Corrigé TD 22 Dénombrement.

Ex 0 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E et $f:\begin{pmatrix} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{pmatrix}$.

1) Donner une CNS sur A et B pour que f soit injective.
2) Donner une CNS sur A et B pour que f soit surjective.
3) En déduire une CNS sur A et B pour f soit bijective.
4) Désormais f est bijective.
   a) Expliciter f^{-1}.
   b) On suppose que E est un ensemble fini. Qu'en déduit-on sur les cardinaux de $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ et $\mathscr{P}(E)$? Vérifier cette égalité compte tenu des conditions vérifiées par A et B.

1) $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \Longrightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases} \Longrightarrow X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$.

Alors, si $A \cup B = E$ alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \Longrightarrow X = Y$. Et ainsi, si $A \cup B = E$ alors f est injective.

2) Soit $(H,K) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. $f(X) = (H,K) \Leftrightarrow \begin{cases} H = X \cap A \\ K = X \cap B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H = X \cap A \\ K = X \cap B \\ H \cup K \subset X \end{cases}$.

3) si $A \cup B \neq \emptyset$ alors il existe un élément x commun à A et B et le couple $(\{x\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent par f car si on imagine un instant que $(\{x\}, \emptyset)$ admet un antécédent X alors X contient $\{x\} = \{x\} \cup \emptyset)$ et par suite $X \cap A = \{x\} = X \cap B$ donc $X \cap B \neq \emptyset$ *ce qui contredit* $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$. *Donc*, si $A \cup B \neq \emptyset$ alors f n'est pas surjective.

Par contre si $A \cup B = \emptyset$ alors $H \cup K$ est un antécédent de (H,K) par f.

Donc f est surjective sietssi $A \cup B = \emptyset$.

4) f est bijective sietssi (A,B) est une partition de E.

5) $f^{-1}:\begin{pmatrix} \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(E) \\ (H,K) \mapsto H \cup K \end{pmatrix}$.

6) card$(\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)) = card(\mathscr{P}(E))$. Vérif: $card(A) + card(B) = card(E)$

7) card$(\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)) =$ card$(\mathscr{P}(A)) \times$ card$(\mathscr{P}(B)) = 2^{card\,(A)} \times 2^{card(B)} = 2^{card(A)+card\,(B)} = 2^{card(E)} =$ card$(\mathscr{P}(E))$

Ex 1 Soit E un ensemble et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition de E.

1) Justifier que : $\forall x \in E, \exists!\, i \in [\![1,n]\!] / x \in A_i$.

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on dit que $x \sim y$ lorsque x et y appartiennent au même A_i.

2) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
3) Soit $x \in E$, on note $\bar{x} = \{y \in E / x \sim y\}$ appelée la classe d'un élément x de E . Décrire $\bar{x}$.

Ex 2

1) Un digicode est constitué d'un chiffre d'une lettre A *ou* B et d'un autre chiffre dans cet ordre. Combien de codes existe-t-il ?
2) J'ai dans ma garde-robe 17 pantalons , 15 jupes , 28 tee-shirts , 7 chemisiers , 3 paires de collants de couleurs différentes et 30 pulls . Combien ai-je de tenues différentes ?
3) En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères .Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Combien de caractères peut –on coder avec un octet (8 chiffres binaires ordonnés) ?
4) Combien de trinômes de colles différents peut-on former dans une classe de PCSI de 35 élèves ?
5) Au loto, il y a 49 numéros, une grille de loto est composée de 6 numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?
6) Une plaque d'immatriculation française est composée de deux lettres puis trois chiffres et deux lettres : $AB - 123 - CD$. Les lettres I, O, U ne sont jamais utilisés, les couples SS et WW non plus. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?

Ex 3 Dans un lycée de 1200 élèves , 652 pratiquent une activité sportive , 327 jouent d'un instrument et 453 ne font ni sport , ni musique . Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens .

Notons

L=ensemble des lycéens

S=ensemble de lycéens faisant du sport

M=ensemble de lycéens faisant de la musique

Alors, $L = (S \cup M) \cup \overline{(S \cup M)}$ et $(S \cup M) \cap \overline{(S \cup M)} = \emptyset$.

Donc, $card(L) = card(S \cup M) + card\overline{(S \cup M)} = card(S) + card(M) - card(S \cap M) + card\overline{(S \cup M)}$.

Alors, $card(S \cap M) = card(S) + card(M) + card\overline{(S \cup M)} - card(L) = 652 + 327 + 453 - 1200 = 232$.

Ex 4

1) Un digicode est constitué de trois chiffres compris entre 0 et 9 et d'une lettre A *ou* B .

a) Combien de codes existe-t-il ne comportant que des chiffres distincts ?
b) Combien de codes existe-t-il ne comportant que des chiffres dans un ordre strictement croissant ?
c) Combien de codes existe-t-il comportant exactement deux chiffres égaux ?
d) Combien de codes existe-t-il comportant au moins un 1?
e) Soit $k \in \{0,..,18\}$. Combien de codes dont la somme des deux premiers chiffres vaut k existe-t-il ?

