DS 7

4h -Calculatrice interdite- Un QCM (2 pages recto-verso) + deux exercices (1 page) + une annexe (1 page).

Exercice 1 QCM . Voici les consignes :

- **Répondre sur l'annexe-réponse agrafée en fin de sujet (Cf consignes en haut de l'annexe) .**
- **Le QCM doit être rendu au bout de 1H30 maximum et il est interdit de sortir de la salle avant de l'avoir rendu. Vous glisserez vos brouillons de recherche du QCM dans la copie finale.**

1) Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0&1\\-2&1\end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $M_2(\mathbb{R})$. $rg(A,B,C,D)=$

a. 5
b. 4
c. 3.
d. 2
e. 1
f. 0

2) $rg\big((x\mapsto 2), cos, 2sin, 7cos^2, 3sin^2\big)=$

a. 5
b. 4
c. 3.
d. 2
e. 1
f. 0

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. Parmi les familles suivantes, lesquelles sont libres :

a. $(1-2X, X^2-4X+1, 3, 3X-7X^5)$
b. $\big(1,(x\mapsto e^x),(x\mapsto e^{2x}),(x\mapsto e^{3x}),\dots,(x\mapsto e^{nx})\big)$
c. $(3ch, 2sh, -7exp)$
d. $((1,2,3,4),(-1,0,2,1),(1,1,2,2),(0,1,-2,1))$
e. (I,N,N^2) où $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$
f. $((1)_{n\in\mathbb{N}},(n+1)_{n\in\mathbb{N}},(n+2)_{n\in\mathbb{N}})$
g. $((X+1)^k(X-1)^{n-k})_{k=0..n}$
h. $\left(\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\right)$
i. $((1)_{n\in\mathbb{N}},(2^n)_{n\in\mathbb{N}},(3^n)_{n\in\mathbb{N}},\dots,(p^n)_{n\in\mathbb{N}})$ où $p\in\mathbb{N}^*$.
j. $(1+2X+3X^2+4X^3, -1+2X^2+X^3, 1+X+2X^2+2X^3, X-2X^2+X^3)$
k. $(3(X-1)(X-2), -4X(X-2), 5X(X-1))$
l. $\Big(\underbrace{(0,1,1,1,\dots,1)}_{2n+1\ uplets},(0,0,0,1,\dots,1),(0,0,0,0,0,1,\dots,1),\dots,\big(\underbrace{0,0,\dots,0,0}_{2n-1\ zéros},1,1\big)\Big)$

4) Soit E un $\mathbb{R}$-e-v de dimension 3 rapporté à la base $B=(a,b,c)$.
Soient $u=-a+b+2c$, $v=a+c$ et $w=2a-b-c$ et $F=vect(u,v,w)$.

a. La famille (u,v,w) est génératrice de F.
b. La famille (u,v,w) est libre mais pas génératrice de F.
c. La famille (u,v,w) est une base de F.
d. La famille (w,v) est une base de F.
e. La famille (u,v) est libre .
f. $F=\{(x,y,z)/x+3y-z=0\}$
g. $dimF=3$
h. $dimF=1$
i. $dimF=2$
j. $E=F$
k. $F\subset E$.
l. $F=\{\alpha a+\beta b+\gamma c/\alpha,\beta,\gamma \text{ réels et } \alpha+3\beta-\gamma=0\}$

5) Soit E un K-e-v de dimension 3 de base $B=(a,b,c)$. Soit $F=\left\{xa+yb+zc/(x,y,z)\in K^3, \begin{cases}x+y-z=0\\ x+2y=0\end{cases}\right\}$.

a. $dimF=2$
b. $((-2,1,-1))$ est une base de F.
c. $vect(b,c)$ est un supplémentaire de F dans E.
d. $G=\{xa+yb+zc/(x,y,z)\in K^3, x=y\}$ est un supplémentaire de F dans E.
e. Il existe $u\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R}^2)$ tel que $F=\mathrm{Ker}\,(u)$.

6) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application linéaire telle que $f\big((0,1)\big)=10\ et\ f\big((1,0)\big)=2$. Alors $f\big((7,9)\big)=\cdots$

a. 20
b. 112
c. 52
d. 88
e. 104
f. 12

7) Soit $f:\mathbb{R}^7\to\mathbb{R}_6[X]$ une application linéaire telle que $dim(Ker(f))=4$. Le rang de f est :

a. 6
b. 5
c. 4.
d. 3
e. 2
f. 1

8) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires :

a. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f((x_1,x_2))=(2x_1,3x_2+1)$
b. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, f((x,y))=\left(x+y\sqrt{2}, 4x-\frac{7}{3}y, 6y-\pi x\right)$
c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, f(x)=(x,x^2)$
d. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_1[X], f((a,b))=(a-3b)X+(2a+b)$
e. $f:M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C}), f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}d&c-b\\b-2d&2a+c\end{pmatrix}$
f. $f:C^1([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2, f(\varphi)=(\int_0^1\varphi(t)dt, \varphi(0)+\varphi'(1))$
g. $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}, f(P)=\tilde{P}(0)\int_0^1\tilde{P}(t)dt$
h. $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, f(P)=(\tilde{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$
i. $f:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to M_2(\mathbb{R}), f(u)=\begin{pmatrix}u_0&u_1\\u_2&u_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0&u_1\\u_2&u_3\end{pmatrix}^T$.

9) Soit $f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire surjective. Le rang de f est ....

a. 8
b. 7
c. 6
d. 5
e. 4
f. 3
g. 2
h. 1
i. 0

10) Soit $f: \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}^5$ une application linéaire telle que $dimKer(f) = 2$. f est :

a. ni injective , ni surjective.
b. bijective
c. injective, mais pas surjective
d. surjective, mais pas injective

11) Soit $u = (1,2), v = (1,-1)$ et $w = (5,1)$. Pour quelle valeur du paramètre a , existe-t-il une application linéaire f telle que $f(u) = (-1,5), f(v) = (1,-4)$ et $f(w) = (1, a+1)$. Réponse : $a =$.......

a. 0
b. 1
c. -3
d. -1
e. 2
f. -2

12) Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire et u, v, w, t des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille $(f(u), f(v), f(w), f(t))$ est -elle libre ?

a. Oui si f est injective.
b. Non.
c. Oui.
d. On ne sait pas.

13) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n, M_n(\mathbb{C}))$ où $\mathbb{C}^n, M_n(\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C} - e - v$.

a. $Ker(f)$ est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{C})$
b. $Im(f)$ est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{C})$
c. $\dim(Ker(f)) \leq n$
d. $rg(f) \leq n$
e. $(f((1,0,..,0)), f(0,1,0,\dots,0), \dots,, f(0,0,\dots,0,1))$ est une base de $Im(f)$
f. toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ a un antécédent par f.
g. f n'est pas un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$ sur $M_n(\mathbb{C})$
h. la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^n$ sur $M_n(\mathbb{C})$ comporte n lignes et n^2 colonnes.
i. la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{C}^n$ sur $M_n(\mathbb{C})$ comporte n^2 colonnes et n^2 lignes.

14) Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que : $f\big((x, y, z)\big) = (3x + 4y, 7x + 12z, 12y + z)$. Laquelle des matrices suivantes est la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

a. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 7x+12z \\ 12y+z \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 12 & 12 \\ 12 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

e. f n'est ni injective , ni surjective.
f. f est un automorphisme.
g. f est injective et non surjective
h. f est surjective et non injective.

15) Soit f l' application linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ linéaire telle que :

$$f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2,\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 - 3X,\ \ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = 5X + 2X^3, f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2X^2\ .$$

On note B_1 et B_2 les bases **canoniques** respectives de $M_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_3[X]$

a. f n'est ni injective , ni surjective.
b. f est un isomorphisme.
c. f est un automorphisme.
d. f est injective et non surjective
e. f est surjective et non injective
f. $mat_{B_1,B_2}f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
g. $mat_{B_1,B_2}f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
h. $mat_{B_1,B_2}f = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$
i. $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1-3X \\ 5X+2X^2 & 2X^2 \end{pmatrix}$
j. $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = -2a - b + \left(\frac{5c}{3} - 3b\right)X + dX^2 + \frac{2}{3}cX^3$
k. $\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$ est une famille libre

16) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a. $(1,1,1) \in Ker(f)$.
b. $f((-2,1,1)) = (-4,6,-4)$
c. $rg(f) = 1$
d. $Ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$
e. $Im(f) = vect((1,-2,1), (-1,4,-3), (2,0-2))$
f. $(\exists u \in \mathbb{R}^3 / u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u) \Leftrightarrow (\lambda \in \{0,-2,5\})$
g. $Im(f - 5id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$
h. $f^3 - 3f^2 + 10f = 0$

17) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et $k \in \mathbb{N}$. $Soit$ B et B'deux bases de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. $Ker(f^k)$ est un $ss - e - v$ de $Ker(f^{k+1})$.
b. $Im(f^k)$ est un $ss - e - v$ de $Im(f^{k+1})$.
c. $(f((1,0,..,0)), f(0,1,0,\dots,0), \dots,, f(0,0,\dots,0,1))$ est une famille génératrice de $Im(f)$.
d. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X]) \Leftrightarrow rg(f) = n$.
e. $mat_{B'}f(P) = mat_{B'}B \times mat_B f \times mat_B B' \times mat_{B'}P$.
f. $(\exists P \in \mathbb{R}_n[X] / P \neq 0$ et $f(P) = \lambda P) \Leftrightarrow \det\big(f - \lambda Id_{\mathbb{R}_n[X]}\big) = 0$

Fin du QCM

Exercice 2 Dans ce problème E désigne un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $I = id_E$ l'endomorphisme identité de E et $O = O_{\mathscr{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E. On considère f un endomorphisme de E vérifiant : $f^2 = \frac{1}{2}(f + I)$.

1. f peut-il être une homothétie ? (un homothétie de E est une application linéaire de la forme λid_E telle que $\lambda \in \mathbb{R}$).

2. Cas général.

2.a Prouver que l'endomorphisme f est un automorphisme et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de I et f .

2.b Justifier que $Ker(f - I)$ et $Ker(f + \frac{1}{2}I)$ sont deux ss-e-v de E stables par f.

2.c Montrer que $Ker(f - I) \oplus Ker\left(f + \frac{1}{2}I\right) = E$.

2.d Calculer $(f - I) \circ \left(f + \frac{1}{2}I\right)$.

2.e En déduire que $Ker(f - I) = Im\left(f + \frac{1}{2}I\right)$ (on montre de la même manière que $Ker\left(f + \frac{1}{2}I\right) = Im(f - I)$).

On suppose désormais que f et I sont linéairement indépendants.

3. itérés de f .

3.a Exprimer f^3et f^4 comme combinaison linéaire de f et I .

3.b Etablir que, pour tout entier naturel n , il existe un couple (a_n, b_n) de réels et un seul tel que : $f^n = a_n f + b_n I$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3.c Former une relation entre a_{n+2} , a_{n+1} et a_n .

3.d En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

3.e Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

4. On pose $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I$ et $q = I - p$.

4.a Justifier que p est la projection vectorielle sur $Ker(f - I)$ et parallèlement à $Im(f - I)$.

4.b Montrer que $vect(f, I) = vect(p, q)$.

4.c Exprimer f^ncomme combinaison linéaire de p et q.

5. On suppose, dans cette question, que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe une base B de E telle que $mat_B f$ est diagonale dont la diagonale est constituée de $-\frac{1}{2}$ et de 1.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et Φ_a définie sur E par: $\Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + aXP$.

1. Montrer que : $\Phi_a$est un endomorphisme de $E \Leftrightarrow a = 2n$. Désormais $a = 2n$.
2. Soit $k \in [\![-n, n]\!]$. Déterminer des entiers α et β de sorte que : $P_k = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$vérifie $\Phi_a(P_k) = kP_k$.
3. Montrer que la famille $B = (P_{-n}, P_{-n+1}, \dots, P_{-1}, P_0,, P_1, .., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
4. Déterminer la matrice D de $\Phi_a$dans B.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $Ker(\Phi_a - \lambda id) \neq \{0\}$ si et ssi $\lambda \in [\![-n, n]\!]$. (indication : on pourra utiliser $mat_B(\Phi_a - \lambda id_E)$)
6. En déduire que Φ_a n'est pas ni injective , ni surjective.
7. Justifier que D est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux.
8. Construire à l'aide de $\Phi_a$un endomorphisme de E dont la matrice dans une base bien choisie est diagonale avec uniquement les réels $0,1,4,9, .., n^2$ sur la diagonale.

NOM : .... Prénom : ....

Annexe-réponse QCM :

Consignes pour les réponses :

- **Cocher toutes et uniquement les bonnes réponses.**
- **Attention : la grille ci-dessous propose souvent davantage de réponses que le QCM. Ignorez ces réponses superflues, considérées comme incorrectes (il ne faut donc pas les cocher).**
- **Attention : vos voisins n'ont pas le même sujet que vous.... Inutile de vous tordre le cou pour copier leurs réponses !**

Questions	Réponses											
Q1	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q2	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q3	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q4	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q5	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q6	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q7	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q8	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q9	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q10	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q11	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q12	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q13	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q14	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q15	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q16	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Q17	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l