $A = \{(p, q) \in \mathbb{N} / p + q = 5\}$.
   A et l'évènement « obtenir deux chiffres pairs » sont incompatibles.
3. n lancers d'une pièce de monnaie est une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{pile, face\}^n$ souvent modélisé par : $\Omega = \{\underbrace{0}_{pile}, \underbrace{1}_{face}\}^n$ l'ensemble dès n-uplets de 0 et de 1 L'évènement concret « le nombre de faces est supérieur au nombre de pile » est alors modélisé par l'évènement aléatoire $= \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega / \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \omega_{\mathrm{i}} \geq \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}\}$.
4. Roméo attend Juliette qui a promis d'arriver entre minuit et une heure. Le temps d'attente de Roméo est une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = [0,1]$. L'évènement « Roméo attend moins d'une quart d'heure » est alors modélisé par $A = [0, \frac{1}{4}]$.
5. Le Lancer de fléchettes sur une cible circulaire de diamètre 30 cm est une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 15^2\}$.

Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux univers finis. Les exemples 4 et 5 ne seront donc pas concernés.

II. Espace probabilisé fini.

1. Définition et propriétés générales

Définition 4: Considérons une expérience aléatoire dont Ω est l'univers. **On suppose Ω fini .**
On appelle **probabilité sur Ω** toute application P de $\mathcal{P}(\ \Omega\ )$ dans $[0,1]$ qui vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$.
2. pour tous évènements $A\ et\ B$ incompatibles (disjoints) , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(Ω, P) est appelé un **espace probabilisé fini**.
Pour tout évènement A, $P(A)$ est la **probabilité de l'évènement A .** C'est la « chance » que cet évènement A soit réalisé.
Notation : $P(\{a\})$ est noté $P(a)$.

Exemple 5: Considérons l'expérience aléatoire « choisir au hasard un nombre entre 1 et 3 » . Alors, $\Omega = \{1,2,3\} et\ \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ .Soit $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ définie par : $P(\{1,2,3\}) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ et $P(1) = \frac{1}{3} = P(\{2\}) = P(\{3\})$ et $P(\{1,2\}) = \frac{2}{3} = P(\{1,3\}) = P(\{2,3\}) = 1$. Vérifions que P est une probabilité sur Ω .

Propriété 6 : Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \in [0,1]$.
3. Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système d'évènements **deux à deux incompatibles** alors $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.
4. Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un système **complet** d'évènements alors $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Démo :

Cas particuliers 6 bis : 1) Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ alors $(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\})$ est une parition de Ω et donc $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$.
2) De même, si $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ un évènement, alors $B = \bigcup_{i=1}^{q} \{b_i\}\ et$ les évènements $\{b_i\}\ tq\ i \in [\![1, q]\!]$ sont deux à deux incompatibles et par conséquent, $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{q} \{b_i\}\right) = \sum_{i=1}^{q} P(b_i)$.

Conséquences 7

5. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
6. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B)$.
7. Si $(A_1, A_2, \dots, A_q)$est un système complet d'évènements, alors pour tout évènement B, $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.
8. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$,$(A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B))$.
9. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démo :

2. Construction d'une probabilité. Probabilité uniforme .

Théorème et Def 8 : Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers fini.
Si $p_1, p_2, \dots., p_n$ sont [des réels compris entre 0 et 1 tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1]^{(*)}$ alors il existe une unique probabilité P sur Ω qui vérifie $\forall i \in \{1, .., n\}, P(\omega_i) = p_i$. Une telle famille $(p_1, p_2, \dots., p_n)$ vérifiant (*) est appelée distribution de probabilités sur Ω .
Il s'agit de la probabilité définie par : $\forall\ A = \left\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_q}\right\} \subset \Omega, P(A) = \sum_{k=1}^{q} p_{i_k}$.

Démo

Conséquence 10 : Une probabilité sur un univers fini Ω est donc entièrement déterminée (connue) par la distribution des probabilités $((P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.