2) Une agence matrimoniale souhaite faire un sondage auprès de ses clients. Elle teste son questionnaire sur un échantillon de 4 personnes parmi les 300 clients dont 120 femmes.
a) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
b) Quel est le nombre d'échantillons différents ne contenant aucune femme ?
c) Quel est le nombre d'échantillons différents contenant au moins un homme et une femme ?

3) Dans une urne, il y a 15 boules numérotées de 1 à 15, les boules 1 à 5 sont blanches , les autres sont noires
a) On tire cinq boules simultanément.
i. Combien y-a-t-il de tirages possibles ? $\binom{15}{5}$
j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires ? $\binom{5}{2}\binom{10}{3}$
b) On tire successivement 5 boules sans remise.
i. En tenant compte de l'ordre combien y-a-t-il de tirages possibles ? A_{15}^5
j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires dans tout ordre ? $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3} \times 5!$
c) On tire successivement 5 boules avec remise.
i. En tenant compte de l'ordre combien y-a-t-il de tirages possibles ? 15^5
j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires ? $5^2 \times 10^3 \times 5!$

Ex 5 Déterminer le nombre d'anagrammes (sans sens) des mots suivants : SMARTPHONE , SOURISpet BONBONNE.
Smartphone est un mot de 10 lettres toutes distinctes. Donc construire un anagramme de Smartphone revient à placer ces 10 lettres distinctes dans 10 cases différentes, il y a donc autant d'anagrammes de Smartphone que de permutations d'un ensemble à 10 éléments soit 10! anagrammes .
Souris est un mot de 6 lettres dont deux lettres sont égales et les autres toutes distinctes. Donc construire un anagramme de Souris revient à choisir deux places parmi les 6 pour placer les deux lettres S puis à placer les 4 autres lettres distinctes dans les 4 places restantes. Le nombre d'anagrammes de Souris est donc égal à $\underbrace{\binom{6}{2}}_{\substack{nombre\\de\ places\\pour\ les\ S}} \underbrace{4!}_{\substack{nombres\ de\\possibilités\\pour\ les\ autres\ lettres}}$

Bonbonne est un mot de 8 lettres dont deux B, deux 0, trois N et un E. Donc construire un anagramme de Souris revient à :
choisir deux places parmi les 8 pour placer les des deux lettres B .
choisir deux places parmi les 6 restantes pour placer les des deux lettres O.
choisir trois places parmi les 4 restantes pour placer les trois lettres N
Le nombre d'anagrammes de Bonbonne est donc égal à $\underbrace{\binom{8}{2}}_{\substack{nombre\\de\ places\\pour\ les\ B}} \underbrace{\binom{6}{2}}_{\substack{nombres\ de\\possibilités\\pour\ O}} \underbrace{\binom{4}{3}}_{\substack{nombres\ de\\possibilités\\pour\ N}}$.

Ex 6
1) Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$.
2) Calculer le nombre d'applications de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissantes.
3) Calculer le nombre de surjections de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$.
4) Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$.
5) Déterminer le nombre d'applications f de $\{1, ,10\}$ dans $\{1,10\}$ telles que , si n pair alors $f(n)$ pair .
6) Déterminer le nombre d'applications injectives de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image.

1) Comme $\{1,2,3\}$ est un ensemble fini,[f est une surjection de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$ sietssi f est une permutation de $\{1,2,3\}$]. Donc le nombre de surjections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$ est égal au nombre de permutations de $\{1,2,3\}$ donc est égal à 3! .

2) Construire une application de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissante revient à
1. Choisir les p images distinctes (car f strictement croissante donc injective) .
2. Ordonner ces images pour savoir qui est $f(1), f(2),\dots,f(p)$.

En effet , on peut d'abord remarquer qu'une application strictement croissante de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ étant injective, les entiers $f(1), f(2),\dots,f(p)$ sont tous distincts dans $\{1,\dots,n\}$. Par conséquent, si $p > n$ alors $\{1,\dots,n\}$ ne contient pas p valeurs distinctes donc il n'existe aucune application strictement croissante de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. De plus, considérons $y_1, y_2,\dots,y_p$ des entiers distincts choisis parmi les n entiers 1,2,...,n. Ordonnons ces entiers de manière strictement croissante :

$y_{i_1} < y_{i_2} < \cdots < y_{i_p}$ tels que $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1,2,\dots,p\}$. Alors il existe une et une seule application de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissante qui vérifie : $\forall k \in [\![1,p]\!], f(k) = y_{i_k}$. Nous venons de démontrer qu'en notant A l'ensembles de applications strictement croissantes de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ et B l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ contenant p éléments , $\varphi: (f \mapsto \{f(1), f(2), \dots, f(p)\})$ est bijective de A sur B.

