

Langage, notations et raisonnements mathématiques

I Langage et écriture mathématiques

0. Voici une liste non-exhaustive d'abréviations à ne pas confondre avec les symboles mathématiques :

i.e. est l'abréviation pour l'expression latine « id est » et signifie « c'est-à-dire ».

tq est l'abréviation pour « tel que ».

NB est l'abréviation pour « nota bene » qui signifie « à noter » (remarque importante)

sietssi est mon abréviation pour « si et seulement si ».

mq est mon abréviation pour « montrons que ».

sq est mon abréviation pour « supposons que ».

ex est mon abréviation pour « exemple ».

Ç-ex est mon abréviation pour « contre exemple ».

Rque est mon abréviation pour « remarque ».

cste est mon abréviation pour « constante ».

fct° est mon abréviation pour « fonction ».

cst(e) est mon abréviation pour « constant(e) ».

resp. est mon abréviation pour « respectivement ».

prop. est mon abréviation pour « propriété ».

théo. est mon abréviation pour « théorème ».

def. est mon abréviation pour « définition ».

Init° est mon abréviation pour « initialisation ».

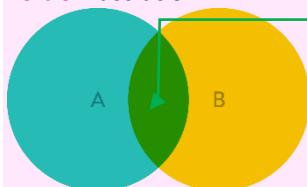
Propag° est mon abréviation pour « propagation ».

e.v est mon abréviation pour « espace vectoriel ».

1. Ensembles

- Un **ensemble** E est une collection d'objets. Un ensemble est **fini** lorsqu'il contient un nombre fini d'objets. Sinon on dit qu'il est infini. $\emptyset$ est l'ensemble vide ne contenant aucun objet.
- $\in$ symbolise l'appartenance à un ensemble et s'emploie entre un objet et un ensemble. « $x \in D$ » se lit : « l'objet x appartient à l'ensemble D » ou « l'objet x est élément de D ». « $x \notin D$ » signifie que x n'est pas dans D .
- $\cup$ symbolise l'union et s'emploie entre deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles alors $A \cup B$ est l'ensemble contenant les éléments de A et les éléments de B . Appartenir à $A \cup B$, c'est être *dans A ou dans B* . Ainsi, $x \in A \cup B$ sietssi $x \in A$ ou $x \in B$.
- $\cap$ symbolise l'intersection et s'emploie entre deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles alors $A \cap B$ est l'ensemble contenant tous les éléments communs à A et B . Appartenir à $A \cap B$, c'est être *dans A et dans B* . Ainsi, $x \in A \cap B$ sietssi $x \in A$ et $x \in B$.
- Les ensembles A et B sont **disjoints** lorsque A et B n'ont aucun objet en commun i.e. $A \cap B = \emptyset$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des ensembles alors $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est l'ensemble contenant tous les éléments de $A_1, A_2, \dots$ et A_n . et $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est l'ensemble contenant tous les éléments COMMUNS à tous les $A_1, A_2, \dots$ et A_n .
- Si pour tout entier naturel i , A_i est un ensemble alors $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$ ou $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est l'ensemble contenant tous les éléments de tous les A_i et $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ est l'ensemble contenant tous les éléments communs à tous les A_i .
- $\subset$ symbolise l'inclusion et s'écrit entre deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles alors $A \subset B$ signifie que tous les éléments de A sont dans B .
- A est une **partie** de B ou encore que A est un **sous-ensemble** de B lorsque $A \subset B$.
- $\setminus$ symbolise la privation et s'écrit entre deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles alors $A \setminus B$, *A privé de B* , est l'ensemble de tous les éléments de A qui ne sont pas dans B .

10 bis Illustration :



$A \cap B$

$A \setminus B$

- $\times$ s'écrit entre deux ensembles pour créer un ensemble dit produit constitué de couples. $A \times B$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. $A \times A$ est noté A^2 . Par extension, $A \times B \times C$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x \in A$, $y \in B$ et $z \in C$. Et $A \times A \times A$ est noté A^3 ...
- La double accolade $\{\dots\}$ désigne un ensemble.

Exemple : $\{-\sqrt{2}; 0; \frac{10}{3}\}$ est l'ensemble contenant les trois réels $-\sqrt{2}; 0; \frac{10}{3}$.

Si $A =]-\sqrt{2}, \pi]$ et $B = \mathbb{Z}$ alors $A \cap B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

13. / se lit et signifie « tel que », il est très souvent remplacé par une simple virgule.

14. Notation ensembliste : $E = \{ \underbrace{x \in F}_{\substack{\text{les objets} \\ \text{de } E \text{ sont} \\ \text{des objets de } F}} / \underbrace{P(x) \text{ est vraie}}_{\substack{\text{ce sont ceux} \\ \text{qui vérifient} \\ \text{la propriété } P}} \} = \{x \in F, P(x)\}$ signifie que E est l'ensemble des éléments de

F qui vérifient la propriété P . Cela entraîne que $E \subset F$.

14 bis Exemples : 1) $\underbrace{]1; \frac{5}{3}]}_{\text{intervalle}} = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq \frac{5}{3}\}$ et $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

2) $E = \{\underbrace{x^2}_{\in E} / x \in [-1, 3]\} = \{t \in \mathbb{R} / \exists x \in [-1, 3], t = x^2\}$ contient les carrés des réels compris entre -1 et 3 .

3) Soit A et B deux sous-ensembles de E .

$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ et $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$ et $A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

15. Lettres grecques fréquemment utilisées en maths :

A α Alpha	B β Beta	Γ γ Gamma	Δ δ Delta	E ε Epsilon	Z ζ Zeta
H η Eta	Θ θ Theta	I ι Iota	K κ Kappa	Λ λ Lambda	M μ Mu
N ν Nu	Ξ ξ Xi	O ο Omicron	Π π Pi	Ρ ρ Rho	Σ σ, ς Sigma
T τ Tau	Υ υ Upsilon	Φ φ Phi	X χ Chi	Ψ ψ Psi	Ω ω Omega

2. Fonction (ou application) -Suite-Equation

16. Une **application** d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation qui à chaque objet de E associe exactement un objet de F . On note F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F .

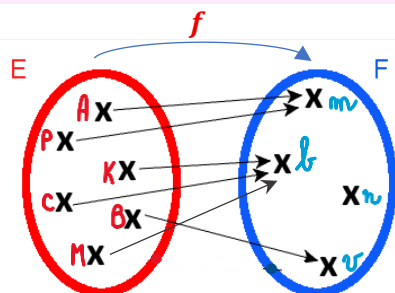
17. L'identité sur E est l'application $id_E: \begin{pmatrix} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{pmatrix}$.

