

Ensembles-Applications

Dénombrement.

I. Ensembles-Applications (beaucoup de rappels)

Définitions 1: Un ensemble E est une collection d'objets. Les objets qui le constituent sont les éléments de E . Si x est un élément de E , on note $x \in E$ (se lit x élément de E ou x appartient à E), sinon on note $x \notin E$. On note \emptyset l'ensemble vide. Soit E et F deux ensembles.

- $E = F$ signifie que E et F ont exactement les mêmes éléments i.e $x \in E \Leftrightarrow x \in F$.
 - $E \cup F$, la **réunion** de E et F , est l'ensemble constitué des éléments de E et de F i.e. $x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E$ **ou** $x \in F$.
 - $E \cap F$, l'**intersection** de E et F , est l'ensemble des éléments communs à E et F i.e. $x \in E \cap F \Leftrightarrow x \in E$ **et** $x \in F$.
 - E et F sont **disjoints** lorsque $E \cap F = \emptyset$.
 - $A \subset E$ signifie que tout élément de A est élément de E et se lit A est **inclus** dans E . On dit alors que A est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'**ensemble de toutes les parties** de E . NB: $\mathcal{P}(E)$ contient \emptyset et E .
- On définit alors le **complémentaire** de A dans E , noté \bar{A} ou C_E^A , par : $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$.
- On définit aussi la fonction indicatrice de A , notée χ_A ou $\mathbb{1}_A$ et définie par : $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.
- $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$ est le produit cartésien de E et F .
 - Soit p un entier naturel non nul. E^p est l'ensemble des p -uplets d'éléments de E .
 - Une famille d'éléments de E indexée par I est une application F de I dans E . $F(i)$ est noté x_i et $F = (x_i)_{i \in I}$.
- Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E .

Remarques 2:

1. $E = F \Leftrightarrow \underbrace{E \subset F \text{ et } F \subset E}_{\text{double inclusion}} \Leftrightarrow \left[\underbrace{(x \in E \Leftrightarrow x \in F)}_{E \text{ et } F \text{ ont les mêmes éléments}} \right]$.
2. $E \subset F \Leftrightarrow E \cap F = E \Leftrightarrow E \cup F = F$.
3. Si A et B sont deux parties de E alors $A \setminus B = A \cap C_E^B = A \cap \bar{B}$. En probabilité, on choisira d'écrire l'intersection car la notation $A \setminus B$ sera utilisée pour les probabilités conditionnelles (A sachant B).
4. Si A et B sont deux parties de E alors $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E^B \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$.

Propriété 3: Soit A, B et C trois ensembles.

1. La réunion et l'intersection sont commutatives et associatives.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. si A et B sont deux parties de E , $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Démo :

$$1. x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap C. \text{ Donc, } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C. \text{ Idem avec } \cap.$$

$$2. x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(x \in A \text{ et } x \in A) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in A) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)}_{x \in A} \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C) \text{ OK.}$$

$$\text{De même, } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ et } x \in A \cap C \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C) \text{ OK.}$$

$$4. x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A \text{ ou } x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ \Leftrightarrow \underbrace{(x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \notin B)}_{x \notin B} \text{ ou } \underbrace{(x \notin A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \notin B)}_{x \notin A} \Leftrightarrow x \in \bar{B} \text{ ou } x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in \bar{B} \cup \bar{A}$$

$$5. x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Définition 4: Soit A_1, A_2, \dots, A_n des parties d'un ensemble E .

$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in E / \exists i \in \{1, \dots, n\}; x \in A_i\}$, la réunion des A_i , contient tous les éléments de tous les A_i .

$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in E / \forall i \in \{1, \dots, n\}, x \in A_i\}$, l'intersection des A_i , contient tous les éléments communs à tous les A_i .

La famille (A_1, A_2, \dots, A_n) est une **partition** de E lorsque

les ensembles A_i tels que $i \in \{1, \dots, n\}$ sont deux à deux disjoints ($i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$)

E est la réunion de tous les A_i i.e $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$.

Cas particuliers : Si A est une partie de E alors (A, \bar{A}) est une partition de E .

Prop 4 bis Soit A_1, A_2, \dots, A_n des parties d'un ensemble E et F est une partie de E

1. $F \cup (\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n F \cup A_i$ et $F \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcup_{i=1}^n F \cap A_i$.

2. $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$.