Il existe donc autant d'applications strictement croissantes de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ que de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Ainsi, le nombre d'applications de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissantes est $\binom{n}{p}$.

3) Construire une surjection de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$, c'est :
1.Choisir l'élément c de $\{1,2,\dots,n\}$ qui aura deux antécédents
2. Choisir les deux éléments a et b de $\{0,1,2,\dots,n\}$ qui auront la même image
3. Construire une bijection de $\{0,1,2,\dots,n\}\backslash\{a,b\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}\backslash\{c\}$.
En effet , considérons f une surjection de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$. Alors f n'est pas une bijection (car $card\{0,1,..,n\} \neq card(\{1,2,\dots,n\})$ et tout élément de $\{1,2,\dots,n\}$ doit avoir au moins un antécédent par f . Comme $card\{0,1,..,n\} = card(\{1,2,\dots,n\}) + 1$, un unique élément de $\{1,2,\dots,n\}$ aura exactement deux antécédents par f et les autres éléments de $\{1,2,\dots,n\}$ auront exactement un antécédent par f . puisque
si deux éléments distincts a et b de $\{1,2,\dots,n\}$ ont deux antécédents (par f) chacun : a_1, a_2, b_1, b_2 alors $card(\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,b_1,b_2\}) = n+1-4 = n-3 < n-2 = card(\{1,2,\dots,n\}\backslash\{a,b\})$ donc il n'existe pas de surjection de $\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}\backslash\{a,b\}$... donc une telle f n'existe pas.
De même si un élément a de $\{1,2,\dots,n\}$ a trois antécédents (par f) : $a_1,a_2,a_3, card(\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,a_3\}) = n+1-3 = n-2 < n-1 = card(\{1,2,\dots,n\}\backslash\{a\})$ donc il n'existe pas de surjection de $\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,a_3\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}\backslash\{a\}$ donc une telle f n'existe pas.

Alors, le nombre de surjection de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$ est $\underbrace{n}_{\substack{choix\ de\\ c}} \underbrace{\binom{n+1}{2}}_{\substack{choix\ des\ deux\\ antécédents\ de\ c}} \underbrace{(n-1)!}_{\substack{nombre\ de\ bijection\\ d'un ensemble\ de\ (n-1)\\ éléments\ dans\ un\ ensemble\\ de\ n-1\ éléments}}$.

4) Il n'existe que deux applications de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$ qui ne sont pas des surjections : l'application constante égale à 0 et celle constante égale à 1. Donc le nombre de surjections de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$ est donc égal au nombre total d'applications de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$ auquel on ôte 2 soit $2^n - 2$.

5) Construire une application f de {1, ,10} dans {1,10} telles que , si n pair alors $f(n)$ pair , revient à :
1.Construire une application de $\{2,4,6,8,10\} sur \ \{2,4,6,8,10\}$
1.Construire une application de $\{1,3,5,7,9\} sur \ \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
Le nombre d' applications f de {1, ,10} dans {1,10} tq (n pair$\Longrightarrow f(n)$ pair) est donc $\underbrace{5^5}_{\substack{nbre\\ d'applications\\ d'un\ ensemble\ de\ cardinal\ 5\\ dans\\ un\ ensemble\ de\ cardinal\ 5}} \times \underbrace{10^5}_{\substack{nbre\\ d'applications\\ d'un\ ensemble\ de\ cardinal\ 5\\ dans\\ un\ ensemble\ de\ cardinal\ 10}}$.

6) $card(\{1,2,..,p\}) = p$ et $card(\{1,\dots,n\}) = n$.
Donc, si $p > n$ alors il n'existe aucune injection de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. Désormais supposons que $p \leq n$.
Construire une application f injective de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image, revient à
1. Choisir l'unique antécédent a de 1 par f parmi les entiers $1,2,..,p$.
2. Construire une injection de $\{1,2,..,p\}\backslash\{a\}$ sur $\{2,\dots,n\}$
Le nombre d' applications injectives de $\{1,2,..,p\}$dans $\{1,\dots,n\}$qui admettent 1 dans leur image est donc

$\underbrace{p}_{\substack{nbre\ d'antécédents\\ possibles\ pour\ 1}} \times \underbrace{A_{n-1}^{p-1}}_{\substack{nbre\\ d'applications\ injectives\\ d'un\ ensemble\ de\ cardinal\ p-1\\ dans\\ un\ ensemble\ de\ cardinal\ n-1}}$ (cette formule reste valable si $p > n$ puisque dans ce cas $p-1 > n-1$ donc $A_{n-1}^{p-1} = 0$)

Ex 7 Soit E un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ contenant a entiers pairs et b entiers impairs. Montrer en utilisant E que : $\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$.En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ $où\ n \in \mathbb{N}$.