18. Une **fonction** f d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation qui à chaque objet de E associe au plus un objet de F . On note $f: E \rightarrow F$. En pratique (programme de PCSI), on confondra application et fonction.

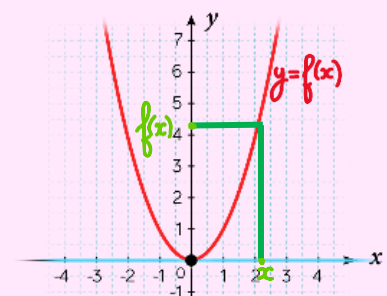
Le **domaine de définition** de f noté Df est l'ensemble des éléments de E à qui f associe un objet de F . Si x est dans le domaine de définition de f et on note $f(x)$ l'objet de F associé à x par f . Lorsque $y = f(x)$, y est appelé l'image de x par f et x est un antécédent de y par f . On note $f: (x \mapsto f(x))$ ou $f: \begin{pmatrix} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$.

18 bis Illustrations :

Soit f la fonction qui associe à chaque professeur de la classe sa couleur d'yeux. E est l'ensemble des professeurs de la classe, F est l'ensemble des couleurs d'yeux : marron, noisette, vert et bleu. F et E étant finis, on représente f sous la forme suivante :



1) **Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.** Soit f la fonction qui, à chaque réel, associe le carré de ce réel. Alors f est notée $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{pmatrix}$. Une telle fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est représentée de la manière suivante :



19. Une suite réelle (resp. complexe), notée souvent u , est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'un ensemble de $\mathbb{N}$ contenant tous les entiers supérieurs à un entier naturel n_0 fixé) dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$). Le réel (resp. complexe) $u(n)$ est noté u_n et la suite u

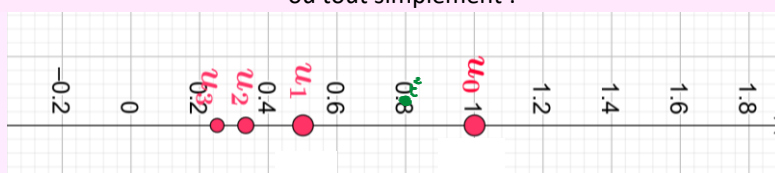
est aussi notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq n_0}$. On peut alors représenter une telle suite comme une fonction (avec deux axes) ou bien simplement placer les valeurs des u_n sur l'axe réel.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) l'ensemble des suites réelles (resp. complexes).

19 bis Illustrations : La suite $\left(\frac{1}{n-1}\right)_{n \geq 2}$ peut être représentée de ces deux manières :



ou tout simplement :



- 20.** Une équation est une égalité qui comporte une inconnue. Une équation peut le plus souvent s'écrire sous la forme : $f(X) = B$ où f est une fonction connue de E dans F , B est un élément de F connu et X est l'inconnue, appartenant à E ou à un sous ensemble E' de E . Résoudre une telle équation dans E' , c'est déterminer tous les $X \in E'$ qui vérifient $f(X) = B$ i.e. trouver tous les antécédents dans E' , de B par f .

20 bis Exemple : Trouver toutes les suites réelles u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 4$, c'est résoudre l'équation $f(u) = b$ d'inconnue $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où f est l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui associe à chaque suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et b est la suite constante égale à 4.

- 21.** Lorsque l'on peut comparer les éléments de F , une inéquation est une inégalité qui comporte une inconnue. Une inéquation peut le plus souvent s'écrire sous la forme $f(X) \geq B$ (ou $f(X) < B$) où f est une fonction connue de E dans F , B est un élément de F connu et X est l'inconnue, appartenant à E ou à un sous ensemble E' de E . Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les $X \in E'$ qui vérifient $f(X) \geq B$.

21 bis Exemple : Résoudre l'inéquation $3x^2 - \sqrt{x} < 1 - 2x$ d'inconnue x réelle, c'est résoudre l'inéquation $f(x) < 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ où f est l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui associe, à chaque réel positif x , le réel $3x^2 - \sqrt{x} + 2x - 1$

3. Phrases mathématiques

- 22.** Une proposition, une assertion, une conjecture mathématique sont des phrases mathématiques qui peuvent être vraies ou fausses.

- 23.** Si P est une assertion mathématique alors la négation de P notée $\text{non}P$ est son assertion contraire : « P fausse » signifie « $\text{non}P$ vraie ». En pratique, on écrit simplement « P » au lieu de « P vraie » et « $\text{non}P$ ». au lieu de « $\text{non}P$ vraie ».

23bis Exemple : Soit P : « tous les entiers naturels sont positifs ». Alors $\text{non}P$: « tous les entiers naturels ne sont pas positifs » ou encore « il existe au moins un entier naturel strictement négatif ».

De manière évidente, P et $\text{non}P$ ne sont jamais vraies simultanément; lorsque l'une est vraie, l'autre est fausse : P est vraie si et seulement si $\text{non}P$ est fausse ; P fausse si et seulement si $\text{non}P$ est vraie.

- 24.** Une définition est un énoncé qui donne les caractéristiques (ensemble des propriétés essentielles) d'un concept, d'un objet. Une définition est, par essence, vraie et ne se démontre pas.

- 25.** Une propriété (prop.), un théorème (théo.), un lemme ou un corollaire du cours est un résultat vrai que l'on sait démontrer à partir des définitions et d'autres propriétés démontrées préalablement.

4. Quantificateurs

26. $\forall$ se lit et signifie « pour tout »
 27. $\exists$ se lit et signifie « il existe ».
 28. $\exists!$ se lit et signifie « il existe un unique ».

28 bis Exemples :

- la phrase mathématique : « $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$. » se lit et signifie : « pour tout réel x , l'image de x par la fonction exponentielle est un réel strictement positif » OU ENCORE « l'exponentielle de tout réel est un réel strictement positif » Cette phrase est-elle VRAIE ou FAUSSE ? Quelle est sa négation ?
- la phrase mathématique : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}/x < y$. » se lit et signifie : « tout réel x est inférieur à un entier naturel ». Cette phrase est-elle VRAIE ou FAUSSE ? Quelle est sa négation ?
- la phrase mathématique : « $\exists y \in \mathbb{N}/\forall x \in \mathbb{R}, x < y$. » se lit et signifie : « il existe un entier supérieur à tous les réels. » Cette phrase est VRAIE ou FAUSSE ? Quelle est sa négation ?
- la phrase mathématique : « $\exists! y \in \mathbb{N}/\forall x \in \mathbb{N}, x \geq y$. » se lit et signifie : « il existe un unique entier inférieur à tous les autres entiers. » Cette phrase est VRAIE ou FAUSSE ? Quelle est sa négation ?
- la phrase mathématique : « $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \frac{1}{x} \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. » se lit et signifie : « tout réel non nul et compris entre -1 et 1 a son inverse supérieur à 1 ou inférieur à -1 » Cette phrase est VRAIE ou FAUSSE ? Quelle est sa négation ?
- la phrase mathématique : « $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \frac{1}{x} \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. » se lit et signifie : « tout réel non nul et compris entre -1 et 1 a son inverse supérieur à 1 ou inférieure à -1 » Cette phrase est VRAIE ou FAUSSE ? Quelle est sa négation ?

