Corrigé DS 7

Dans ce problème E désigne un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $I = id_E$ l'endomorphisme identité de E .
On considère f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 = \frac{1}{2}(f + I)$.

1. f peut-il être une homothétie ? (un homothétie de E est une application linéaire de la forme λid_E telle que $\lambda \in \mathbb{R}$).

2. Cas général.

2.a Prouver que l'endomorphisme f est un automorphisme et exprimer son inverse f^{-1} comme combinaison linéaire de I et f .

2.b Justifier que $Ker(f - I)$ et $Ker(f + \frac{1}{2}I)$ sont deux ss-e-v de E stables par f.

2.c Montrer que $Ker(f - I) \oplus Ker\left(f + \frac{1}{2}I\right) = E.$

2.d Calculer $(f - I) \circ \left(f + \frac{1}{2}I\right)$.

2.e En déduire que $Ker(f - I) = Im\left(f + \frac{1}{2}I\right)$ (on montre de la même manière que $Ker\left(f + \frac{1}{2}I\right) = Im(f - I)$).

On suppose désormais que f et I sont linéairement indépendants.

3. itérés de f .

3.a Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de f et I .

3.b Etablir que, pour tout entier naturel n , il existe un couple (a_n, b_n) de réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3.c Former une relation entre a_{n+2} , a_{n+1} et a_n .

3.d En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

3.e Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

4. On pose $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$ et $q = I - p$.

4.a Justifier que p est la projection vectorielle sur $Ker(f - I)$ et parallèlement à $Im(f - I)$.

4.b Montrer que $vect(f, I) = vect(p, q)$.

4.c Exprimer f^n commecombinaison linéaire de p et q.

5. On suppose dans cette question que E est de dimension finie.

Montrer qu'il existe une base B de E telle que $mat_B f$ est diagonale dont la diagonale est constituée de $-\frac{1}{2}$ et 1.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g = \lambda id_E$.

$g^2 = \frac{1}{2}(g + id_E) \Leftrightarrow \lambda^2 id_E = \frac{1}{2}(\lambda id_E + id_E) \Leftrightarrow (\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})id_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Donc f peut être l'homothétie vectorielle de rapport 1 ou celle de rapport $-\frac{1}{2}$.

2. $f^2 = \frac{1}{2}(f + I)$ donc $f^2 - \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}I$ donc $2f \circ f - f \circ id_E = id_E$. Alors, $f \circ (2f - id_E) \underbrace{=}_{\substack{car\ f\\ linéaire}} id_E = (2f - id_E) \circ f$. J'en déduis que f est un automorphisme de E et $f^{-1} = 2f - id_E$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\vec{x} \in Ker(f - \lambda id)$ alors $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ est colinéaire à l'élément $\vec{x}$ de $Ker(f - \lambda id)$ et comme $Ker(f - \lambda id)$ est stable apr combinaison linéaire, $f(\vec{x}) \in Ker(f - \lambda id)$. Donc, $Ker(f - \lambda id)$ est stable par f.

4. Soit $\vec{x} \in E$. Je cherche $\vec{y} \in Ker(f - id)$ et $\vec{z} \in Ker(f + \frac{1}{2}id)$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Analyse : Supposons que de tels vecteurs $\vec{y}$ et $\vec{z}$ existent.

Alors $\begin{cases} \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{y} \in Ker(f - id)\ i.e. f(\vec{y}) = \vec{y} \\ \vec{z} \in Ker\left(f + \frac{1}{2}id\right)\ i.e. f(\vec{z}) = -\frac{1}{2}\vec{z} \end{cases}$. Donc $f(\vec{x}) \overset{\substack{car\ f\\ linéaire}}{=} f(\vec{y}) + f(\vec{z}) = \vec{y} - \frac{1}{2}\vec{z}$.

Alors, $\begin{cases} \vec{y} - \frac{1}{2}\vec{z} = f(\vec{x}) \\ \vec{y} + \vec{z} = \vec{x} \end{cases}$. Donc, $(**) \begin{cases} \vec{z} = \frac{2}{3}(\vec{x} - f(\vec{x})) \\ \vec{y} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{x} + f(\vec{x})) \end{cases}$. Ainsi, si de tels vecteurs $\vec{y}$ et $\vec{z}$ existent, alors ils sont uniques et valent $(**)$.