Notons A l' ensemble de parties de E à p éléments .
Comme $card(E) = a+b$, $card(A) = \binom{a+b}{p}$.
Comptons d'une autre manière ce nombre de parties de E à p éléments. Notons $\forall k \in [\![0,p]\!], A_k$ l'ensemble des aprties de E à p éléments contenant k élémenets pairs. Alors $(A_0, A_1, \dots, A_p)$ est une partition de A . Donc $card(A) = \sum_{k=0}^{p} card(A_k)$
Consrtuire un élément de A_k revient à
1. Choisir les k éléments pairs parmi les a appartement à E si possible (i.e. si $k \leq a$).

2. Choisir les $p-k$ autres éléments qui sont necéssairement impairs et choisis parmi les b appartement à E si possible (i.e. si $p-k\leq b$).

Donc, $card(A_k)=\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$ valable si $k>a\ ou\ p-k>b$ car dans ce cas $A_k=\emptyset$ donc $card(A_k)=0=\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$).

Ainsi, $\binom{a+b}{p}=cardA=\sum_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$.

Ex 8 Soit $(p,n)\in\mathbb{N}^{*2}$ et $E=\{1,\dots,n\}$ Déterminer :

1) le nombre de couple (x,y) d'éléments de E tels que $x+y=n$.
2) le nombre de couple (x,y) d'éléments distincts de E .
3) le nombre de couple (x,y) d'éléments de E tels que $x>y$.
4) le nombre u_n de couple (x,y) d'éléments de E tels que x ou y impair . Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}$.
5) le nombre de p-uplets $(x_1,x_2,..,x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1<x_2<\cdots<x_p$.
6) le nombre de p-uplets $(x_1,x_2,..,x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_p$.

1) $card\{(1,n-1),(2,n-2),\dots,(n-1,1)\}=n-1$
2) $card\{(x,y)\in\{1,\dots,n\}^2/x\neq y\}=A_n^2=n(n-1)$
3) $Notons\ A_k=\{(k,y)\in\{1,\dots,n\}^2/k>y\}\ et\ A=\{(x,y)\in\{1,\dots,n\}^2/x>y\}$. Alors $(A_2,A_3,\dots,A_n)$ est une partition de A donc $card(A)=\sum_{k=1}^{n}card(A_k)\underbrace{=}_{car\ A_k=\{(k,k-1),(k,k-2),\dots,(k,1)\}}\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$.
4) $u_n=cardB$ où $B=\{(x,y)\in\{1,\dots,n\}^2/$ x ou y impair$\}$.

$B=E^2\backslash\{(x,y)\in\{1,\dots,n\}^2/\ x$ et y pairs $\}$

$Or, C=\{(x,y)\in\{1,\dots,n\}^2/\ x$ et y pairs $\}=\begin{cases}\{2,4,6,\dots,n\}\times\{2,4,6,\dots,n\}si\ n\ pair\\ \{2,4,6,\dots,n-1\}\times\{2,4,6,\dots,n-1\}si\ n\ pair\end{cases}$. Donc $card(C)=\begin{cases}\left(\frac{n}{2}\right)^2 & si\ n\ pair\\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 & si\ n\ impair\end{cases}$.

Alors $u_n=card(B)=card(E\times E)-cardC=\begin{cases}n^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2 & si\ n\ pair\\ n^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 & si\ n\ impair\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{4}n^2 si\ n\ pair\\ \frac{3}{4}n^2+n-\frac{1}{4}\ si\ n\ impair\end{cases}$.

Donc, $v_n=\frac{u_n}{n^2}=\begin{cases}\frac{3}{4}si\ n\ pair\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}\ si\ n\ impair\end{cases}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_{2n}=\frac{3}{4}=\lim\limits_{n\to+\infty}v_{2n+1}. Ainsi\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{3}{4}$.

5) Construire un p-uplet $(x_1,x_2,..,x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1<x_2<\cdots<x_p$, revient à

1. Choisir p éléments distincts parmi les n éléments de E (imoosible si $p>n$).
2. Ordonner ces p éléments de manière strictement croissantes pour le ranger deans le p-uplet.

Donc, le nombre de p-uplets $(x_1,x_2,..,x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1<x_2<\cdots<x_p$ est $\underbrace{\binom{n}{p}}_{\substack{nbre\ de\\ façon\ de\ prendre\\ p\ éléméents\ parmir\ n}}\times\underbrace{1}_{\substack{nbre\ de\ ùfacons\ de\ les\\ ordonner}}$

6) Soit A l'ensemble des p-uplets $(x_1,x_2,..,x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_p$.

Soit B l'ensemble des p-uplets $(y_1,y_2,..,y_p)$ d'éléments de $[\![1,n+p-1]\!]$ tels que $y_1<y_2<\cdots<y_p$.D'après 5) ; $card(B)=\binom{n+p-1}{p}$.

