

DS 8

Un QCM : Répondez sur l'annexe réponse et joignez vos brouillons à l'annexe.

I Séries numériques

Q1 Parmi les séries suivantes, lesquelles sont convergentes ?

- A. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$
- B. $\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{\sqrt{3n-1}}$
- C. $\sum_{n \geq 2} \ln(1 + (-1)^n)$
- D. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{e^{3n} + \sin(n)}$
- E. $\sum_{n \geq 5} \ln\left(\frac{n-1}{n-4}\right)$
- F. $\sum_{n \geq 3} n\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{2}{n}\right)\right)$.

Q2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} =$

- A. $\frac{\pi^2}{3}$
- B. 0
- C. $2e - 1$
- D. $e^2 - 1$
- E. $2e$

Q3 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n-1)(n+1)} =$

- A. 0
- B. $1 - \frac{e}{2}$
- C. $\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}$
- D. $\frac{9-e^2}{6}$

Q4 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{2^k} =$

- A. $-\frac{2}{9}$
- B. $\frac{2}{9}$
- C. $\frac{4}{9}$
- D. $-\frac{4}{9}$

Q5 Soit (u_n) une suite de nombres réels tels que $\forall n, u_n \in]0,1[$.

- A. $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ sont de même nature.
- B. $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ converge si et seulement si $(\sum_{n=0}^N \ln(1 + u_n))_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- C. $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n(1 - u_n)$ converge.
- D. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ convergent alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + u_n)$.

III Dénombrement et probabilité

Soit P_n un polygone régulier à n cotés où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$. On note S_1, S_2, \dots, S_n les sommets consécutifs de P_n .

Q12 Une diagonale de P_n est une droite reliant deux sommets non consécutifs de P_n .

On note Δ_n l'ensemble des diagonales de P_n .

- A. il existe $(n - 2)$ diagonales issues d'un même sommet.
- B. il existe $(n - 3)$ diagonales issues d'un même sommet.
- C. $\text{card}(\Delta_n) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$
- D. $\text{card}(\Delta_n) = \frac{(n-3)n}{2}$

Q13 On note T_n l'ensemble des triangles dont les trois sommets sont des sommets de P_n .

- A. $\text{card}(T_n) = \frac{n(n-1)}{3!}$
- B. $\text{card}(T_n) = \binom{n}{3}$
- C. $\text{card}(T_n) = (n - 1)(n - 2)(n - 3)$
- D. $\text{card}(T_n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
- E. $\text{card}(T_n) = 3^n$
- F. $\text{card}(T_n) = n^3$

Un particule se trouve au sommet S_1 à l'instant 0 puis passe de sommet en sommet de manière totalement aléatoire. A chaque seconde, la particule change de sommet.

Q14 Combien de chemins différents peut-elle parcourir en p secondes ?

- A. $(n - 1)^p$
- B. $\binom{n-1}{p}$
- C. p^{n-1}
- D. $\binom{p}{n-1}$

Q15 Quelle est la probabilité qu'au bout d'une semaine, la particule se retrouve à son point de départ S_1 ?

- A. $\frac{1}{3600 \times 24 \times 7}$
- B. $\frac{1}{n}$
- C. $\frac{n}{3600 \times 24 \times 7}$
- D. $\frac{3600 \times 24 \times 7}{n}$

FIN

Cette dernière partie est à rédiger en devoir maison pour vendredi prochain (20 juin).

Dans cette question $n = 3$. La particule se déplace avec les probabilités suivantes :

- a) Si, à l'instant k , elle se trouve en S_1 , à l'instant $k + 1$, elle a une probabilité de 0,75 de se trouver en S_2 et une probabilité de 0,25 de se trouver en S_3 .
- b) Si, à l'instant k , elle se trouve en S_2 , à l'instant $k + 1$, elle se trouve en S_1
- c) Si, à l'instant k , elle se trouve en S_3 , à l'instant $k + 1$, elle se trouve en S_2 .

On note a_k, b_k, c_k les probabilités qu'à l'instant k la particule se trouve respectivement en S_1, S_2 ou S_3 .

1. Calculer a_0, a_1 et a_2 .
2. Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k, b_k, c_k . Faire de même avec b_{k+1} et c_{k+1} .
3. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, 4a_{k+2} - 3a_k - a_{k-1} = 0$
4. Montrer que $(a_{k+1} - a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
5. En déduire a_k en fonction de k puis la limite des suites a, b et c .

NOM : Prénom :

Annexe-réponse QCM :

Consignes pour les réponses :

- **Cocher toutes et uniquement les bonnes réponses.**
1 point par bonne réponse
- $\frac{1}{2}$ point par mauvaise réponse.
- **Attention** : la grille ci-dessous propose souvent davantage de réponses que le QCM. Ignorez ces réponses superflues, considérées comme incorrectes (il ne faut donc pas les cocher).
- **Attention** : vos voisins n'ont pas le même sujet que vous.... Inutile de vous tordre le cou pour copier leurs réponses !

Q1	A	B	C	D	E	F	G
Q2	A	B	C	D	E	F	G
Q3	A	B	C	D	E	F	G
Q4	A	B	C	D	E	F	G
Q5	A	B	C	D	E	F	G
Q6	A	B	C	D	E	F	G
Q7	A	B	C	D	E	F	G
Q8	A	B	C	D	E	F	G
Q9	A	B	C	D	E	F	G
Q10	A	B	C	D	E	F	G
Q11	A	B	C	D	E	F	G
Q12	A	B	C	D	E	F	G
Q13	A	B	C	D	E	F	G
Q14	A	B	C	D	E	F	G
Q15	A	B	C	D	E	F	G