NB : la négation de « $\forall x \in E, P(x)$ vraie » est « $\exists x \in E / P(x)$ fausse »

la négation de « $\exists x \in E / P(x)$ vraie » est « $\forall x \in E, P(x)$ fausse »

5. Connecteurs logiques

29. $\Rightarrow$ se lit et signifie « implique » ou « si .. alors ... ». $\Rightarrow$ s'emploie entre deux phrases (propositions) mathématiques P et Q qui ont un lien de cause à effet. $P \Rightarrow Q$ signifie et se lit « si P est vraie alors Q est vraie » mais ne dit pas si P est vraie ni si Q est vraie.

La **réciproque** de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$. Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse et inversement.

La **contraposée** de $P \Rightarrow Q$ est $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$.

$P \Rightarrow Q$ signifie que : Q est vraie dès que P est vraie ce qui veut dire que l'on ne peut jamais avoir P vraie et Q fausse ; autrement dit, Q vraie est une condition nécessaire pour que P soit vraie autrement dit : si Q n'est pas vraie alors P n'est pas vraie. Donc, $P \Rightarrow Q$ si et seulement si $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$

30. A RETENIR :

- $P \Rightarrow Q$ signifie que P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie et signifie aussi que Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie.
- Une **implication** et sa **contraposée** donnent la même information et décrivent le même lien de cause à effet. Donc pour prouver $P \Rightarrow Q$, je peux prouver $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- Une **implication** et sa **réciproque** donnent deux informations différentes.

30bis Attention : l'affirmation $P \Rightarrow Q$ ne permet pas de dire si P est vraie ni si Q est vraie. Elle permet juste de donner un lien entre les propositions P et Q . **Par contre**, lorsque je sais, d'une part, que $P \Rightarrow Q$ et d'autre part, que P est vraie, je peux affirmer que Q est vraie aussi.

30ter Exemples :

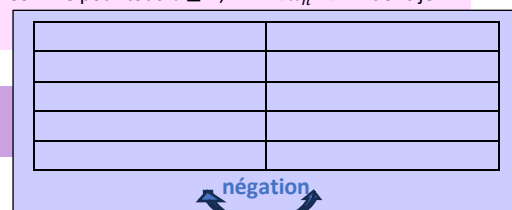
- la phrase mathématique : « $\forall x \in \mathbb{R}, (x < -1 \Rightarrow x^2 > 1)$. » se lit et signifie « pour tout réel x , si x est strictement inférieur à -1 alors son carré est strictement supérieur à 1 » ou en français fluide « tout réel x strictement inférieur à -1 a son carré strictement supérieur à 1 ». Cette assertion est VRAIE. Sa contraposée « $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 < 1 \Rightarrow x > -1)$ » est VRAIE. Mais sa **réciproque** est « $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 1 \Rightarrow x < -1)$ » est FAUSSE car $2^2 > 1$ et $2 \geq -1$.

$$\begin{array}{ccc} P \Rightarrow Q & & P \text{ et non } Q \\ \in & & \notin \\ > & & \leq \end{array}$$
 Sa contraposée est-elle VRAIE ou FAUSSE ?
- la phrase : « si je possède 2 euros alors je suis capable de m'acheter une baguette de pain ». Cette phrase ne permet pas de savoir si au moment où nous parlons, j'ai deux euros en poche, ni si je peux m'acheter une baguette ... Elle donne juste un lien entre les deux assertions
- Application :** Montrons que pour tout $n \geq 2$, $4 > 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} > 1$.

Posons $x_n = -2 + \frac{1}{n}$. Alors, $x_n^2 = 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}$. Je sais que pour tout réel x , $(-2 < x < -1 \Rightarrow 4 > x^2 > 1)$. Comme pour tout $n \geq 2$, $-2 < x_n < -1$ donc je peux affirmer que pour tout $n \geq 2$, $4 > x_n^2 > 1$ ce qui signifie que pour tout $n \geq 2$, $4 > 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} > 1$.

31. NB : La négation de « $(P \Rightarrow Q)$ » est « $P \text{ et non } Q$ ».

La négation de « $\forall x \in E, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ » est « $\exists x \in E / P(x) \text{ et non } Q(x)$ ».



- 32.** $\Leftrightarrow$ se lit et signifie « est équivalent à » ou encore « si et seulement si ». $\Leftrightarrow$ s'emploie entre deux phrases mathématiques P et Q qui ont un double-lien de cause à effet : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (i.e. lorsque l'implication $P \Rightarrow Q$ et sa réciproque sont vraies).

$P \Leftrightarrow Q$ signifie et se lit des différentes manières suivantes :

- ou
- P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.
 - si P est vraie alors Q est vraie et si Q est vraie alors P est vraie.
 - Pour que P soit vraie, **il faut et il suffit** que Q soit vraie.
 - P vraie est une **condition nécessaire et suffisante** pour que Q soit vraie.

32 bis Exemples :

- la phrase mathématique : « Soit $x \in \mathbb{R}$. ($x < -1$ ou $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1$). » se lit et signifie : « le carré d'un réel est strictement supérieur à 1 si et seulement si le réel est strictement plus petit que -1 ou strictement plus grand que 1 ».
- la phrase : « (avoir les yeux bleus $\Leftrightarrow$ produire peu de mélanine). » se lit et signifie : « pour avoir des yeux bleus, il faut et il suffit que je produise peu de mélanine ». Comment utiliser cette équivalence sur vous ?
- Soit A et B deux ensembles. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \in B)$.

- 33. NB :** Si $P \Leftrightarrow Q$ alors $\text{non}P \Leftrightarrow \text{non}Q$ et réciproquement. Donc pour prouver $P \Leftrightarrow Q$, je peux prouver $\text{non}P \Leftrightarrow \text{non}Q$. La négation de " $P \Leftrightarrow Q$ " est " $\text{non}P$ et Q ou $\text{non}Q$ et P ".

II Des sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$.