Cosntruisons une bijection de A sur B :

Si $x_1,x_2,..,x_p$sont des entiers tels que $1\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_p\leq n$ alors $1\leq x_1<x_2+1<x_3+2<\cdots<x_p+p-1\leq n+p-1$.

Soit f définie sur A par : $f(x_1,x_2,..,x_p)=(x_1,x_2+1,x_3+2..,x_p+p-1)$.

Alors, d'après ce qui précède, $\forall(x_1,x_2,..,x_p)\in A, f(x_1,x_2,..,x_p)\in B$. De plus, f est bijective de A sur B . En effet, $Soit\ (y_1,y_2,..,y_p)\in B$.

$$f(x_1,x_2,..,x_p)=(y_1,y_2,..,y_p)\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1\\ y_2=x_2+1\\ y_3=x_3+2\\ \vdots\\ y_p=x_p+p-1\\ x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1\\ x_2=y_2-1\\ x_3=y_3-2\\ \vdots\\ x_p=y_p-(p-1)\\ x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_p\end{cases}.$$

Comme $y_1,y_2,..,y_p\ sont\ des\ entiers\ tels\ que\ 1\leq y_1<y_2<..<y_p\leq n+(p-1)$, nous pouvons affirmer que : $1\leq y_1\leq y_2-1\leq y_3-2\leq..\leq y_p-(p-1)\leq n$. Ainsi, $(y_1,y_2-1,y_3-2,..,y_p-(p-1))$ est l'unique antécédent de $(y_1,y_2,..,y_p)$par f.

J'en déduis que $card(A)=card(B)=\binom{n+p-1}{p}$.

Ex 9 Soit un ensemble fini E de cardinal n où $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair , que de parties de cardinal impair .
2) Calculer $\sum_{A\subset E}(-1)^{card(A)}$.
3) Dénombrer les couples (X,Y) de $\mathscr{P}(E)^2$tels que $X\subset Y$.
4) Dénombrer les couples (X,Y) de $\mathscr{P}(E)^2$tels que $X\cap Y=\emptyset$.
5) Soit $p\in [\![0,n]\!]$ et $F=\{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/X\cap Y=\emptyset\ \ et\ card(X\cup Y)=p\}$. En dénombrant F, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}.$$

1) Soit $\Phi=\{X\subset E/card(X)\ pair\}$ et $\Gamma=\{X\subset E/card(X)\ impair\}$. Comme $\Gamma\ et\ \Phi$ sont des ss-ensembles de $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(E)est\ fini\ (\ de\ cardinal\ 2^n)$, $\Gamma\ et\ \Phi$ sont finis.

Soit a un élément de E.

Posons $f:\Phi\to\Gamma$ telle que $f(X)=\begin{cases}X\cup\{a\}\ si\ a\notin X\\ X\backslash\{a\}\ si\ a\in X\end{cases}$ et $g:\Gamma\to\Phi$ telle que $g(X)=\begin{cases}X\cup\{a\}\ si\ a\notin X\\ X\backslash\{a\}\ si\ a\in X\end{cases}$.

Alors $g\circ f=id_\Phi$ et $f\circ g=id_\Gamma$. Donc f est bijective et ainsi, $card(\Gamma)=card(\Phi)$.

De plus, (Γ,Φ) est une partition de $\mathscr{P}(E)$. Donc, $card(\Gamma)+card(\ \Phi)=card(\mathscr{P}(E)\ )=2^n$. Donc $2card(\Gamma)=2^n$ et ainsi, $card(\ \Phi)=card(\Gamma)=2^{n-1}$.

2) $$\sum_{A\subset E}(-1)^{card(A)}=\sum_{A\in\mathscr{P}(E)}(-1)^{card(A)}\underbrace{=}_{\substack{car\ (\Gamma,\Phi)\ est\ une\ partition\\ de\ \mathscr{P}(E)}}\sum_{A\in\Phi}(-1)^{card(A)}+\sum_{A\in\Gamma}(-1)^{card(A)}$$

$$=\sum_{A\in\Phi}1+\sum_{A\in\Gamma}(-1)=card(\Phi)-card(\Gamma)=0.$$

3) Soit $\Omega=\{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/X\subset Y\}et\ \Omega_k=\{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/X\subset Y\ et\ card(Y)=k\}\subset\Omega$.

Alors $(\Omega_0,\Omega_1,\dots,\Omega_n)$ est une partition de Ω car

- Si $k\neq k'$ alors $[(X,Y)\in\Omega_k\Longrightarrow cardY=k\Longrightarrow cradY\neq k'\Longrightarrow(X,Y)\notin\Omega_{k'}]$ ce qui signifie que $\Omega_k\cap\Omega_{k'}=\emptyset$.
- $\forall k,\Omega_k\subset\Omega\ donc\ \bigcup_{k=0}^{n}\Omega_k\subset\Omega\ et$ Si $(X,Y)\in\Omega$ alors Y est fini et en posant $k=card(Y)\ alors\ (X,Y)\in\Omega_k$.
  Ainsi, $\Omega=\bigcup_{k=0}^{n}\Omega_k$.