Exemple de l'équiprobabilité 11 : Prenons $p_1 = p_2 = \cdots . = p_n = \frac{1}{n}$. Alors, $\forall i, 0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. On peut énoncer :

Définition-Prop. 12 : Soit Ω un univers de cardinal n .
L'équiprobabilité ou probabilité uniforme sur Ω est l'unique probabilité P telle que : $\forall \omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{n}$.
Il s'agit de la probabilité : $\forall\ A \in \Omega$, $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favoralbes}{nombre\ de\ cas\ possibles}$.

Exemples d'applications 13 : Le tirage au hasard d'une boule dans une urne remplie sur n boules indiscernables au toucher, le lancer d'une pièce équilibrée, le lancer d'un dé non pipé sont des expériences aléatoires dont l'univers aura une probabilité uniforme. De même**,** lançons successivement deux fois un dé équilibré à 6 faces, alors l'espace probabilité est (Ω, P) suit la loi uniforme.

III. Probabilités conditionnelles

DESORMAIS on travaille dans (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Définition 14 : Soit A *et* B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. La **probabilité (conditionnelle) de A sachant B** (probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé) est le réel noté $P_B(A)$ *ou* $P(A \mid B)$ défini par :
$P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Proposition 15 : L'application $P_B : \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ A \to P_B(A) \end{pmatrix}$ est une probabilité sur Ω telle que : $P_B(B) = 1$. Cette probabilité est appelée la **probabilité conditionnée par B.**

Démo :

Exemple 16: Dans une famille de trois enfants, on suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille. Cherchons la probabilité que les trois enfants soient des filles sachant que l'ainé est une fille puis la probabilité que les trois enfants soient des filles sachant que l'un d'eux est une fille.

Formule des probabilités composées pour 2 évènements 17:
Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles alors $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$.
Formule des probabilités composées pour q évènements 18:
Si $A_1, A_2, \ldots, A_q$ sont des évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{q-1}) \neq 0$ alors
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_q) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{q-1}}(A_q)$.

Démo

Exemple19 : Une urne contient n boules dont b blanches et r rouges ($r \geq 4$ *et* $b \geq 4$). On tire successivement sans remise 4 boules. Déterminons la probabilité que les quatre boules soient rouges.

Formule des probabilités totales 20:
Si $(A_1, A_2, \ldots, A_q)$est un système complet d'évènements tels que : $\forall i, P(A_i) \neq 0$, alors pour tout évènement B,

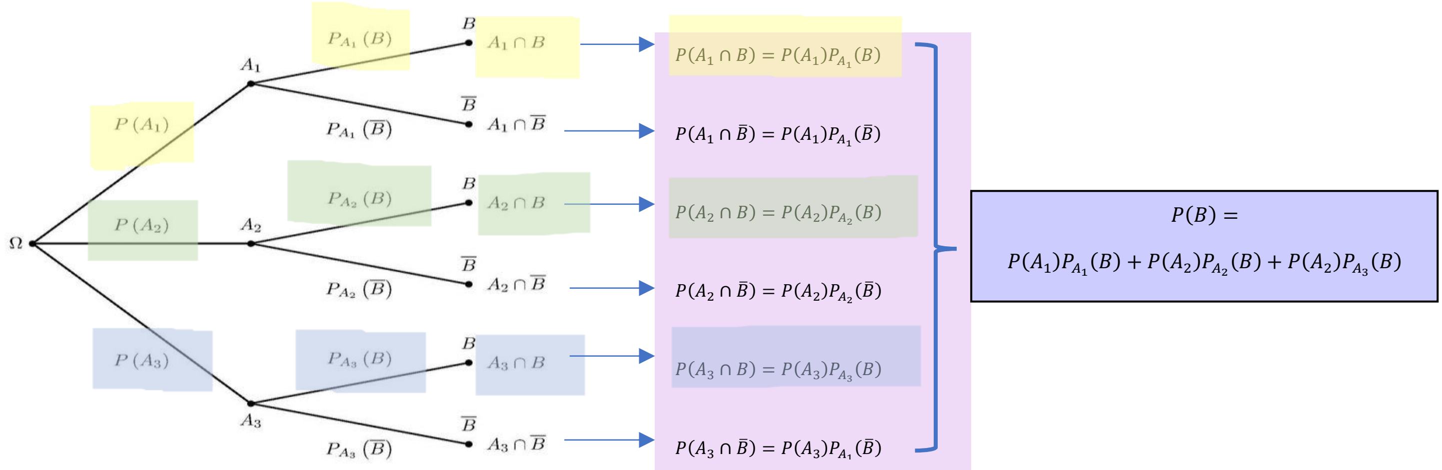
$$P(B) = \sum_{i=1}^{q} P(B \mid A_i) P(A_i) = \sum_{i=1}^{q} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

Cas particulier 21: Si A est un évènement tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\bar{A}) \neq 0$, alors pour tout évènement B,
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$.