1. Définition et notations

34. Définitions et notations : L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^{++}$, resp. $\mathbb{R}^*$) est l'ensemble des nombres réels positifs (resp. strictement positifs, resp. non nuls).
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : 0, 1, 2, ... et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** qui sont : ... -46, -45, -44, ..., -4, -3, ..., -1, 0, 1, 2, ..., 1027, ...
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux** qui sont les réels de la forme $n10^p$ où n et p entiers relatifs.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**, ce sont les réels de la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres irrationnels** qui sont les réels non rationnels (ex : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$).

- Si a et b sont deux réels tels que $a < b$ alors l'intervalle $[a, b]$ est l'ensemble des **réels** compris entre a et b et $]a, b[$ est l'ensemble des réels strictement compris entre a et b , $]a, b]$ est l'ensemble des réels compris entre a et b et différents de a , $]a, +\infty[$ est l'ensemble des réels strictement supérieurs à a ...
- Si n et m sont deux entiers tels que $n \leq m$ alors $\llbracket n, m \rrbracket$ est l'ensemble de tous les **entiers** compris entre n et m ; autrement dit, $\llbracket n, m \rrbracket = \{n, n+1, \dots, m\}$.

34 bis. Exercice : 1. Compléter avec le « bon sigle » : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ et $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{D} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \dots$

2. Compléter les phrases en français : " $\forall (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*, x \leq y$ " signifie « ... »

3. Décrire l'ensemble ci-dessous avec des accolades :

$\mathbb{R} \times \mathbb{Q} = \{\dots\}$, $\mathbb{Q} = \{\dots\}$ et $\mathbb{D} = \{\dots\}$ et $\llbracket 3; 7 \rrbracket = \{\dots\}$

4. Simplifier ces ensembles : $\{t \in \mathbb{Z} / t^2 < 6\} = \dots$ et $\{t \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, 0 \leq t < \varepsilon\} = \dots$ et $]1; \sqrt{3}[\cap]\frac{5}{2}, e[= \dots$ et $]1; \sqrt{3}[\cup]\frac{5}{2}, e[= \dots$

- 35. NB :** On montrera que les rationnels et les irrationnels sont partout collés les uns aux autres bien que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont disjoints. Aussi proche que l'on souhaite d'un réel, il y a toujours un rationnel et un irrationnel.

2. Entiers

36. Définitions : Soit n et m deux entiers relatifs.

- n est **pair** lorsqu'il existe k entier tel que $n = 2k$. n est **impair** lorsqu'il existe k entier tel que $n = 2k + 1$.
- Un **diviseur** de n est tout entier p tel qu'il existe un autre entier q vérifiant $n = pq$ (on dit aussi que p divise n).
- Un **multiple** de n est tout entier de la forme nk tel que k entier.
- n est dit **premier** lorsque ses seuls diviseurs sont 1, -1, n et $-n$.
- n et m sont dits **premiers entre eux** lorsque 1 et -1 sont leurs seuls diviseurs communs.

Voici la liste des nombres premiers entre 1 et 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. 5

36bis NB : La somme et le produit de deux entiers sont entiers.

36ter ter Exercices :

1. Prouver que le produit d'un entier pair et d'un autre entier est pair et le produit de deux impairs est impair.
2. Prouver **par contraposée** que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Prouver **par disjonction de cas** que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

37. Attention : ne pas confondre la parité d'un entier et la parité d'une fonction. Soit f Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
 f est paire lorsque $\forall x \in Df, -x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$ et f est impaire lorsque $\forall x \in Df, -x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$.

38. Théorème fondamental admis :

1. Tout entier naturel s'écrit de manière unique comme produit de nombres entiers premiers (on parle alors de décomposition primaire de l'entier) .
2. Soit n et p deux entiers naturels tels que p non nul. Alors il existe deux uniques entiers naturels q et r tels que :
 $n = pq + r$ et $r < p$. q est le **quotient** et r est le **reste** de la division euclidienne de n par p .
3. Soit n et p deux entiers relatifs tels que p non nul. Alors il existe deux uniques entiers q et r tels que :
 $n = pq + r$ et $0 \leq r < |p|$. q est le quotient et r est le reste de la division euclidienne de n par p .

↪Démon 1. de l'existence par récurrence forte ↪Démon 2. de l'unicité avec la méthode « en prenant deux » !

39. Csq: Soit n et m deux entiers.

1. n divise m **si et seulement si** les diviseurs premiers de la décomposition primaire de n apparaissent dans la décomposition primaire de m avec une puissance supérieure ou égale dans l'écriture de m que dans celle de n .
2. n et m sont premiers entre eux **si et seulement si** leurs décompositions primaires n'ont aucun facteur commun.
3. Soit k un entier naturel non nul. n et m sont premiers entre eux **si et seulement si** n et m^k sont premiers entre eux.

40. Théorème : Si n divise pq et n et p sont premiers entre eux alors n divise q .

Démon : Supposons que n divise pq et n et p sont premiers entre eux . Alors il existe un entier k tel que $kn = pq$ $\stackrel{\text{on note } H \text{ cet entier}}{=} H$;Ecrivons k, n, p et q sous la forme de leur décomposition primaire : $k = k_1^{m_1} k_2^{m_2} \dots k_r^{m_r}$, $n = n_1^{l_1} n_2^{l_2} \dots n_s^{l_s}$, $p = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_b^{u_b}$ et $q = q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_a^{v_a}$.
Alors, on obtient deux décompositions primaires de H à savoir $H = k_1^{m_1} k_2^{m_2} \dots k_r^{m_r} n_1^{l_1} n_2^{l_2} \dots n_s^{l_s} = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_b^{u_b} q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_a^{v_a}$. Ces deux décompositions n'en font qu'une par unicité de l'écriture. Comme n et p sont premiers entre eux, les n_i sont tous distincts des p_i . Par conséquent, les n_i sont parmi les q_i et de plus, si $n_i = q_j$ alors la puissance de n_i dans n doit être inférieure ou égale à celle de q_j dans q . Nous en déduisons que n divise q .

41. Définition: Soit n et m deux entiers relatifs.

- Si n et m sont non nuls alors le **PGCD** de n et m est le **plus grand diviseur commun** à ces entiers n et m .
- Si n et m sont non nuls alors le **PPCM** de n et m est le **plus petit multiple commun** à ces entiers n et m .