3. Si (A_1, A_2, \dots, A_n) est une partition de E et F est une partie de E alors $(A_1 \cap F, A_2 \cap F, \dots, A_n \cap F)$ est une partition de F .

Définition rappel 5 : • Une application de E dans F est une relation f qui à chaque objet de E associe exactement un objet dans F . On note F^E ou $F(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F . Si f est une application de E dans F et $x \in E$, on note $f(x)$ l'objet de F associé à x par f et $y = f(x)$ est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f . On a : $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$... La réciproque n'est vraie que si f est injective.

• Soit f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F .

$f(A) = \{f(x)/x \in A\} \subset F$ et $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\} \subset E$.

NB: 1) $f(E)$ est donc l'ensemble de toutes les images par f .

2) $f^{-1}(B)$ existe même si f n'est pas bijective (ie quand f^{-1} n'existe pas). Mais si f^{-1} existe alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$.

f est injective si et ssi tout élément de F a au plus un antécédent par f .

si et ssi pour tout élément y de F , l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution.

si et ssi tous éléments distincts de F ont des images par f distinctes.

si et ssi tous éléments de F ayant la même image par f sont nécessairement égaux.

f est surjective si et ssi tout élément de F a au moins un antécédent par f

si et ssi pour tout élément y de F , l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.

si et ssi $f(E) = F$

f est bijective si et ssi tout élément de F a exactement un antécédent par f .

si et ssi pour tout élément y de F , l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution.

si et ssi f est injective et surjective.

si et ssi il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$

Dans ce cas, $f^{-1}(= g)$ est la bijection réciproque de f définie par : $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

$\forall y \in F, f^{-1}(y) =$ l'unique antécédent de y par $f =$ l'unique solution de l'équation " $f(x) = y$ "

f^{-1} est aussi l'unique application de F dans E vérifiant $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.

Propriété 6: La composée d'injections (resp. surjections, resp. bijections) est injective (resp. surjective, resp. bijective). Le cas échéant, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Si $f \circ g$ est injective alors g est injective. Si $f \circ g$ est surjective alors f est surjective.

Démo : Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

1) Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f$ est injective. Soit $(x, y) \in E^2/g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Montrons que $x = y$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$. Donc, $f(x)$ et $f(y)$ ont la même image par g . Comme g est injective, nécessairement, $f(x) = f(y)$. Alors x et y ont la même image par f . Donc nécessairement $x = y$.

2) Supposons f et g surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective.

$$g \circ f(E) = g(f(E)) \stackrel{\text{car } f \text{ surjective}}{=} g(F) \stackrel{\text{car } g \text{ surjective}}{=} G.$$

3) Supposons f et g bijectives et montrons que $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

f et g sont injectives et surjectives donc, $g \circ f$ est injective et surjective donc bijective.

De plus, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_F \circ f = f^{-1} \circ f = id_E$ et de même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_G$. J'en déduis que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4) Supposons $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective. Soit $(x, y) \in E^2/f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$ i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Comme $g \circ f$ est injective, nécessairement $x = y$.

5) Supposons $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $z \in G$. Montrons que z est a un antécédent par g .

$g \circ f$ est surjective donc, z a un antécédent x par $g \circ f$. Donc $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Alors $y = f(x)$ est un antécédent de z par g .

Définition 7: Soit E un ensemble. \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E lorsque : \mathcal{R} met en relation des éléments de E deux par deux ($x \mathcal{R} y$ signifie que x et y sont en relation par \mathcal{R}) et vérifie : $x \mathcal{R} x$ (tout élément de E est toujours en relation avec lui même) \mathcal{R} est dite réflexive

$\forall x \in E, x \mathcal{R} x$ (tout élément de E est toujours en relation avec lui même) \mathcal{R} est dite réflexive

$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ (on dit alors que x et y sont en relation). \mathcal{R} symétrique

$\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z)$, (si x est en relation avec y et y avec z alors x est en relation avec z) \mathcal{R} transitive

Soit $x \in E$. La classe de x est noté $cl(x)$ ou \bar{x} des éléments de E en relation avec x par \mathcal{R} i.e. $\bar{x} = \{y \in E/x \mathcal{R} y\}$

Exemples 7bis:

1. $E = M_n(\mathbb{R})$ et \mathcal{R} est la relation « est équivalente par colonne à ... » ou « est semblable à ... ».