Synthèse : On pose $\vec{y}$ et $\vec{z}$ tels que $(**)$.

Alors, $\vec{y} + \vec{z} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\vec{x} = \vec{x}$.

De plus, $f(\vec{y}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}f(\vec{x}) + \frac{1}{2}(f(\vec{x}) + \vec{x})\right) = \frac{2}{3}\left(f(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{x}\right) = \vec{y}$. Donc, $\vec{y} \in Ker(f - id)$.

Enfin, $f(\vec{z}) = \frac{2}{3}(f(\vec{x}) - f^2(\vec{x})) = \frac{2}{3}\left(f(\vec{x}) - \frac{1}{2}(f(\vec{x}) + \vec{x})\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}f(\vec{x}) - \frac{1}{2}\vec{x}\right) = -\frac{1}{2}\vec{z}$. Donc, $\vec{z} \in Ker\left(f + \frac{1}{2}id\right)$.

Ainsi, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent et d'après l'analyse, sont les seuls qui conviennent.

J'en déduis que $Ker(f - id)$ et $Ker(f + \frac{1}{2}id)$ sont supplémentaires dans E.

5. $(f - I) \circ \left(f + \frac{1}{2}I\right) = f^2 + \frac{1}{2}f - f - \frac{1}{2}I = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}I = 0$. De même, $\left(f + \frac{1}{2}I\right) \circ (f - I) = 0$

6. J'en déduis que : $Im\left(f+\frac{1}{2}I\right) \subset Ker(f-I)$ et $Im(f-I) \subset Ker\left(f+\frac{1}{2}I\right)$.

Soit $\vec{x} \in Ker(f-I)$. Alors, $f(\vec{x})=\vec{x}$. Alors $f(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}=\frac{3}{2}\vec{x}$ puis $\vec{x}=\frac{2}{3}\left(f(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}\right)=f\left(\frac{2}{3}\vec{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{x}\right)=\left(f+\frac{1}{2}I\right)\left(\frac{2}{3}\vec{x}\right) \in Im\left(f+\frac{1}{2}I\right)$.

Donc, $Ker(f-I) \subset Im\left(f+\frac{1}{2}I\right)$ et finalement, $Ker(f-I)=Im\left(f+\frac{1}{2}I\right)$. De même, $Im(f-I)=Ker\left(f+\frac{1}{2}I\right)$.

Rque : si E est de dimension finie alors d'après le théorème du rang, $dimKer\left(f+\frac{1}{2}I\right)+dimIm\left(f+\frac{1}{2}I\right)=\dim(E)$; et, comme $Ker(f-id)$ et $Ker(f+\frac{1}{2}id)$ sont supplémentaires dans E, $dimKer(f-id)+dimKer\left(f+\frac{1}{2}id\right)=dimE$ et nous retrouvons $dimIm\left(f+\frac{1}{2}I\right)=dimKer\left(f+\frac{1}{2}id\right)$.

Ainsi, $Im\left(f+\frac{1}{2}I\right)=Ker(f-I)$.

3. itérés de f .

3.a $f^3=f\circ f^2=f\circ\frac{1}{2}(f+I)=\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}f=\frac{1}{4}(f+I)+\frac{1}{2}f=\frac{1}{4}(3f+I)$

et $f^4=f\circ f^3=f\circ\frac{1}{4}(3f+I)=\frac{3}{4}f^2+\frac{1}{4}f=\frac{3}{16}(f+I)+\frac{1}{4}f=\frac{1}{16}(7f+3I)$

3.b Existence : posons $H(n)$: il existe un couple (a_n, b_n) de réels et un seul tel que : $f^n=a_nf+b_nI$.

Alors $f^0=id_E=0.f+1.I$. Donc $a_0=0$ et $b_0=1$ conviennent.

Soit n un entier naturel tel qu'il existe un couple (a_n, b_n) de réels et un seul tel que : $f^n=a_nf+b_nI$.

Alors $f^{n+1}=f(a_nf+b_nI)=a_nf^2+b_nf=a_n\left(\frac{1}{2}(f+I)\right)+b_nf=\left(b_n+\frac{1}{2}a_n\right)f+\frac{a_n}{2}I$. Posons $a_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}a_n$ et $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$.

Alors (a_{n+1}, b_{n+1}) est un couple de réels vérifiant : $f^{n+1}=a_{n+1}f+b_{n+1}I$.