Par conséquent, $card(\Omega)=\sum_{k=0}^{n}card(\Omega_k)$. Déterminons $card(\Omega_k)$:

Construire un élément de $\Omega_k$revient à :

1. Choisir une partie Y de E à éléments.
2. Choisir un sous-ensemble X de Y .

$$\text{Donc, } card(\Omega_k)=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{choix\\ de\ Y\\ =\\ nbre\ de\\ parties\ à\ k\\ éléments\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ n\ éléments}}\ \underbrace{2^k}_{\substack{choix\ de\ X\\ =\\ nbre\ de\ parties\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ k\ éléments}}$$

J'en déduis que $card(\Omega)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k\overset{FBN}{=}(1+2)^n=3^n$.

4) Soit $\Omega'=\{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/X\cap Y=\emptyset\}$

Soit $f:\Omega\to\Omega'\ telle\ que\ f((X,Y))=(X,\bar{Y})\ et\ \ g:\Omega'\to\Omega\ \ \ telle\ que\ g((X,Y))=(X,\bar{Y})$. Alors $f\circ g=id_\Omega\ et\ g\circ f=id_{\Omega'}$. Donc f est bijective de Ω sur Ω' et par suite, $card(\Omega')=card(\Omega)=3^n$.

5) Soit $p\in [\![0,n]\!]$ et $F=\{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/X\cap Y=\emptyset\ \ et\ card(X\cup Y)=p\}$.

Première méthode pour dénombrer *F* : Construire un élément de F revient à :

1. Choisir une partie de E à p éléments. $\to X\cup Y$
2. Choisir dans cette partie un sous-ensemble X (le reste de l'ensemble constituera nécessairement Y)

$$\text{Donc } card(F)=\underbrace{\binom{n}{p}}_{\substack{choix\ pour\\ X\cup Y\\ =\\ nbre\ de\ parties\\ à\ p\ éléments\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ n\ élément.}}\ \underbrace{2^p}_{\substack{choix\ pour\ X\\ dans\ X\cup Y\\ =\\ nbre\ de\ parties\ dans\\ un\ ensemble\ à\\ p\ éléments}}.$$

Deuxième méthode pour dénombrer *F* : Soit $F_k=\{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2/X\cap Y=\emptyset\ \ et\ card(X\cup Y)=p\ et\ card(X)=k\ \}$

Alors $(F_k)_{k=0..p}$est une partition de F.Donc $cardF=\sum_{k=0}^{p}card(F_k)$ Dénombrons F_k: Construire un élément de F_k revient à :

3. Choisir une partie de E à k éléments. $\to X$
4. Choisir une partie de $\bar{X}$ à $p-k$ éléments $\to Y$.

$$Donc\ card(F_k)=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{nbre\\ de\ parties\ de\ E\\ à\ k(=card(X))\ éléments}}\ \underbrace{\binom{n-k}{p-k}}_{\substack{nbre\ de\ parties\\ à\ o-k\ éléments\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ n-k(=card\bar{X}\ )\ éléments}}$$

Ainsi, $2^p\binom{n}{p}=cardF=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

Ex 10 Pour tout entier naturel n non nul, on pose D_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n=\{1,\dots,n\}$.

Par convention , $D_0 = 1$.

1) Montrer que : pour tout entier n non nul, $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ puis que $D_n \leq n!$.

2) Soit $f(x) = e^{e^x - 1}$.

   a. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0 de la forme : $f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k!} x^k + o_0(x^N)$.

   b. En utilisant la relation, $f'(x) = e^x f(x)$ vérifiée par f en tout réel x, montrer que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (D_n).

   c. En déduire une relation entre a_n et D_n .

   d. Calculer alors D_2, D_3, D_4, D_5, grâce au DL , puis D_6 grâce à 1) .

1. $E_1 = \{1\}$. Il existe une unique partition de E_1. Donc $D_1 = 1 = \binom{1}{0} D_0$.