Soit $A \in M_n(K)$ et u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A . Alors $\bar{A} = \{M/\exists B \text{ base de } K^n, M = \text{mat } u\}$

2. $E = \mathbb{Z}$ et \mathcal{R} est la relation « est congru modulo 6 à ... ». $\bar{1} = \{1 + 6n/n \in \mathbb{Z}\}$

Théo 8 : Soit E un ensemble et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . L'ensemble des classes d'équivalence est une partition de E .

II. Ensembles finis

Définition 9 : Un ensemble non vide E est fini (e) s'il (ou elle) contient un nombre fini d'éléments. Le cardinal de E est alors le nombre d'éléments de E et est noté $\text{card}(E)$. Et par convention, l'ensemble vide est de cardinal nul.

Attention : dans un ensemble, les éléments ne sont pas ordonnés et si deux éléments sont égaux, on en notera qu'un seul et il ne sera compté qu'une seule fois. Par contre dans une famille ou une suite ou un n -uplet, les éléments sont indexés et ordonnés et deux éléments indexés différemment mais prenant la même valeur comptent pour deux éléments.

Exemple : Si $E = \{1; 1; 3; -4\} = \{1; 3; -4\}$ alors $\text{card}E = 3$. Si $F = ((1,1,1), (2,1,0), (2,1,0), (1,1,1))$ alors $\text{card} F = 4$.

NB 10 : Soit un ensemble fini E de cardinal p . Les éléments de E peuvent être nommés et pour cela, le plus souvent on numérote ces éléments et on note $E = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et cette notation signifie sauf indication contraire que les x_i dans l'accolade sont distincts. Numérotter les p éléments de E revient à construire une bijection de $\{1, 2, \dots, p\}$ dans E qui à chaque entier de 1 à p fait correspondre un élément de E . On peut d'ailleurs caractériser les ensembles finis par :

Un ensemble non vide E est fini de cardinal p si et seulement si il existe une bijection de $\{1, 2, \dots, p\}$ dans E .

Théorème 11 : Soit A une partie d'un ensemble fini E . Alors A est fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ et $(A = E \Leftrightarrow \text{card}A = \text{card}E)$

Démo : A étant inclus dans E , donc nécessairement A ne peut contenir plus d'éléments que E et par conséquent A est fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$. De plus, $\text{card}A = \text{card}E \Leftrightarrow A$ et E ont exactement les mêmes éléments.

Théorème 12 : Si E et F sont deux ensembles finis d'intersection vide (disjoints) alors $E \cup F$ est un ensemble fini et $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.

Démo : Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $F = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ où $p = \text{card}(E)$ et $n = \text{card}(F)$. Alors, $E \cup F = \{x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Comme $E \cap F = \emptyset$, aucun x_i n'est égal à un y_j . Donc $\text{card}(E \cup F) = p + n = \text{card}(E) + \text{card}(F)$.

Généralisation 13 : Si E_1, E_2, \dots, E_n sont des ensembles deux à deux disjoints alors $\text{card} \bigcup_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \text{card}E_i$.

Démo : Soit H_n : " Si E_1, E_2, \dots, E_n sont des ensembles deux à deux disjoints alors $\text{card} \bigcup_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \text{card}E_i$."

Init° : H_2 est vraie d'après le théo 12.

Propag° : Soit $n \in \mathbb{N}/n \geq 2$. Je suppose que H_n est vraie. Soit E_1, E_2, \dots, E_{n+1} des ensembles deux à deux disjoints.

Posons $E = E_1 \cup E_2, \dots, \cup E_n$ et $F = E_{n+1}$. Alors par associativité de la réunion, $E \cup F = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$. Et par hypothèse de récurrence, $\bigcup_{i=1}^n E_i$ est finie et $\text{card}E = \text{card} \bigcup_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \text{card}E_i$. De plus, $E \cap F = (\bigcup_{i=1}^n E_i) \cap E_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n (E_i \cap E_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^n \emptyset = \emptyset$.

Autrement dit, E et F sont disjoints. Donc, d'après le théorème 12, $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$; autrement dit,

$\text{card} \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \sum_{i=1}^n \text{card}E_i + \text{card}E_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \text{card}E_i$. OK !

CCL : $\forall n \geq 2, H_n$ est vraie.

Proposition 14 : Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E .

1) $\text{card}\bar{A} = \text{card}E - \text{card}A$.

2) $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$.