J'en conclus par le théorème de récurrence simple que pour tout entier naturel n, il existe un couple (a_n, b_n) de réels tel que $f^n=a_nf+b_nI$.

Unicité : $af+bI=\alpha f+\beta I \Leftrightarrow (a-\alpha)f+(b-\beta)I=0 \overset{\substack{car\ f\ et\ I\ sont\\ linéarement\\ indépendants}}{\Leftrightarrow} b-\beta=0$ et $a-\alpha=0$.

J'en conclus que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $f^n=a_nf+b_nI$.

$a_0=0$ et $b_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}a_n$ et $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$.

3.c $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=b_{n+1}+\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}a_{n+1}$.

3.d Posons $(e.c)$: $r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=(r-1)\left(r+\frac{1}{2}\right)=0$. Donc $r_0=1$ et $r_1=\frac{-1}{2}$. Alors, il existe deux réels u et v tels que :

$\forall n, a_n=u+v\left(\frac{-1}{2}\right)^n$. Alors $0=a_0=u+v$ et $1=u-\frac{v}{2}$ donc $u=\frac{2}{3}$ et $v=-\frac{2}{3}$. Ainsi, $\forall n, a_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3.e Alors, $\forall n\in\mathbb{N}, b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$. Alors, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{1}{3}$.

On pose $p=\frac{2}{3}f+\frac{1}{3}I$ et $q=I-p$.

4.a p étant une combinaison linéaire d'endomorphisme de E, p est un endomorphisme de E. De plus, $p^2=\left(\frac{2}{3}f+\frac{1}{3}I\right)^2=\frac{1}{9}(4f^2+4f+1)=\frac{1}{9}(2f+2I+4f+I)=\frac{1}{3}(2f+I)=p$. J'en conclus que p est la projection vectorielle sur $Im(p)$ et parallèlement à $Ker(p)$.

$$Im(p)=\left\{\frac{2}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}/\vec{x}\in E\right\}=\left\{\left(f+\frac{1}{2}I\right)\left(\frac{\vec{x}}{3}\right)/\vec{x}\in E\right\}=\left\{\left(f+\frac{1}{2}I\right)(\vec{t})/\vec{t}\in E\right\}=Im\left(f+\frac{1}{2}I\right)=Ker(f-I).$$

$$Ker(p)=\left\{\vec{x}\in E/\frac{2}{3}f(\vec{x})+\frac{1}{3}\vec{x}=\vec{0}\right\}=\left\{\vec{x}\in E/f(\vec{x})+\frac{1}{2}\vec{x}=0\right\}=Ker\left(f+\frac{1}{2}I\right)=Im(f-I).$$

4.b $(S)\begin{cases} p=\frac{2}{3}f+\frac{1}{3}I \in vect(I,f) \\ q=I-p=-\frac{2}{3}f+\frac{2}{3}I\in vect(I,f).\end{cases}$. Donc, $vect(p,q)\subset vect(f,I)$ (car $vect(f,I)$ est stable par combinaison linéaire).

Réciproquement, en résolvant (S), j'obtiens : $\begin{cases} I=p+q\in vect(p,q) \\ f=\frac{1}{2}(2p-q)\in vect(p,q)\end{cases}$. Donc, $vect(f,I)\subset vect(p,q)$.

Ainsi, $vect(f,I)=vect(p,q)$.

4.c Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme p et q commutent (car $pq=O_{L(E)}=qp$), la formule du binôme de Newton assure que :

$f^n=\left[\frac{1}{2}(2p-q)\right]^n=\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(2p)^k(-q)^{n-k}\right)=\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}2^kp^k(-1)^{n-k}q^{n-k}\right)$

$f^n=\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}2^k(-1)^{n-k}p^kq^{n-k}\right) \underbrace{=}_{\substack{car\ pq=O\\ donc\ p^kq^{n-k}=O}} \frac{1}{2^n}(2^np^n+(-1)^nq^n) \underbrace{=}_{\substack{car\ p^2=p\\ donc\ \forall k\geq 1, p^k=p}} \frac{1}{2^n}(2^np+(-1)^nq)$.