Démo

Exemple 22: Des amis sortent un samedi soir en boite de nuit. Dans leur ville, trois discothèques se partagent la fièvre du samedi soir. La première « le Chat Noir» passe 25 % d'électro, la seconde « the Tiger » en passe 40% et la dernière « le Coyote » 30%. Les amis choisissent l'une des trois discothèques au hasard. Déterminons la probabilité pour qu'en entrant un titre d'électro soit diffusé.

Illustration 23: **Arbre de probabilité**



Formules de Baye 24:
Première formule : Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles alors
$P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$ ie $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.
Deuxième formule : Si $(A_1, A_2, \dots, A_q)$est un système complet d'évènements de probabilités non nulles, alors pour tout évènement B tel que : $P(B) \neq 0$ et pour tout $\in \{1, .., q\}$, $P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{j=1}^{q} P_{A_j}(B)P(A_j)} = \frac{P(B \cap A_k)}{\sum_{j=1}^{q} P_{A_j}(B)P(A_j)}$.

Démo

Exemples 25:

On dispose de 100 dés cubiques dont 75 sont parfaitement équilibrés et 25 sont pipés. Pour un dé truqué, la probabilité d'obtenir un 6 est de 0,5 . On choisit un dé au hasard parmi les 100, on le lance et on obtient le chiffre 6. Calculons la probabilité d'avoir lancé un dé truqué.

IV. Evènements indépendants

On travaille toujours dans (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Définition 26 : Les événements A *et* B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple27 :

1) Retour à l'exemple 16 : les évènements D :« avoir une fille ainée» et E :« avoir une fille cadette » sont deux évènements indépendants. En effet, $P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(E) = \frac{1}{2}$ *et* $P(D \cap E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(D)P(E)$.

2) Considérons un dé parfaitement équilibré. On lance le dé une seule fois. Soit A l'évènement « Obtenir 3 ou 4 » et B l'évènement « Obtenir 4 ou 5 ». C L'évènement « Obtenir 3» et D l'évènement « Obtenir 4 ». Alors $P(A) = \frac{1}{3} = P(B)$ et $P(C) = \frac{1}{6} = P(D)$
$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B)$. Donc A et B ne sont pas indépendants (ouf)!!
et $P(C \cap D) = 0 \neq P(C)P(D)$. Donc C et D ne sont pas indépendants mais sont incompatibles.

NB 28 : Deux évènements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

Proposition 29 : Soient A et B deux évènements tels que $P(A) \neq 0$. .
A et B sont indépendants si et ssi $P(B) = P_A(B)$.

Démo

Proposition 29 : Soient A et B deux évènements.
A et B sont indépendants si et ssi $\bar{A}$ et B sont indépendants.
A et B sont indépendants si et ssi $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Démo

Définition 30 Les n évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** lorsque pour tous les entiers $i_1, i_2, \dots, i_q$ *de* $\{1, \dots, n\}$, $P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_q}\right) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \dots \times P\left(A_{i_q}\right)$.

NB 31: Si les n évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.

Attention 32: la réciproque est fausse pour n supérieur à 3.

Contre-exemple : On lance deux fois un dé parfait. On considère les évènements A : « le premier nombre obtenu est pair », B : « le deuxième nombre obtenu est impair » **et** C : « la somme des deux nombres est paire »
Alors, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ et $P(A) = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)$. $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(B \cap C) = P(A \cap C)$.Les évènements A , B et C sont donc deux à deux indépendants. Et pourtant $P(A \cap B \cap C) = 0$ donc A, B *et* C ne sont pas mutuellement indépendants.