42. Méthode pour déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers :

Soit n et m deux entiers naturels dont tous les diviseurs premiers sont $p_1, \dots, p_s$ et tels que :

$n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times p_3^{k_3} \times \dots \times p_s^{k_s}$ et $m = p_1^{l_1} \times p_2^{l_2} \times p_3^{l_3} \times \dots \times p_s^{l_s}$ où $k_1, k_2, \dots, k_s$ et $l_1, l_2, \dots, l_s$ entiers naturels éventuellement nuls.

$$x = \text{PGCD}(n, m) = p_1^{\min(k_1, l_1)} \times p_2^{\min(k_2, l_2)} \times p_3^{\min(k_3, l_3)} \times \dots \times p_s^{\min(k_s, l_s)}$$

$$y = \text{PPCM}(n, m) = p_1^{\max(k_1, l_1)} \times p_2^{\max(k_2, l_2)} \times p_3^{\max(k_3, l_3)} \times \dots \times p_s^{\max(k_s, l_s)}$$

42 bis Exemple: Déterminons le PGCD ou le PPCM de deux entiers $n = 326836125$ et $m = 10290000$.

$$n = 3^2 5^3 7^4 11^2 = 2^0 3^2 5^3 7^4 11^2 \text{ et } m = 2^4 3^1 5^4 7^3 = 2^4 3^1 5^4 7^3 11^0$$

Donc, $\text{PGCD}(n, m) = \frac{2^0 3^1 5^3 7^3 11^0}{\text{diviseurs premiers aux puissances min}}$ et $\text{PPCM}(n, m) = \frac{2^4 3^2 5^4 7^4 11^2}{\text{diviseurs premiers aux puissances max}}$;

43. Théorème :

1. Si n et m sont deux entiers alors $n \times m = \text{PGCD}(n, m) \times \text{PPCM}(n, m)$.
2. Supposons $n < m$. Tout diviseur commun de m et n est diviseur commun de m, n et du reste r de la division euclidienne de m par n et par conséquent, $\text{PGCD}(m, n) = \text{PGCD}(n, r)$.

Démon 1 : Avec les notations précédentes, $xy = p_1^{\max(k_1, l_1) + \min(k_1, l_1)} \times p_2^{\max(k_2, l_2) + \min(k_2, l_2)} \times \dots \times p_s^{\max(k_s, l_s) + \min(k_s, l_s)} = nm$.

2. Soit d un diviseur commun à m et n . Alors il existe m' et n' deux entiers tels que : $m = dm'$ et $n = dn'$. Par conséquent,
 $r = m - qn = dm' - qdn' = d(m' - qn')$. Donc, **d divise r** . Par conséquent, tout diviseur commun à m et n est aussi diviseur commun à m, n et r . Ainsi, les diviseurs communs à m et n sont les diviseurs communs à n et r . J'en déduis que **$\text{PGCD}(m, n) = \text{PGCD}(n, r)$** .

44. Méthode d'Euclide pour déterminer le PGCD de deux entiers

Soient n et m deux entiers tels que $0 < n < m$. Notons $p = \text{PGCD}(n, m)$.

Principe de l'algorithme d'Euclide pour déterminer p : on effectue des divisions euclidiennes successives :

Etape 0 : division euclidienne de m par n , on note r_0 le reste, $r_0 \neq 0$.

Etape 1 : division euclidienne de n par r_0 , on note r_1 le reste, $r_1 \neq 0$.

Etape 2 : division euclidienne de r_0 par r_1 , on note r_2 le reste, $r_2 \neq 0$.

(...)

Etape N : division euclidienne de r_{N-2} par r_{N-1} , on note r_N le reste et $r_N = 0$. On s'arrête. Alors $p = r_{N-1}$.

Démo : D'après le théorème 43, $p = PGCD(m, n) = PGCD(n, r_0) = PGCD(r_0, r_1) = \dots = PGCD(r_{N-2}, r_{N-1})$.

D'après le théorème de la division euclidienne, si $r_n \neq 0$ alors $0 \leq r_{n+1} < r_n < \dots < r_1 < r_0$. Par conséquent, la suite (r_n) est une suite d'entiers naturels compris entre les entiers 0 et r_0 donc cette suite prend un nombre fini de valeurs (puisque entre 0 et r_0 , il n'y a que $r_0 + 1$ entiers distincts) (**).

De plus, par construction de ces restes, dès qu'un reste est nul, l'algorithme s'arrête.

Imaginons un instant qu'aucun reste ne soit nul i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \neq 0$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \neq 0$ et $r_n < r_{n-1}$, cette suite est strictement décroissante et par conséquent, prend une infinité de valeurs ce qui contredit l'affirmation (**). Donc, nécessairement, $\exists N \in \mathbb{N}, r_N = 0$ et $\forall n < N, r_n \neq 0$.

r_N est donc le premier et unique reste nul et à cette étape N , l'algorithme s'arrête.

b. Si $N = 0$ alors cela signifie que n divise m . Donc $p = PGCD(n, m) = n$.

Supposons $N \geq 1$. On a donc : $0 = r_N < r_{N-1} < \dots < r_1 < r_0$ et $r_{N-2} = r_{N-1}q_{N-1} + r_N \stackrel{\text{car } r_N=0}{=} r_{N-1}q_{N-1}$. Par conséquent, r_{N-1} divise r_{N-2} . J'en déduis

que r_{N-1} est le PGCD de r_{N-1} et r_{N-2} . J'en conclus que : $p = PGCD(m, n) = r_{N-1}$.

44bisExemple : déterminons le PGCD de $m = 2940$ et $n = 972$.

Première méthode par décomposition en facteurs premiers :

$$2940 = 2 \times 2 \times 5 \times 147 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 3 \\ = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$$

$$972 = 2 \times 2 \times 243 = 2 \times 2 \times 3 \times 81 = 2^2 \times 3^5.$$

Donc, $PGCD(2940, 972) = 2^2 \times 3 = 12$.

Deuxième méthode par l'algorithme d'Euclide :

$$2940 = 3 \times 972 + 24$$

$$972 = 40 \times 24 + 12$$

$$24 = 2 \times 12 + 0.$$

J'en déduis que $12 = PGCD(2940, 972)$.

45Définition de la congruence : Soit x et y et w des réels.

x est congru à y modulo w lorsqu'il existe un entier relatif p tel que : $x = y + pw$. On note alors $x \equiv y[w]$.

45bis Exemples :

- $x \equiv y[\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi$.
- $\frac{\pi}{3} \equiv -\frac{11\pi}{3}[2\pi]$ car $\frac{\pi}{3} \equiv -\frac{11\pi}{3} + 4\pi$
- Soit n et m deux entiers. $n \equiv 0[m] \Leftrightarrow n$ est un multiple de m .
- $(x \equiv 0[2] \Leftrightarrow x \text{ est un entier pair})$ et $(x \equiv 1[2] \Leftrightarrow x \text{ est un entier impair})$

46 Soit m un entier naturel non nul. Alors pour tout entier naturel n , il existe r et q deux entiers tels que $n = mq + r$ et $0 \leq r < m$ et par suite $n \equiv r[m]$. Donc pour tout entier naturel n est congru modulo m à un entier compris entre 0 et $m - 1$.