3) Si la famille (A_1, A_2, \dots, A_n) est une partition de E alors $\text{card}E = \sum_{i=1}^n \text{card}A_i$.

Démo : 1) A et \bar{A} vérifient $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$. Donc, $\text{card}(E) = \text{card}(A \cup \bar{A}) \stackrel{\text{théo 12}}{=} \text{card}A + \text{card}\bar{A}$. De même,

$B \setminus A$ et $A \cap B$ vérifient $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ et $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$. Donc, $\text{card}(B) \stackrel{\text{théo 12}}{=} \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$.

2) Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) une partition de E . Alors, $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ et A_1, A_2, \dots, A_n sont des ensembles deux à deux disjoints.

Par conséquent, $\text{card}E = \text{card} \bigcup_{i=1}^n A_i \stackrel{\text{généralisation 13}}{=} \sum_{i=1}^n \text{card}A_i$.

Théorème 15 : Soit E et F deux ensembles. $\text{card}(E) + \text{card}(F) = \text{card}(E \cup F) + \text{card}(E \cap F)$.

Démo : $(E \setminus F, F \setminus E, E \cap F)$ est une partition de $E \cup F$. Donc, $\text{card}(E \cup F) \stackrel{\text{prop 14.3}}{=} \text{card}(E \setminus F) + \text{card}(F \setminus E) + \text{card}(E \cap F)$

$\text{card}(E \cup F) \stackrel{\text{prop 14.b}}{=} \text{card}(E) - \text{card}(E \cap F) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F) + \text{card}(E \cap F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$. OK !

Conséquence 16 : E et F sont disjoints $\Leftrightarrow \text{card}(E) + \text{card}(F) = \text{card}(E \cup F)$.

Démo : E et F sont disjoints $\Leftrightarrow E \cap F = \emptyset \Leftrightarrow \text{card}(E \cap F) = 0 \stackrel{\text{théo 15}}{\Leftrightarrow} \text{card}(E) + \text{card}(F) = \text{card}(E \cup F)$.

Théorème 17 Soit E et F deux ensembles finis. $\text{card}(E \times F) = (\text{card}E) \times (\text{card}F)$.

Démo : Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et $F = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ où $p = \text{card}(E)$ et $n = \text{card}(F)$.

Alors $E \times F = \{(x_i, y_j) / i \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Soit $A_i = \{(x_i, y_j) / j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Alors $i \neq i' \Rightarrow x_i \neq x_{i'} \Rightarrow A_i \neq A_{i'}$. Donc, les sous-ensembles A_1, A_2, \dots, A_p de $E \times F$ sont deux à deux disjoints. De plus, $\bigcup_{i=1}^p A_i = E \times F$ j'en conclus que

(A_1, A_2, \dots, A_p) est une partition de $E \times F$. Par conséquent, $\text{card}(E \times F) = \sum_{i=1}^p \text{card}A_i = \sum_{i=1}^p n = np = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Généralisation 18 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Si E_1, E_2, \dots, E_q sont des ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q$ est fini et $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_q)$.

Cas particulier : $\text{card}(E^q) = \text{card}(E)^q$.

Démo Soit H_q : " Si E_1, E_2, \dots, E_q sont des ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q$ est fini et $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_q)$."

init: H_1 et H_2 sont vraies.

Propag : Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que H_q est vraie. Soit E_1, E_2, \dots, E_{q+1} des ensembles finis alors par hypothèse de récurrence $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q$ est fini et $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_q)$. De plus, on peut considérer que $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{q+1} = (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times E_{q+1}$. Donc d'après le théorème 17, $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times E_{q+1}$ est

fini et $\text{card}((E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times E_{q+1}) = \text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_q) \times \text{card}(E_{q+1}) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_q) \times \text{card}(E_{q+1})$.

CCL : $\forall q \in \mathbb{N}^*, H_q$ est vraie.

III. Applications entre ensembles finis.

Proposition 19 : Soit E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F .

1. Si f est injective et E est fini alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
2. f est injective si et seulement si $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$.
3. Si f est surjective et F est fini alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.
4. f est surjective si et seulement si $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$.
5. Si E ou F est de cardinal fini et f est bijective de E sur F alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

Démo :

1) Supposons f injective. Alors $i \neq i' \Rightarrow x_i \neq x_{i'} \Rightarrow f(x_i) \neq f(x_{i'})$. Par conséquent, $\text{card}\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\} = \text{card}(E) = p$. Or, $H = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\}$ est une partie de F donc $p = \text{card}(H) \leq \text{card}(F) = n$.

