TD 23

Ensembles-Applications-Dénombrément.

Ex 0 Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F . Montrer que :

- 1) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,
 - $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
 - $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *y - a - t - il égalité?*
- 2) $(f \text{ injective}) \Leftrightarrow (\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$.
- 3) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$ *y - a - t - il égalité?*
- 4) $(f \text{ injective}) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A)))$.
- 5) $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$ *y - a - t - il égalité?*
- 6) $(f \text{ surjective}) \Leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B)$.

$$\mathcal{P}(E) = \dots\dots\dots ?$$

Ex 1 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E et $f : \begin{pmatrix} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{pmatrix}$.

- 1) Donner une CNS sur A et B pour que f soit injective.
- 2) Donner une CNS sur A et B pour que f soit surjective.
- 3) En déduire une CNS sur A et B pour f soit bijective.
- 4) Désormais f est bijective.
 - a) Expliciter f^{-1} .
 - b) On suppose que E est un ensemble fini. Qu'en déduit-on sur les cardinaux de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(E)$? Vérifier cette égalité compte tenu des conditions vérifiées par A et B .

Ex 2 Soit E un ensemble et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition de E .

- 1) Justifier que : $\forall x \in E, \exists ! i \in \llbracket 1, n \rrbracket / x \in A_i$.
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on dit que $x \sim y$ lorsque x et y appartiennent au même A_i .
- 2) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E .
- 3) Soit $x \in E$, on note $\bar{x} = \{y \in E / x \sim y\}$ appelée la classe d'un élément x de E . Décrire $\bar{x}$.

Ex 3

- 1) Un digicode est constitué d'un chiffre d'une lettre A ou B et d'un autre chiffre dans cet ordre. Combien de codes existe-t-il ?
- 2) J'ai dans ma garde-robe 17 pantalons, 15 jupes, 28 tee-shirts, 7 chemisiers, 3 paires de collants de couleurs différentes et 30 pulls. Combien ai-je de tenues différentes ?
- 3) En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Un octet est un « nombre » constitué de 8 bits. Combien de caractères peut-on coder avec un octet ?
- 4) Combien de trinômes de colles différents peut-on former dans une classe de PCSI de 35 élèves ?
- 5) Au loto, il y a 49 numéros, une grille de loto est composée de 6 numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?
- 6) Une plaque d'immatriculation française est composée de deux lettres puis trois chiffres et deux lettres : $AB - 123 - CD$. Les lettres I, O, U ne sont jamais utilisées, les couples SS et WW sont interdits pour la série AB et SS est interdit pour la série CD . Enfin les trois chiffres démarrent au 001. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?

Ex 4 Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument et 453 ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.

Ex 5

- 1) Une agence matrimoniale souhaite faire un sondage auprès de ses clients. Elle teste son questionnaire sur un échantillon de 4 personnes parmi les 300 clients dont 120 femmes.
 - a) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
 - b) Quel est le nombre d'échantillons différents ne contenant aucune femme ?
 - c) Quel est le nombre d'échantillons différents contenant au moins un homme et une femme ?
- 2) Dans une urne, il y a 15 boules numérotées de 1 à 15, les boules 1 à 5 sont blanches, les autres sont noires
 - a) On tire cinq boules simultanément.
 - i. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
 - j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires ?
 - b) On tire successivement 5 boules sans remise.
 - i. En tenant compte de l'ordre combien y-a-t-il de tirages possibles ?
 - j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires dans tout ordre ?

Ex 6 Déterminer le nombre d'anagrammes (sans sens) des mots suivants : SMARTPHONE , SOURIS et BONBONNE.

Ex 7

- 1) Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$.
- 2) Calculer le nombre d'applications de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissantes.
- 3) Calculer le nombre de surjections de $\{0,1,\dots,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$.
- 4) Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$.
- 5) Déterminer le nombre d'applications f de $\{1,\dots,10\}$ dans $\{1,10\}$ telles que , si n pair alors $f(n)$ pair .
- 6) Déterminer le nombre d'applications injectives de $\{1,2,\dots,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image.