5. Comme $Ker(f-I)\oplus Ker\left(f+\frac{1}{2}I\right)=E$ et $dimE$ est finie, considérons une base B de E concaténation d'une base $B_1=(\vec{u_i})_{i=1..p}$ de $Ker(f-I)$ et d' une base $B_2=(\vec{v_i})_{i=1..q}$ de $Ker\left(f+\frac{1}{2}I\right)$ où p et q sont deux entiers naturels tels que $p+q=\dim(E)$.

Alors $\forall\vec{u_i}\in B_1, f(\vec{u_i})=\vec{u_i}$ et $\forall\vec{v_i}\in B_2, f(\vec{v_i})=-\frac{1}{2}\vec{v_i}$. J'en déduis que la matrice de f dans B est $diag\left(\underbrace{1,1,\dots,1}_{p\ fois},\underbrace{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\dots,-\frac{1}{2}}_{q\ fois}\right)$.

Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $E=\mathbb{R}_{2n}[X]$ et Φ_a définie sur E par: $\Phi_a(P)=\left(\frac{1}{4}-X^2\right)P'+aXP$.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E. Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphimse de E .

2. Soit $k \in [\![-n,n]\!]$. Déterminer des entiers α *et* β de sorte que : $P_k = \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}$ vérifie $\Phi_a(P_k) = kP_k$.

3. Montrer que la famille $B = (P_{-n}, P_{-n+1}, \dots, P_{-1}, P_0,, P_1, .., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

4. Déterminer la matrice D de Φ_a dans B.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\exists P \in E / P \neq 0$ *et* $\Phi_a(P) = \lambda P$ si et ssi $\lambda \in [\![-n,n]\!]$.

6. Montrer que Φ_a n'est pas ni injective , ni surjective.

7. Justifier que D est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.

8. Construire à l'aide de Φ_a un endomorphisme de E dont la matrice dans une base bien choisie est diagonale avec uniquement les réels $0,1,4,9,..,4n^2$ sur la diagonale.

1. $\Phi_a(\alpha P + \beta Q) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(\alpha P + \beta Q)' + aX(\alpha P + \beta Q) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(\alpha P' + \beta Q') + aX(\alpha P + \beta Q)$
$= \alpha\left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + \alpha aXP + \beta\left(\frac{1}{4} - X^2\right)Q' + \beta aXQ = \alpha\Phi_a(P) + \beta\Phi_a(Q)$. Donc Φ_a est linéaire pour toute valeur de a.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ *tel que* $P = uX^{2n} + vX^{2n-1} + T(X)$ avec $u, v,$ *réels et* $T \in \mathbb{R}_{2n-2}[X]$.

Alors, $\Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + aXP = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\left(2nuX^{2n-1} + (2n-1)vX^{2n-2} + T'(X)\right) + aX(uX^{2n} + vX^{2n-1} + T(X))$

$$= -2nuX^{2n+1} - (2n-1)vX^{2n} - X^2T'(X) + \left(\frac{1}{2}nuX^{2n-1} + \frac{(2n-1)}{4}vX^{2n-2} + \frac{1}{4}T'(X)\right) + auX^{2n+1} + avX^{2n} + aXT(X)$$

$= (a-2n)uX^{2n+1} + Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. Donc $\forall P \in \mathbb{R}_{2n}[X], \Phi_a(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X] \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, (a-2n)u = 0 \Leftrightarrow a = 2n.$

Ici, $\Phi_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X]) \Leftrightarrow a = 2n.$

2. Soit $k \in [\![-n,n]\!]$. Soit α *et* β réels et $P_k = \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}$.

$$\Phi_a(P_k) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\left[\alpha\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta} + \beta\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\right] + 2nX\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}$$

$$= -\alpha X^2\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta} + \beta X^2\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1} + \frac{1}{4}\alpha\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta} + \frac{1}{4}\beta\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left(\frac{1}{4} - X^2\right)$$
$$+ 2nX\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}$$

$$= \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left[-\alpha X^2\left(X-\frac{1}{2}\right) - \beta X^2\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{4}\alpha\left(X-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\beta\left(X+\frac{1}{2}\right) + 2nX\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left[-\alpha X^2\left(X-\frac{1}{2}\right)\beta - X^2\left(X+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\alpha\left(X-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\beta\left(X+\frac{1}{2}\right) + 2nX\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left[-\alpha X^3 + \alpha\frac{1}{2}X^2 - \beta X^3 - \beta\frac{1}{2}X^2 + \frac{\beta}{4}X + \beta\frac{1}{8} + \frac{\alpha}{4}X - \alpha\frac{1}{8} + 2nX^3 - 2n\frac{1}{4}X\right]$$

$$= \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left[(2n-\alpha-\beta)X^3 + (\alpha-\beta)\frac{1}{2}X^2 + \left(\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha}{4} - \frac{n}{2}\right)X + (\beta-\alpha)\frac{1}{8}\right]$$