2) Supposons f surjective. Alors $f(E) = \underbrace{\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\}}_{\text{pas forcément distincts}} = F$. Donc, $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F) = n$.

Mais, $\text{card}\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\} \leq p$. Donc, $\text{card}(F) = n \leq p = \text{card}(E)$.

Théorème 20 : Soit E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ et f une application de E dans F .

Alors, f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

Démo : f injective $\Leftrightarrow \text{card}\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\} = p = \text{card}(E)$

f injective $\Leftrightarrow \underbrace{\text{card}\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)\}}_{f(E)} = \text{card}(F) \Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow f$ surjective.

Par conséquent, f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

IV. Nombre de q -uplets. Nombre d'applications.

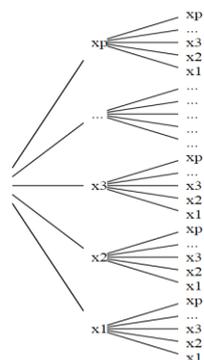
Théorème 21 : Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Si E est un ensemble fini tel que $\text{card}(E) = p$ alors E^q , l'ensemble des q -uplets d'éléments de E , est un ensemble fini et $\text{card}(E^q) = (\text{card}(E))^q$.

Autrement dit, $p^q = \text{card}(E)^q$ est le nombre de q -uplets d'éléments de E .

Démo : il suffit d'appliquer la généralisation 18. en prenant $E = E_1 = E_2 = \dots = E_q$ un ensemble fini, alors E^q est fini et $\text{card}(E^q) = (\text{card}(E))^q$.

Autre démo : par un arbre de dénombrement. $E = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. On cherche combien il existe d'objets de la forme

$(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q})$ où les i_k sont des entiers de $\llbracket 1, p \rrbracket$ pas forcément distincts. Pour le choix de x_{i_1} , on a donc p possibilités parmi les p éléments de E ; pour le choix de x_{i_2} , on a donc p possibilités parmi les p éléments de E Pour le choix de x_{i_q} , on a donc p possibilités parmi les p éléments de E .



(...)

Pour chaque composante, on a p choix.

A chaque nouvelle étape, le nombre de bras est donc multiplié par p .

$p \times p \times \dots \times p = p^q$ est donc le nombre de q -uplets différents dont les composantes sont choisies parmi les p éléments de E .

étape 1 étape 2 (...)
 p choix de la p choix de la
 première deuxième
 composante composante

Théorème 22 : Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n .

L'ensemble F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F est un ensemble fini et $\text{card } \mathcal{F}(E, F) = (\text{card } F)^{\text{card } E} = n^p$.

Démo : Chaque application de E dans F est entièrement définie par le choix des images $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)$ parmi les vecteurs de F . On

peut considérer $\Delta: \left((y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}) \mapsto f: \begin{pmatrix} E \rightarrow F \\ x_k \mapsto y_{i_k} \end{pmatrix} \right)$ où les i_k sont des entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ pas forcément distincts.

Alors, Δ est bijective de F^p sur F^E . Donc, $\text{card}(F^E) = \text{card}(F^p) \stackrel{\text{théo 21}}{=} \text{card}(F)^p = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$.

Définition 23 : Pour tous entiers naturels p et q ,

on pose : $A_p^q = \begin{cases} p(p-1) \dots (p-q+1) = \frac{p!}{(p-q)!} & \text{si } q \leq p \\ 0 & \text{si } q > p \end{cases}$. A_p^q est l'arrangement de q éléments choisis parmi p .

Proposition 24 : Soit p et q deux entiers naturels. Alors,

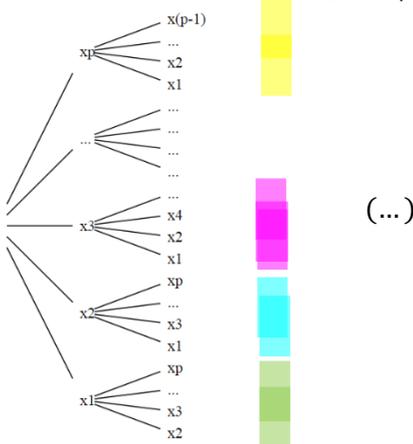
A_p^q est le nombre de q -uplets de composantes toutes distinctes choisies parmi p éléments.