3. Rationnels

47Théo : Tout nombre rationnel a une écriture irréductible i.e. une écriture de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux.

Pour l'obtenir, on simplifiera la fraction haut et bas par le PGCD de p et q .

Démo : si d est le PGCD de p et q alors il existe p' et q' deux entiers tels que $p = dp'$ et $q = dq'$. Imaginons un instant que p' et q' ne soient pas premiers entre eux. Alors ils ont un diviseur commun $d' > 1$ et $p' = d'p''$ et $q' = d'q''$ donc $p = dd'p''$ et $q = dd'q''$. Mais dd' est un diviseur commun à p et q et $dd' > d \dots$ ce qui contredit la définition du PGCD. Donc mon hypothèse « p' et q' non premiers entre eux » est fautive. Ainsi p' et q' sont premiers entre eux et $\frac{p}{q} = \frac{dp'}{dq'} = \frac{p'}{q'}$. $\frac{p'}{q'}$ est un représentant irréductible de $\frac{p}{q}$.

48Méthode pour additionner deux nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$: on met chacune des fractions sous un dénominateur commun le plus petit possible qui est le PPCM des dénominateurs b et d . En effet : notons p le PPCM de b et d . Alors il existe deux entiers m et m' tels que :

$$p = bm = dm' \text{ et } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{am}{bm} + \frac{cm'}{dm'} = \frac{am}{p} + \frac{cm'}{p} = \frac{am+cm'}{p}.$$

$$\text{48 bisExemple : } \frac{17}{35} + \frac{13}{21} = \frac{17}{7 \times 5} + \frac{13}{7 \times 3} = \frac{17 \times 3}{7 \times 5 \times 3} + \frac{13 \times 5}{7 \times 3 \times 5} = \frac{17 \times 3 + 13 \times 5}{7 \times 3 \times 5} = \frac{116}{7 \times 3 \times 5}.$$

$$\text{48 ter Exercice : Calculer } a = \left(\frac{5}{12} - \frac{7}{30} + \frac{11}{18} \right) \div \frac{26}{3}$$

49 Plus généralement, cette méthode est valable pour additionner des fractions.

$$\text{49bisExemple } \frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{2x+2} + \frac{2-x}{1-x} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{2(x+1)} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{2(x-1)(x+1)} - \frac{x(x-1)}{2(x+1)(x-1)} + \frac{2(x-2)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2-x(x-1)+2(x-2)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x-2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)(x-2)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{2(x-1)}.$$

50Théorème : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

↪ Démo par l'absurde

51Proposition : La somme, le produit et le quotient de deux rationnels sont des rationnels. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel. Le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est irrationnel. ↪ Démo

Par contre, on ne peut rien dire ni de la somme ni du produit de deux irrationnels ↪ ex-ex

↪ Démo et ex-ex

III Raisonnements mathématiques

1. Raisonnement par disjonction de cas

52 Ce raisonnement est utilisé pour démontrer une propriété que l'on peut décomposer en un nombre fini de cas disjoints.

52bis Exemple : montrer par disjonction des cas que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1^{er} cas : n pair. Alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k$ et par conséquent, $u_n = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$. J'en déduis que u_n , étant le produit de deux entiers naturels, est un entier naturel

2ème cas : n impair. Alors il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k + 1$ et par conséquent, $u_n = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$. J'en déduis que u_n , étant le produit de deux entiers naturels, est un entier naturel.
J'en conclus que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

2. Raisonnement par récurrence

Ce raisonnement par récurrence est utilisé pour prouver qu'une proposition H dépendant d'un entier naturel est vraie quelle que soit la valeur de cet entier. On applique alors l'un des théorèmes admis suivants :

53 Théorème de récurrence simple (admis)

Soit $H(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n .

S'il existe un entier naturel n_0 tel que : $H(n_0)$ soit vraie (**initialisation simple**)

et pour chaque entier naturel $n \geq n_0$, dès que $H(n)$ est vraie alors $H(n+1)$ est vraie (**propagation**)

alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $H(n)$ est vraie (**conclusion**).

En langage mathématique : $\left\{ \begin{array}{l} H(n_0) \text{ vraie} \\ \forall n \geq n_0, (H(n) \Rightarrow H(n+1)) \end{array} \right\} \Rightarrow (\forall n \geq n_0, H(n) \text{ vraie}).$

53bis Exemple de preuve par récurrence simple : Montrons que : pour tout entier naturel n , $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notons $H(n)$ la proposition : $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : $0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Donc $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel.

hypothèse de récurrence

Je suppose que $\widehat{H(n) \text{ est vraie}}$ i.e. $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Sous cette hypothèse, je vais prouver que $H(n+1)$ est vraie i.e. que $0 + 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$0 + 1 + 2 + \dots + n + (n+1)$

$= (0 + 1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \stackrel{\text{car } H(n) \text{ vraie}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

54 Théorème de récurrence forte (admis)

Soit $H(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n .

S'il existe un entier naturel n_0 tel que : $H(n_0)$ soit vraie (**initialisation simple**)

et si pour chaque entier naturel $n \geq n_0$, dès que $H(n_0), H(n_0+1), \dots, H(n)$ sont vraies alors $H(n+1)$ est vraie (**propagation avec hypothèse forte**)

alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $H(n)$ est vraie (**conclusion**).

54bis Exemple de preuve par récurrence forte : Montrons par récurrence forte la propriété : $H(n)$: "Si l'entier n n'est pas premier alors n s'écrit comme un produit fini de nombres premiers." pour $n \geq 2$.

Init° : $H(2)$ est vraie.

Propag° : Soit n un entier sup à 2. Je suppose que : $H(2), H(3), \dots, H(n-1), H(n)$ sont vraies. Montrons sous cette hypothèse que $H(n+1)$ est vraie.

Ou bien $n+1$ est premier. Alors $n+1$ est son propre diviseur premier.

Ou bien $n+1$ n'est pas premier. Alors $n+1$ a un diviseur d compris entre 2 et n . On a donc $n+1 = d \times e$ avec d et e entiers entre 2 et n . Comme par hypothèse de récurrence $H(d)$ et $H(e)$ sont vraies, je peux affirmer que d et e sont des produits finis de nombres premiers. Et par conséquent $n+1$, produit d et e , est aussi un produit fini de nombres premiers. Donc $H(n+1)$ est vraie dès que $H(2), H(3), \dots, H(n-1), H(n)$ sont vraies.

CCL : Par le théorème de récurrence forte, je peux conclure que $\forall n \geq 2, H(n)$ est vraie.

55 Théorème de récurrence double (admis)

Soit $H(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n .