Alors, $\Phi_a(P_k) = kP_k$

$\Leftrightarrow \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left[(2n-\alpha-\beta)X^3 + (\alpha-\beta)\frac{1}{2}X^2 + \left(\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha}{4} - \frac{n}{2}\right)X + (\beta-\alpha)\frac{1}{8}\right] = k\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left[\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)\right].$

$\Leftrightarrow \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\left[(2n-\alpha-\beta)X^3 + (\alpha-\beta)\frac{1}{2}X^2 + \left(\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha}{4} - \frac{n}{2}\right)X + (\beta-\alpha)\frac{1}{8} - k\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)\right] = 0.$

$\Leftrightarrow (2n-\alpha-\beta)X^3 + (\alpha-\beta)\frac{1}{2}X^2 + \left(\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha}{4} - \frac{n}{2}\right)X + (\beta-\alpha)\frac{1}{8} - k\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right) = 0.$

$\Leftrightarrow (2n-\alpha-\beta)X^3 + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - k\right)X^2 + \left(\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha}{4} - \frac{n}{2}\right)X + (\beta-\alpha)\frac{1}{8} + \frac{k}{4} = 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n - \alpha - \beta = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - k = 0 \\ \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha}{4} - \frac{n}{2} = 0 \\ (\beta-\alpha)\frac{1}{8} + \frac{k}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2n \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2n \\ \alpha - \beta = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = n + k \\ \beta = n - k \end{cases}.$$

Ainsi, $(\alpha, \beta) = (n+k, n-k)$ est l'unique couple tel que $P_k = \left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}$ vérifie $\Phi_a(P_k) = kP_k$. De plus,

deg $\left(\left(X+\frac{1}{2}\right)^{n+k}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right) = n + k + n - k = 2n$. Donc $P_k \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

3. $\forall k \in [\![-n,n]\!], P_k \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $card(P_k)_{k=-n\dots n} = 2n + 1 = dim\mathbb{R}_{2n}[X]$. Il reste à prouver que la famille est libre.
Soit $\lambda_{-n}, \lambda_{-n+1}, \dots, \lambda_n$ des réels tels que : $\lambda_{-n}P_{-n} + \lambda_{-n+1}P_{-n+1} + \dots + \lambda_nP_n = 0.$
Alors, $\lambda_{-n}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n} + \lambda_{-n+1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{1} + \dots + \lambda_{n-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + \lambda_n\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0.$
En évaluant en $\frac{1}{2}$ puis en $-\frac{1}{2}$, j'obtiens : $\lambda_n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = 0$ donc $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_{-n}\left(-\frac{1}{4}\right)^{2n} = 0$ donc $\lambda_{-n} = 0.$
Alors, $\lambda_{-n+1}P_{-n+1} + \dots + \lambda_{n-1}P_{n-1} = 0$ *i.e.* $\lambda_{-n+1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{1} + \dots + \lambda_{n-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{1}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = 0.$

Donc $\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)[\lambda_{-n+1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2n-1}]=0$. Comme $\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)$ n'est pas le polynôme nul, nécessairement, $\lambda_{-n+1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=0$. En évaluant à nouveau en $\frac{1}{2}$ puis en $-\frac{1}{2}$, j'obtiens : $\lambda_{-n+1}=\lambda_{n-1}=0$. Alors, $\lambda_{-n+2}P_{-n+2}+\cdots+\lambda_{n-2}P_{n-2}=0$ c'est-à-dire :
$\lambda_{-n+2}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\lambda_{n-2}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2}[\lambda_{-n+2}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{2n-2}+\cdots+\lambda_{n-2}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{2n-2}]=0.$
On itère le procédé n fois . Après avoir ainsi, prouvé que $\lambda_{-n}=\lambda_n=\lambda_{-n+1}=\lambda_{n-1}=\cdots=\lambda_{-1}=\lambda_1=0$, j'obtiens : $\lambda_0P_0=0$. Comme $P_0=\left(X-\frac{1}{2}\right)^n\left(X+\frac{1}{2}\right)^n\neq 0$, nécessairement $\lambda_0=0$. Ainsi, la famille $(P_k)_{k=-n\dots n}$ est libre et finalement est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