Soit $E_{n+1} = \{1,2,3, \dots, n+1\} et\ P_{n+1}$ l'ensemble des partitions de E_{n+1}. Toute partition de E_{n+1} est constituée de parties de E_{n+1} dont l'une contient l'élément $n+1$. Cette partie A contenant $n+1$ est de cardinal $p \in [\![1, n+1]\!]$.
Notons K_p l'ensemble des partitions de E_{n+1} dont la partie A contenant $n+1$ est de cardinal p.
Alors $p \neq q \Longrightarrow K_p \cap K_q = \emptyset\ et\ \bigcup_{q=1}^{n+1} K_q = P_{n+1}$. Par conséquent, $D_{n+1} = card(P_{n+1}) = \sum_{p=1}^{n+1} card(K_p)$.
Cherchons $card(K_p)$: Pour construire une partition de K_p,

- il faut choisir la partie A contenant $n+1$: cette partie est de cardinal p mais l'un de ces éléments est connu : il s'agit de l'élément $n+1$. Il faut donc choisir les autres éléments de A : on choisit ces $p-1$ autres éléments parmi les n éléments restants de E_{n+1}. J'ai donc $\binom{n}{p-1}$ choix pour A.
- Il faut choisir les autres parties de la partition. Ces autres parties vont couvrir $E_{n+1} \backslash A$. Choisir ces autres parties, c'est donc choisir une partition de l'ensemble $E_{n+1} \backslash A$ qui contient $n+1-p$ éléments. J'ai donc D_{n+1-p} choix pour ces autres parties.

Comme deux parties A différentes donnent deux partitions différentes et deux partitions de $E_{n+1} \backslash A$ différents donneront deux partitions de E_{n+1} différentes, j'en déduis que $card\ (K_p) = \binom{n}{p-1} D_{n+1-p}$.

Et par suite, $D_{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} D_{n+1-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} D_{n-p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
Montrons par récurrence forte sur n que $\forall n, D_n \leq n\,!$.
$D_0 = 1 \leq 0!\ , puis\ D_1 = 1 \leq 1!$ et enfin $D_2 = 1 + 1 = 2 \leq 2!$.
Soit n un entier naturel supérieur à 2. Supposons que $\forall k \in [\![0, n]\!], D_k \leq k!$. Alors $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! =$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\leq}_{\substack{car\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ tend \\ vers\ e\ en\ croissant}} e(n!) \underbrace{\leq}_{car\ n \geq 2} (n+1)!$ OK .

Donc $\forall n, D_n \leq n!$

3) Soit $f(x) = e^{e^x - 1}$.

a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc Taylor-Young assure que f admet le développement limité à tout ordre N au voisinage de 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k!} x^k + o_0(x^N)$ et $a_k = f^{(k)}(0)$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x f(x)$. Alors en appliquant Leibniz, j'obtiens : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ \ exp^{(n-k)}(x) f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x f^{(k)}(x)$.
Donc, $a_n = f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$. Ainsi, (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (D_n).

c. $a_0 = f(0) = 1 = \mathrm{D}_0$. Soit n un entier naturel. Supposons que $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = D_k$.
Alors, $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a_{n+1}$. J'en déduis que $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = D_k$.

d. $f(x) = e^{e^x - 1} = e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)} \overset{\substack{u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \\ \lim_{x \to 0} u(x) = 0}}{\cong} 1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{6} + \frac{u(x)^4}{24} + \frac{u(x)^5}{120} + o_0(x^5)$

$$\text{avec} \begin{cases} u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \\ u(x)^2 = x^2 + x^3 + \frac{7x^4}{12} + \frac{x^5}{4} + o_0(x^5) \\ u(x)^3 = x^3 + \frac{3}{2} x^4 + \frac{5x^5}{4} + o_0(x^5) \\ u(x)^4 = x^4 + 2x^5 + o_0(x^5) \\ u(x)^5 = x^5 + o_0(x^5) \end{cases} .$$

Donc, $f(x) = \cdots$.

Ex 11 Pour tout n un entier naturel non nul , on note a_n le nombre de façon qu'à le père noël de distribuer n cadeaux à n enfants [sans qu'aucun enfant ne reçoive le cadeau qu'il a demandé](**)(sachant que dans sa hotte , ce père noël a exactement les n cadeaux commandés par les n enfants !!) .

1) Calculer a_1, a_2, a_3.
2) Montrer que : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$.
3) Montrer que : pour tout entier naturel ≥ 1 , $a_{n+1} - (n+1)a_n = (-1)^{n+1}$.
4) Montrer que : pour tout entier naturel ≥ 1 , $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
5) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange , déterminer un équivalent simple de a_n.

1) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$.
2) On considère $n+2$ cadeaux distincts numérotés de 1 à $n+2$ et $n+2$ enfants distincts numérotés de 1 à $n+2$. Il y a deux façons disjointes pour le père noël de livrer à cas enfants, ces cadeaux avec la contrainte (**) :

1ère façon : cadeau 1 à l'enfant $k \neq 1$ et cadeau k à l'enfant 1.

Le père noël choisit l'enfant k qui reçoit le cadeau 1, parmi les enfants numérotés de 2 à $n+2$: il a $n+1$ choix. Et ensuite, le père noël donne le cadeau k à l'enfant 1.

Il reste alors à distribuer les n cadeaux $2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+2$ aux n enfants $2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+2$ avec la contrainte (**) : il a a_n choix. Ainsi, il y a $(n+1)a_n$ distributions possibles de cette première manière.