Si E est constitué de ces p éléments, alors un tel q -uplet d'éléments distincts de E est appelé un arrangement de q éléments de E (ou un q -arrangement).

Démo : Notons N le nombre de q -uplets de composantes toutes distinctes choisies parmi les éléments de E .

si $q > p$ alors il n'existe pas q éléments de E distincts donc il n'existe aucun q -uplets de composantes toutes distinctes choisies parmi les éléments de E . Ici $N = 0$.

Si $q \leq p$, faisons un arbre de dénombrement. On cherche donc combien il existe d'objets de la forme $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q})$ où les i_k sont des entiers de $\llbracket 1, p \rrbracket$ et tous distincts. Pour le choix de x_{i_1} , on a donc p possibilités parmi les p éléments de E ; pour le choix de x_{i_2} , on a donc $p-1$ possibilités parmi les $p-1$ éléments de E distincts de x_{i_1} , Pour le choix de x_{i_q} , on a donc $p-(q-1)$ possibilités parmi les $p-(q-1)$ éléments de E distincts de $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{q-1}}$.



A chaque nouvelle étape, on a un choix de moins qu'à l'étape précédente. x_1 interdit, x_2 interdit, x_3 interdit ..., x_p interdit puisque les composantes doivent être toutes distinctes.

$$N = \underbrace{p}_{\text{choix pour } x_{i_1}} \times \underbrace{(p-1)}_{\text{choix pour } x_{i_2}} \times \dots \times \underbrace{(p-(q-1))}_{\text{choix pour } x_{i_{q-1}}} = \frac{p!}{(p-q)!}$$

est donc le nombre de q -uplets différents dont les composantes sont toutes distinctes et sont choisies parmi les p éléments de E .

étape 1 étape 2 (...)
 p choix de la p-1 choix de la
 première deuxième
 composante composante

Ainsi, $N = A_p^q$ est le nombre de q -uplets de composantes toutes distinctes choisis parmi les éléments de E .

Proposition 25 : Soit n et p deux entiers naturels.

Alors, A_n^p est le nombre d'applications injectives d'un ensemble fini à p éléments dans un ensemble fini à n éléments.

Démo : Soit E et F deux ensembles tels que $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$.

Si $p > n$ alors la prop. 19 assure qu'il n'existe pas d'application injective de E sur F .

Si $p \leq n$, alors chaque application injective de E dans F est entièrement définie par le choix des images toutes distinctes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)$ parmi les vecteurs de F . Notons G l'ensemble des applications injectives de E dans F et H l'ensemble des p -uplets d'éléments de F dont les composantes sont toutes distinctes. On peut considérer $\Delta: \left((y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}) \mapsto f: \begin{pmatrix} E \rightarrow F \\ x_k \mapsto y_{i_k} \end{pmatrix} \right)$ où les i_k sont des entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tous distincts.

Alors, Δ est bijective de H sur G . Donc, $\text{card}(G) = \text{card}(H) \stackrel{\text{théo précédent}}{=} A_n^p$.

Ainsi, A_n^p est le nombre d'applications injectives de E dans F .

Proposition 26 : Soit E un ensemble fini de cardinal p . Le nombre de bijections de E dans lui-même est $p!$.

$p!$ est aussi le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal p .

Une telle bijection de E sur E est aussi appelée permutation de E .

$p!$ est le nombre de façon différente d'ordonner p éléments donnés.

Démo : D'après la prop.20, une bijection de E dans E est une application de E dans E injective. Or, la prop. précédente assure que $A_p^p = p!$ est le nombre d'applications injectives de E dans E . Ainsi, $p!$ est le nombre d'applications bijectives de E sur E .

V. Parties d'un ensemble fini

Rappel 27 : Pour tous entiers naturels n et p , $\binom{p}{n} = \begin{cases} \frac{p!}{n!(p-n)!} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$ (coefficient binomial) et $A_p^n = n! \binom{p}{n}$.

Proposition 28 : Soit p et q deux entiers naturels.

$\binom{p}{q}$ est le nombre de parties à q éléments dans un ensemble à p éléments.

$\binom{p}{q}$ est le nombre de façon de choisir q éléments parmi p .

Démo : Soit E un ensemble de cardinal p .

Si $q > p$ alors il n'existe aucune partie de E à q éléments.