4. $\forall k\in[\![-n;n]\!], \Phi_a(P_k)=kP_k$ $i.e.$ $\begin{cases}\Phi_a(P_{-n})=-nP_{-n}\\ \Phi_a(P_{-n+1})=(-n+1)P_{-n+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ \Phi_a(P_n)=nP_n\end{cases}$. Donc $D=mat_B\Phi_a=diag(-n;-n+1;\dots.,n-1;n)$.

5. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
$\exists P\in E/P\neq 0 \ \ et\ \Phi_a(P)=\lambda P$
si et ssi $\exists P\in E/P\neq 0 \ \ et\ P\in Ker(\ \Phi_a-\ \lambda id)$
si et ssi $\Phi_a-\ \lambda id$ n'est pas injective
si et ssi $\Phi_a-\ \lambda id$ n'est pas bijective
car E est de dimension finie .
si et ssi $D-\ \lambda I$ n'est pas inversible
si et ssi $\det(D-\ \lambda I)=0$
si et ssi $\prod_{k=-n}^{n}(k-\lambda)=0$
si et ssi $\lambda\in\{-n;-n+1;\dots.,n-1;n\}$.

6. En particulier $\exists P\in E/P\neq 0\ \ et\ \Phi_a(P)=0.P=0$. Donc $Ker(\Phi_a)$ contient un vecteur non nul. Donc, Φ_a n'est pas injective. Comme Φ_a est un endomorphisme dans un $K-e-v$ de dim finie, Φ_a n'est pas surjective.

7. $\Phi_a(X^0)=2nX\ et\ \ \forall k\in[\![1;2n]\!], \Phi_a(X^k)=\left(\frac{1}{4}-X^2\right)kX^{k-1}+2nX^{k+1}=(2n-k)X^{k+1}+\frac{k}{4}X^{k-1}$. Donc, la matrice M de Φ_a dans $B_c=(1,X,X^2,\dots,X^{2n})$ est $M=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&0&&&\\ 2n&0&\frac{2}{4}&&&\\ 0&2n\text{-}1&0&\frac{3}{4}&&\\ \vdots&0&2n\text{-}2&0&\ddots&\\ &&0&\ddots&\ddots&\frac{2n}{4}\\ 0&&&0&1&0\end{pmatrix}$. Donc comme M et D sont deux matrices d'un même endomorphisme , D et M sont semblables.

8. $mat_B\Phi_a^2=D^2=diag(n^2,(n-1)^2,\dots 9,4,,1,0,1,4,9,\dots,n^2)$. Donc Φ_a^2 est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est diagonale avec uniquement les réels $0,1,4,9,..,4n^2$ sur la diagonale.

Qcm

1) Soit E un $\mathbb{R}$-e-v de dimension 3 rapporté à la base $B=(a,b,c)$.
Soient $u=-a+b+2c,\ \ v=a+c$ et $w=2a-b-c$ et $F=vect(u,v,w)$.

a. La famille (u,v,w) est libre mais pas génératrice de F.
b. La famille (u,v,w) est génératrice de F.
c. La famille (u,v,w) est une base de F.
d. La famille (u,v) est libre .
e. La famille (w,v) est une base de F.
f. $F=\{(x,y,z)/x+3y-z=0\}$
g. $F=\{\alpha a+\beta b+\gamma c/\alpha,\beta,\gamma\ réels\ et\ \alpha+3\beta-\gamma=0\}$
h. $dimF=2$
i. $dimF=3$
j. $dimF=1$
k. $E=F$
l. $F\subset E$.

2) Soit E un K-e-v de dimension 3 de base $B=(a,b,c)$. Soit $F=\{\ xa+yb+zc/(x,y,z)\in K^3, \begin{cases}x+y-z=0\\ x+2y=0\end{cases}\}$.

a. $dimF=2$
b. $((-2,1,-1))$ est une base de F.
c. $G=\{\ xa+yb+zc/(x,y,z)\in K^3, x=y\}$ est un supplémentaire de F dans E.
d. $vect(b,c)$ est un supplémentaire de F dans E.
e. Il existe $u\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R}^2)$ tel que $F=\mathrm{Ker}\ (u)$.