2ème façon : cadeau 1 à l'enfant $k \neq 1$ et cadeau k n'est pas distribué à l'enfant 1.

Le père noël choisit l'enfant k qui reçoit le cadeau 1, parmi les enfants numérotés de 2 à $n+2$: il a $n+1$ choix.

Il reste alors à distribuer les $n+1$ cadeaux $2,3,\ldots,k-1,k,k+1,\ldots,n+2$ aux $n+1$ enfants $1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+2$ avec la contrainte : l'enfant 1 ne reçoit pas le cadeau k, l'enfant 2 ne reçoit pas le cadeau 2, l'enfant 3 ne reçoit pas le cadeau 3,.. l'enfant $k-1$ ne reçoit pas le cadeau $k-1$, l'enfant $k+1$ ne reçoit pas le cadeau $k+1$,…, l'enfant n ne reçoit pas le cadeau n. : il a a_{n+1} choix. Ainsi, il y a $(n+1)a_{n+1}$ distributions possibles de cette deuxième manière.

J'en déduis que $a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n$ distributions possibles.

3) Soit n un entier naturel non nul .

$a_{n+2} - (n+2)a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n - (n+2)a_{n+1} = -[a_{n+1} - (n+1)a_n]$.

Donc la suite $(a_{n+1} - (n+1)a_n)$ est géométrique de raison -1.

Donc $\forall n \geq 1, a_{n+1} - (n+1)a_n = (-1)^{n-1}(a_2 - a_1) = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$.

4) $\forall n \geq 1, \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_{n+1} - (n+1)a_n}{(n+1)!} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n!}$.

Donc, $\frac{a_N}{N!} = \frac{a_N}{N!} - \frac{a_1}{1!} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{a_n}{n!} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \underbrace{=}_{\substack{car\ les\ deux\ premiers \\ termes\ se\ simplifient}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

5) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Donc $\frac{a_N}{N!} \sim_{N\to+\infty} \frac{1}{e}$ et ainsi, $a_N \sim_{N\to+\infty} \frac{N!}{e}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace dans le plan , n droites en respectant les 2 règles suivantes :

- Deux droites ne sont jamais parallèles. •• Trois droites ne sont jamais concourantes.

On note T_n le nombre de triangles construits à partir de ces n droites.

1) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
2) En déduire de T_n en fonction de n.

1) $T_{n+1} = T_n + \binom{n}{2}$.
2) Donc $T_N - T_0 = \sum_{n=0}^{N-1} T_{n+1} - T_n = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{n}{2} = \sum_{n=2}^{N-1} \binom{n}{2} = \sum_{n=2}^{N-1} \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = \binom{N}{3}$.

Soit p et q deux entiers naturels donnés. Un robot se déplace sur un quadrillage, démarre du point $O(0,0)$ pour rejoindre le point $A(p,q)$ en se déplaçant vers la droite ou vers le haut. Combien y a -t-il de chemins possibles ?

$$\binom{p+q}{p}$$

Une urne contient n boules rouges et n boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément n boules de l'urne.

1.Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et A_k déterminer le nombre de façon d'obtenir exactement k boules rouges.

2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

1. Numérotons les boules blanches de 1 à n et les rouges de $n+1$ à $2n$. pour construire un poignée de n boules dont exactement k rouges, il faut choisir les k rouges parmi les n existantes et choisir les n-k blanches parmi les n existante. Il y a donc $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ possibilités.

2. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = nombre\ de\ poignées\ à\ n\ boules = \binom{2n}{n}$.

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit $p \in [\![0,n]\!]$ et A une partie de E à p éléments. Quel est le nombre a_p de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?
2. Calculer $\sum_{p=0}^{n} a_p$.

1. $a_p = p \times 2^{n-p}$.

2. $\sum_{p=0}^{n} a_p = \sum_{p=0}^{n} p \times 2^{n-p} = \sum_{k=0}^{n}(n-k) \times 2^k = n\sum_{k=0}^{n} 2^k - 2\sum_{k=0}^{n} k \times 2^{k-1}$

$= n\sum_{k=0}^{n} 2^k - 2\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} \underbrace{=}_{\substack{avec \\ f(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k}} nf(2) - 2f'(2) = n\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 2\frac{(n+1)2^n(2-1)-(2^{n+1}-1)}{(2-1)^2}$

$= n(2^{n+1}-1) - (n+1)2^{n+1} + (2^{n+2}-2) = n + 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2 = n + 2^{n+1}(2-1) - 2$

$= n + 2^{n+1} - 2.$

Nous disposons d'un jeu de 52 cartes . Une « main » de 5 cartes est un paquet de 5 cartes prises parmi les 52 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains différentes ? $\binom{52}{5}$
2. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement un as ? $4\binom{48}{4}$
3. Combien y-a-t-il de mains comprenant au moins un valet ? $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$