Ex 8 Soit E un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ contenant a entiers pairs et b entiers impairs. Montrer en utilisant E

que : $\sum_{k=0}^p \binom{a}{k} \binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ où $n \in \mathbb{N}$.

Ex 9 Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $E = \{1, \dots, n\}$ Déterminer :

- 1) le nombre de couple (x, y) d'éléments de E tels que $x + y = n$.
- 2) le nombre de couple (x, y) d'éléments distincts de E .
- 3) le nombre de couple (x, y) d'éléments de E tels que $x > y$.
- 4) le nombre u_n de couple (x, y) d'éléments de E tels que x ou y impair . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$.
- 5) le nombre de p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$.
- 6) le nombre de p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$.

Ex 10 Soit un ensemble fini E de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair , que celles de cardinal impair .
- 2) Calculer $\sum_{A \subset E} (-1)^{\text{card}(A)}$.
- 3) Dénombrer les couples (X, Y) de $[P(E)]^2$ tels que $X \subset Y$.
- 4) Dénombrer les couples (X, Y) de $[P(E)]^2$ tels que $X \cap Y = \emptyset$.
- 5) Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $F = \{(X, Y) \in P(E)^2 / X \cap Y = \emptyset \text{ et } \text{card}(X \cup Y) = p\}$. En dénombrant F , montrer que

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Ex 11 Pour tout entier naturel n non nul, on pose D_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$.

Par convention , $D_0 = 1$.

- 1) Montrer que : pour tout entier n non nul, $D_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$ puis que $D_n \leq n!$.
- 2) Soit $f(x) = e^{e^x - 1}$.
 - a. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0 de la forme : $f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{k!} x^k + o_0(x^N)$.
 - b. En utilisant la relation, $f'(x) = e^x f(x)$ vérifiée par f en tout réel x , montrer que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (D_n) .
 - c. En déduire une relation entre a_n et D_n .
 - d. Calculer alors D_2, D_3, D_4, D_5 , grâce au DL , puis D_6 grâce à 1) .

Ex 12 Pour tout n un entier naturel non nul, on note a_n le nombre de façon qu'à le père Noël de distribuer n cadeaux à n enfants sans qu'aucun enfant ne reçoive le cadeau qu'il a demandé (sachant que dans sa hotte , ce père Noël a exactement les n cadeaux commandés par les n enfants !!) .

- 1) Calculer a_1, a_2, a_3 .
- 2) Montrer que : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$.
- 3) Montrer que : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} - (n+1)a_n = (-1)^{n+1}$.
- 4) Montrer que : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.
- 5) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange , déterminer un équivalent simple de a_n .

Ex 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace dans le plan , n droites en respectant les 2 règles suivantes :

- Deux droites ne sont jamais parallèles. •• Trois droites ne sont jamais concourantes.

On note T_n le nombre de triangles construits à partir de ces n droites.

- 1) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .
- 2) En déduire de T_n en fonction de n .

Soit E ensemble de cardinal N .

- Nombre de p -uplets d'éléments de E =
- Nombre de p -uplets d'éléments de E à composantes distinctes =
- Nombre de sous-ensembles de E à p éléments =
- Nombre de façon de choisir dans E , p éléments distincts = ..
- Nombre de façon d'ordonner les N éléments de E =
- Nombre d'applications de E dans un ensemble fini F =
- Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans E = ?
- Nombre de parties de E = ?

Ex 14 Soit p et q deux entiers naturels donnés. Un robot se déplace sur un quadrillage, démarre du point $O(0,0)$ pour rejoindre le point $A(p, q)$ en se déplaçant vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Ex 15 Une urne contient n boules rouges et n boules blanches numérotées mais indiscernables au toucher. On tire simultanément n boules de l'urne.

1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer le nombre de façon d'obtenir exactement k boules rouges.

2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Ex 16 Soit E un ensemble à n éléments ;

1. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et A une partie de E à p éléments. Quel est le nombre a_p de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

2. Calculer $\sum_{p=0}^n a_p$.

Ex 17 Nous disposons d'un jeu de 52 cartes. Une « main » de 5 cartes est un paquet de 5 cartes prises parmi les 52 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains différentes ?

2. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement un as ?

3. Combien y-a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?