3) Soit $A=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0&1\\-2&1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $M_2(\mathbb{R})$. $rg(A,B,C,D)=$

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5
f. 0

4) $rg\big((x\mapsto 2), 3cos, sin, 4cos^2, 7sin^2\big)=\dots.$

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4
f. 5

5) $n\in\mathbb{N}$. Parmi les familles suivantes, lesquelles sont libres :

a. $(1-2X, X^2-4X+1, 3, 3X-7X^5)$
b. $((1,2,3,4),(-1,0,2,1),(1,1,2,2),(0,1,-2,1))$
c. $(1,(x\mapsto e^x),(x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{3x}),\dots,(x\mapsto e^{nx}))$

d. $(3ch, 2sh, -7exp)$

e. $((X+1)^k(X-1)^{n-k})_{k=0..n}$

f. $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (p^n)_{n\in\mathbb{N}})$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

g. $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$

h. $(3(X-1)(X-2), -4X(X-2), 5X(X-1))$

i. $(1+2X+3X^2+4X^3, -1+2X^2+X^3, 1+X+2X^2+2X^3, X-2X^2+X^3)$

j. (I, N, N^2) où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

k. $\left(\underbrace{(1,1,1,1,\dots,1)}_{2n\ uplets}, (0,0,1,1,\dots,1), (0,0,0,0,1,\dots,1), \dots, \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{2n-2\ zéros}, 1,1\right)\right)$,

l. $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n+1)_{n\in\mathbb{N}}, (n+2)_{n\in\mathbb{N}})$.

6) Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $f\big((0,1)\big) = 10\ et\ f\big((1,0)\big) = 2$. Alors $f\big((7,9)\big) = \cdots$

a. 52
b. 104
c. 20
d. 12
e. 112
f. 88

7) Soit $f: \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}_6[X]$ une application linéaire telle que $dim(Ker(f)) = 4$. Le rang de f est :

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5
f. 6

8) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires :

a. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f((x_1, x_2)) = (2x_1, 3x_2 + 1)$

b. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f((x,y)) = \left(x + y\sqrt{2}, 4x - \frac{7}{3}y, 6y - \pi x\right)$

c. $f: M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}), f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c-b \\ b-2d & 2a+c \end{pmatrix}$

d. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = (x, x^2)$

e. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[X], f((a,b)) = (a-3b)X + (2a+b)$

f. $f: C^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, f(\varphi) = (\int_0^1 \varphi(t)dt, \varphi(0) + \varphi'(1))$

g. $f: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, f(P) = \tilde{P}(0) \int_0^1 \tilde{P}(t)dt$

h. $f: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to M_2(\mathbb{R}), f(u) = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T$

i. $f: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, f(P) = (\tilde{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

9) Soit $f: \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}^5$ une application linéaire telle que $dimKer(f) = 2$. f est :

a. ni injective , ni surjective.
b. bijective
c. injective, mais pas surjective
d. surjective, mais pas injective

10) Soit $f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire surjective. Le rang de f est ....

a. 5
b. 4
c. 3
d. 2
e. 1
f. 0
g. 6
h. 7
i. 8

11) Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire et u, v, w, t des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $(f(u), f(v), f(w), f(t))$ est -elle libre ?

a. Oui si f est injective.
b. Non.
c. Oui.
d. On ne sait pas.

12) Soit $u = (1,2), v = (1,-1)\ et\ w = (5,1)$. Pour quelle valeur du paramètre a , existe-t-il une application linéaire f telle que $f(u) = (-1,5), f(v) = (1,-4)\ et\ f(w) = (1, a+1)$. Réponse : $a =$.......

a. -1
b. 0
c. -2
d. -3
e. 2
f. 3

13) Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que : $f\big((x,y,z)\big) = (3x+4y, 7x+12z, 12y+z)$. Laquelle des matrices suivantes est la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 12 & 12 \\ 12 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 7x+12z \\ 12y+z \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

e. f est injective et non surjective
f. f est surjective et non injective.
g. f n'est ni injective , ni surjective.
h. f est un automorphisme.

14) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n, M_n(\mathbb{C}))$ où $\mathbb{C}^n, M_n(\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}-e-v$.

a. $Ker(f)$ est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{C})$
b. $(f(1,0,..,0), f(0,1,0,\dots,0), \dots,, f(0,0,\dots,0,1))$ est une base de $Im(f)$.
c. dim $(Ker(f)) \leq n$
d. la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^n$ sur $M_n(\mathbb{C})$ comporte n^2 lignes et n^2 colonnes
e. $Im(f)$ est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{C})$
f. $rg(f) \leq n$
g. toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ a un antécédent par f.
h. la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^n$ sur $M_n(\mathbb{C})$ comporte n lignes et n^2 colonnes.

15) Soit f l' application linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ linéaire telle que :

$$f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2,\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1-3X,\ \ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = 5X + 2X^3, f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2X^2.$$

On note $B_1\ et\ B_2$ les bases **canoniques** respectives de $M_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_3[X]$

a. f est injective et non surjective
b. f est surjective et non injective
c. f n'est ni injective , ni surjective.
d. f est un isomorphisme.

e. f est un automorphisme.

f. $\left(f\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\right)$ est libre

g. $mat_{B_1,B_2}f = \begin{pmatrix}2&-1&0&0\\0&-3&5&0\\0&0&0&2\\0&0&2&0\end{pmatrix}$

h. $mat_{B_1,B_2}f = \begin{pmatrix}-2&-1&0&0\\0&-3&5/3&0\\0&0&0&1\\0&0&2/3&0\end{pmatrix}$

i. $mat_{B_1,B_2}f = \begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

j. $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right) = -2a-b+\left(\frac{5c}{3}-3b\right)X+dX^2+\frac{2}{3}cX^3$

k. $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2&-1-3X\\5X+2X^2&2X^2\end{pmatrix}$

16) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit $B\ et\ B'$ deux bases de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. $Ker(f^k)\ est\ un\ ss-e-v\ de\ Ker(f^{k+1})$.

b. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]) \Leftrightarrow rg(f) = n$.

c. $(f((1,0,..,0), f(0,1,0,\dots,0),\dots,, f(0,0,\dots,0,1))$ est une famille génératrice de $Im(f)$

d. $Im(f^k)\ est\ un\ ss-e-v\ \ de\ Im(f^{k+1})$

e. $mat_{B'}f(P) = mat_{B'}B \times mat_B f \times mat_B B' \times mat_{B'}P$

f. $(\exists P \in \mathbb{R}_n[X]/P \neq 0\ et\ f(P) = \lambda P) \Leftrightarrow \det\left(f-\lambda Id_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = 0$.

17) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&4&-3\\2&0&-2\end{pmatrix}$.

a. $(1,1,1) \in Ker(f)$.

b. $f((-2,1,1)) = (-4,6,-4)$

c. $rg(f) = 1$

d. $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$

e. $Im(f) = vect((1,-2,1),(-1,4,-3),(2,0-2))$

f. $(\exists u \in \mathbb{R}^3/u \neq 0\ et\ f(u) = \lambda u) \Leftrightarrow (\lambda \in \{0,-2,5\})$

g. $Im(f-5id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$

h. $f^3-3f^2+10f = 0$

Q1	a	**b**	c	**d**	**e**	f	**g**	**h**	i	j	k	**l**
Q2	a	b	**c**	**d**	**e**	f	g	h	i	j	k	l
Q3	a	b	**c**	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q4	a	b	c	d	**e**	f	g	h	i	j	k	l
Q5	**a**	b	**c**	d	**e**	**f**	g	**h**	i	**j**	**k**	l
Q6	a	**b**	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q7	a	b	c	d	**e**	f	g	h	i	j	k	l
Q8	a	**b**	**c**	d	**e**	**f**	g	h	**i**	j	k	l
Q9	**a**	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q10	a	b	**c**	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q11	a	**b**	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q12	a	b	c	**d**	e	f	g	h	i	j	k	l
Q13	a	b	c	**d**	e	f	g	**h**	i	j	k	l
Q14	a	b	**c**	d	**e**	**f**	g	h	i	j	k	l
Q15	a	b	c	**d**	e	**f**	g	**h**	i	**j**	k	l
Q16	**a**	b	c	d	**e**	**f**	g	h	i	j	k	l
Q17	**a**	b	c	**d**	e	**f**	g	h	i	j	k	l