S'il existe un entier naturel n_0 tel que : $H(n_0)$ et $H(n_0+1)$ sont vraies (**initialisation double**)

et pour chaque entier naturel $n \geq n_0$, dès que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies alors $H(n+2)$ est vraie (**propagation avec hypothèse double**)

alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $H(n)$ est vraie (**conclusion**).

55bis Exemple de preuve par récurrence double : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour tout entier naturel, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$. Déterminons une expression de u_n en fonction de n .

En calculant les premiers termes de cette suite, je peux CONJECTURER : $\underbrace{u_n = n+1}_{H(n)}$. Je vais démontrer que la propriété $H(n)$ est vraie pour tout entier

naturel n par une récurrence double.

Init° : $u_0 = 1, u_1 = 2$ donc $H(1)$ et $H(2)$ sont vraies.

Propag° : Soit n un entier naturel non nul. Je suppose que $\underbrace{H(n), H(n+1) \text{ sont vraies}}_{HR}$ et je vais montrer que, sous cette hypothèse (HR), $H(n+2)$ est vraie. Je sais donc que : $u_n = n+1, u_{n+1} = n+2$ (HR) et je veux montrer que $u_{n+2} = n+3$. On a : $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$ donc $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Donc en appliquant (HR), $u_{n+2} = 2(n+2) - (n+1) = n+3$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

CCL : d'après le théorème de récurrence double, $H(n)$ est vraie.

3. Raisonnement par l'absurde

56. Ce raisonnement est utilisé pour prouver que dans les conditions de l'exercice, une propriété mathématique A est vraie. Il consiste à imaginer un instant que P soit fausse et par déduction, en utilisant les données du problème, à aboutir à une absurdité (par exemple : un entier est pair et impair en même temps...ce qui est impossible). On peut alors conclure que l'hypothèse « P est fausse » est incorrecte ce qui signifie que P est vraie.

56bis. Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. On montre facilement par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est bien défini et $u_n > 0$.

Montrer par l'absurde que (u_n) ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Imaginons un instant que (u_n) tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Alors comme tous les termes de cette suite sont strictement positifs,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \frac{1}{u_n} = +\infty$; autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = +\infty$. Mais la suite (u_{n+1}) se comporte comme la suite (u_n) et tend donc vers 0. Cette suite (u_{n+1}) aurait donc deux limites différentes (0 et $+\infty$) quand n tend vers $+\infty$. C'est totalement absurde puisque tous les termes d'une même suite ne peuvent être proches de 0 et de l'infini en même temps !!!! J'en conclus que mon hypothèse « (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. » est fausse et ainsi je peux conclure que (u_n) ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. Raisonnement par contraposée

57. Ce raisonnement est utilisé pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$ ou de manière équivalente « si P vraie alors Q vraie ». Ce raisonnement consiste à démontrer $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ pour prouver que $P \Rightarrow Q$. En effet, il est parfois plus simple de montrer $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ plutôt que de prouver $P \Rightarrow Q$.

57bis Exemple : Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels positifs.

Montrer par contraposée que si $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ alors $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Nous allons donc prouver que « $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ » faux $\Rightarrow$ « $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ » faux.

Supposons que $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas tous nuls et montrons qu'alors $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 0$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas tous nuls, cela signifie qu'au moins l'un de ces réels est non nul. Supposons par exemple que $x_1 \neq 0$. Alors x_1 est positif et non nul donc $x_1 > 0$. De plus, comme $x_2, \dots, x_n$ sont positifs, $x_2 + \dots + x_n \geq 0$ et en additionnant x_1 de part et d'autre de l'inégalité, j'obtiens que $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1$. Comme $x_1 > 0$, cela donne $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$ et ainsi $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 0$.

5. Raisonnement par double-implication

58. Il s'emploie essentiellement pour résoudre une équation ou pour prouver une équivalence $P \Leftrightarrow Q$. Il consiste à prouver :

- que $P \Rightarrow Q$: on suppose P vraie et par déduction on prouve qu'alors Q est vraie.
- et réciproquement que $Q \Rightarrow P$: on suppose Q vraie et par déduction on prouve qu'alors P est vraie.

58bis Exemple : Résoudre l'équation $\sqrt{1+x} = x$ d'inconnue x réelle.

$\sqrt{1+x}$ est défini si et seulement si $1+x \geq 0$ si et seulement si $x \geq -1$.

Soit $x \in [-1, +\infty[$. $\sqrt{1+x} = x \Rightarrow 1+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Or, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\sqrt{1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} > 0$ donc, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ n'est pas solution.

Par contre, $\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}+1}{4}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2}} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution.

Ainsi, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule solution.

6. Raisonnement par équivalence

59. Il s'emploie essentiellement pour résoudre une équation, c'est-à-dire lorsque l'on cherche tous les objets X qui vérifient une certaine propriété P . Il consiste à traduire autrement la phrase « X vérifie P » jusqu'à décrire simplement tous les objets X vérifiant P .

59bis. Exemple : Résoudre l'équation $\sqrt{1+x} = x$ d'inconnue x réelle.

$\sqrt{1+x}$ est défini si et seulement si $1+x \geq 0$ si et seulement si $x \geq -1$.

Soit $x \in [-1, +\infty[$. $\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$a^2=b^2 \Rightarrow a=b$
n'est vraie que si
 a et b sont de
même signe

Ainsi, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule solution de notre équation.

60. Ce raisonnement par équivalence sert aussi à prouver l'égalité entre deux ensembles. En effet, $E = F$ lorsque E et F contiennent les mêmes objets i.e. être dans E , c'est être dans F i.e. $x \in E \Leftrightarrow x \in F$.

60bis Exemple : Soient E, F et G trois ensembles. Montrons que $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

$x \in E \cap (F \cup G) \Leftrightarrow x \in E$ et $x \in F \cup G \Leftrightarrow (x \in E$ et $x \in F)$ ou $(x \in E$ et $x \in G) \Leftrightarrow x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

On montre de même que $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.

7. Raisonnement par double-inclusion

61. Il s'emploie pour prouver l'égalité entre deux ensembles E et F . Pour que $E = F$, il faut et il suffit que E et F contiennent exactement les mêmes éléments et pour cela, il faut et il suffit que tout élément de E soit dans F et que tout élément de F soit dans E . Autrement dit, $E = F \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$. Le raisonnement par double inclusion consiste à prouver que $E \subset F$ (tout élément de E est élément de F) et réciproquement $F \subset E$ (tout élément de F est élément de E) pour montrer que $E = F$.

61bis Exemple : Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrons que $\{at + (1-t)b/t \in [0,1]\} = [a,b]$

Soit $t \in [0,1]$ et $x = at + (1-t)b$. Alors $x = b - (b-a)t$. Comme $b-a > 0$ et $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq (b-a)t \leq (b-a)$ et $a-b \leq -(b-a)t \leq 0$. Donc, $a \leq b - (b-a)t \leq b$ i.e. $a \leq x \leq b$. J'en déduis que $\{at + (1-t)b/t \in [0,1]\} \subset [a,b]$.