Si $q = 0$ alors il n'existe qu'une seule partie de E à 0 éléments : c'est l'ensemble vide.

Si $0 < q \leq p$ alors chaque q -uplet d'éléments distincts de E est entièrement définie par le choix de q éléments distincts de E et par le choix de la place de ces q éléments dans le q -uplet. Soit H l'ensemble des q -uplets d'éléments de E dont les composantes sont toutes distinctes.

Première démo :

Prenons une partie A de E à q éléments. Notons Q_A l'ensemble des q -uplets dont les composantes sont distinctes et sont les éléments de A . $\text{card}(Q_A) = q!$. De plus, si A et B sont deux parties de E distinctes et de cardinal q alors les q -uplets formés à partir des éléments de A seront tous distincts des q -uplets formés à partir des éléments de B . Autrement dit $Q_A \cap Q_B = \emptyset$. Ainsi $(Q_A)_{\substack{A \subseteq E \\ \text{card}(A)=q}}$ est une partition de H . J'en

déduis que

$$A_p^q = \text{card}(H) = \sum_{\substack{A \subseteq E \\ \text{card}(A)=q}} \text{card}(Q_A) = \sum_{\substack{A \subseteq E \\ \text{card}(A)=q}} q! = q! \left(\sum_{\substack{A \subseteq E \\ \text{card}(A)=q}} 1 \right) = q! \times (\text{nombre de parties de } E \text{ à } q \text{ éléments}).$$

Ainsi, nombre de parties de E à q éléments $= \frac{1}{q!} A_p^q = \binom{p}{q}$.

Autre démo :

Notons U l'ensemble des sous-ensembles de E à q éléments, V l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, q \rrbracket$.

Soit $\nabla : \left(\left(\{ \underbrace{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q}}_{\text{avec } i_1 < i_2 < \dots < i_q} \}, f \right) \mapsto (x_{i_{f^{-1}(1)}}, x_{i_{f^{-1}(2)}}, \dots, x_{i_{f^{-1}(q)}}) \right)$. Par exemple, prenons $q = 3$, $A = \{x_2, x_3, x_7\}$ (ici $i_1 = 2, i_2 = 3$ et $i_3 = 7$) et

$f : \begin{pmatrix} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 3 \end{pmatrix}$ (*) permutation de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. Alors $\nabla(A, f) = (x_{i_2}, x_{i_1}, x_{i_3}) = (x_3, x_2, x_7)$.

(*) 2 indique la place de x_{i_1} dans le triplet image, 1 indique la place de x_{i_2} dans le triplet et 3 indique la place de x_{i_3} dans le triplet.

Alors, ∇ est une bijection de $U \times V$ sur H . Donc, $\underbrace{\text{card}(H)}_{=A_p^q} = \text{card}(U \times V) = \text{card}(U) \times \underbrace{\text{card}(V)}_{=q!}$. Ainsi, $\text{card}(U) = \frac{1}{q!} A_p^q = \binom{p}{q}$.

CCL : dans tous les cas, $\binom{p}{q}$ est le nombre de parties de E contenant exactement q éléments. $\binom{p}{q}$ est donc le nombre de façon de faire des paquets de q éléments parmi p éléments.

Exemple 29 : Un jeu de tarot contient 78 cartes, lorsqu'on y joue à 3 joueurs, chaque joueurs a en début de partie 24 cartes. Il y a $\binom{78}{24}$ mains possibles au début du jeu.

Définition 30 : Si E un ensemble fini de cardinal p alors une partie de E à q éléments est encore appelée une combinaison de q éléments de E (ou une q -combinaison). Il y a donc $\binom{p}{q}$ q -combinaisons dans E .

Théorème 31 : Soit E un ensemble fini tq $\text{card}(E) = p$.

Le nombre de sous-ensembles (parties) de E est 2^p .

Autrement dit, $\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card}(E)}$.

Démo : Soit A_q l'ensemble des parties de E à q éléments. Alors (A_0, A_1, \dots, A_q) est une partition $\mathcal{P}(E)$. J'en déduis que :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^q \text{card}(A_k) = \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} = \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} 1^q 1^{p-q} = (1+1)^p = 2^p.$$

Exemple 32 : Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Alors,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^4 = 16 \text{ OK!}$$

NB33 : E et $\mathcal{P}(E)$ ne contiennent pas du tout les mêmes objets. $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble de sous-ensembles de E .