Réciproquement, soit $y \in [a,b]$. Cherchons $t \in [0,1]$ tel que : $y = at + (1-t)b$.

$y = at + (1-t)b \Leftrightarrow y - b = (a-b)t \Leftrightarrow t = \frac{y-b}{a-b} = \frac{b-y}{b-a}$. Comme $y \in [a,b]$, $0 \leq b-y \leq b-a$, donc $0 \leq \frac{b-y}{b-a} \leq 1$. Ainsi, $t = \frac{b-y}{b-a}$ est un réel de $[0,1]$ tel que $y = at + (1-t)b$. J'en déduis que : $[a,b] \subset \{at + (1-t)b/t \in [0,1]\}$.

J'en conclus que $[a,b] = \{at + (1-t)b/t \in [0,1]\}$.

8. Raisonnement par analyse-synthèse

62. Il s'emploie essentiellement pour résoudre une équation, c'est-à-dire lorsque l'on cherche tous les objets X qui vérifient une certaine propriété P et qu'il est difficile de raisonner par équivalence. Dans l'analyse, on suppose que notre équation admet au moins une solution : on la note X . Par déduction, grâce aux données du problème, on trie et sélectionne quelques objets X candidats solutions (et on élimine surtout une très grande majorité de candidats). Dans la synthèse, on étudie si chacun des candidats-solutions obtenus en fin d'analyse est effectivement solution en le réinjectant dans l'équation de départ. C'est comme un raisonnement par double implication : dans l'analyse, on montre que si X vérifie P alors X ne peut prendre que quelques valeurs (celles des candidats solutions) et dans la synthèse, on vérifie la réciproque : ces candidats-solutions sont-ils vraiment solutions ?

62bis Exemple : Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) - f(x-y) = 4xy$.

Analyse : je suppose qu'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) - f(x-y) = 4xy$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Prenons $x = y = \frac{t}{2}$. Alors $f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) - f\left(\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\right) = 4 \cdot \frac{t}{2} \times \frac{t}{2} = t^2$. Donc, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(0) + t^2$.

Conclusion de l'analyse : s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) - f(x-y) = 4xy$ alors cette fonction est de la forme $f(t) = t^2 + \lambda$ où λ est un réel indépendant de t . Autrement dit, parmi toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ seules les fonctions de la forme $(t \mapsto t^2 + \lambda)$.

Synthèse : Soit λ un réel et $f: (t \mapsto t^2 + \lambda)$. Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) - f(x-y) = (x+y)^2 + \lambda - (x-y)^2 - \lambda = x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2 + 2xy = 4xy$. Donc, f est bien solution de notre problème.

Conclusion : les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) - f(x-y) = 4xy$ sont toutes les fonctions de la forme $(t \mapsto t^2 + \lambda)$ où λ est un réel indépendant de t (une constante).

9. Prouver une unicité

63 Ou bien on applique un théorème qui affirme directement l'unicité recherchée (par exemple, le théorème de la division euclidienne : unicité de reste et du quotient...).

64 Ou bien pour prouver l'unicité de l'objet O , je considère un autre objet O' qui vérifie les mêmes propriétés que O et je montre, en utilisant leurs propriétés, que $O = O'$. (méthode dite « en en prenant deux »)

64bis Exemple : démontrons l'unicité dans le théorème de la division euclidienne. (on admet l'existence).

Soit n et p deux entiers naturels tels que p non nul. Montrons l'unicité des entiers naturels q et r tels que $n = pq + r$ et $r < p$.

Considérons des entiers naturels q, q', r et r' tels que $n = pq + r$ et $r < p$ et $n = pq' + r'$ et $r' < p$. Alors $pq + r = pq' + r'$ donc $p(q - q') = r' - r$. Or,

$0 \leq r < p$ et $0 \leq r' < p$. Donc $0 \geq -r' > -p$ et par suite, $-p < r - r' < p$. Par conséquent, $-p < p(q - q') < p$ et par suite $-1 < (q - q') < 1$.

Comme q et q' sont entiers, $q - q'$ est entier. Or le seul entier dans $] -1, 1[$ est 0. Ainsi, $q - q' = 0$ i.e. $q = q'$. Et en réinjectant dans (**), nous obtenons $r = r'$.

65 Ou bien on effectue un raisonnement par analyse-synthèse qui permet parfois de justifier unicité (grâce à l'analyse) et existence (grâce à la synthèse) d'un objet.

65bis Exemple : démontrons que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Je cherche à prouver qu'il existe une et une seule application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paire et une et une seule application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire telles que : $f = g + h$.

Analyse : supposons que de telles applications g et h existent. Alors,

$$\text{Pour tout réel } x, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g(-x) = g(x) \\ h(-x) = -h(x) \end{cases}$$

Alors, pour tout réel x , $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Ainsi pour tout réel x , $\begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(x) - h(x) = f(-x) \end{cases}$.

Donc, pour tout réel x , $\begin{cases} 2g(x) = f(x) + f(-x) \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$ et finalement pour tout réel x , $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$.

J'en conclus que si de telles g et h existent alors nécessairement g est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et h est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Donc si de telles g et h existent alors elles sont uniques !!!!! Il reste à vérifier

que les seules applications g et h qui peuvent convenir à savoir $g: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))\right)$ et $h: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))\right)$ conviennent vraiment. C'est ce que nous allons faire dans la synthèse.

Synthèse. Posons $g: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))\right)$ et $h: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))\right)$. Alors pour tout réel x ,

$$g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x). \text{ Donc } f = g + h.$$

De plus, pour tout réel x , $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$. Donc g est paire. De même, pour tout réel x , $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -h(x)$. Donc h est impaire.

Ainsi, $g: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))\right)$ et $h: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))\right)$ conviennent et d'après l'analyse, sont les seules qui conviennent. J'en conclus que f s'écrit de manière unique comme somme d'une application paire et d'une application impaire. f étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque, cette démonstration est valable pour n'importe quelle application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une application paire et d'une application impaire et la preuve donne cette écriture (cette décomposition).

Pour exemple, la fonction exponentielle se décompose de la sorte :

$$\exp = \underbrace{ch}_{\text{paire}} + \underbrace{sh}_{\text{impaire}} \quad \text{où } \underbrace{ch: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)}_{\text{cette fonction s'appelle le cosinus hyperbolique}} \text{ et } \underbrace{sh: \left(x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)}_{\text{cette fonction s'appelle le sinus hyperbolique}}.$$