

# DL 0

**Ex 0** Les phrases suivantes sont-elles VRAIES ou FAUSSES ? justifier votre réponse (n'hésitez pas à faire un dessin pour certaine réponse).

1.  $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, (x < A \Rightarrow x^3 < -1000000)$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^4 > 16 \Leftrightarrow x > 2)$ .
3.  $\exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p \Rightarrow \ln(n^2 + 1) \geq 1000)$ .
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} / e^n \leq p$ .
5.  $\exists A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, e^n \leq A$ .

**Ex 1** Montrer par contraposée que si  $n^2 - 1$  n'est pas divisible par 8 alors  $n$  est pair. Indication : on écrira  $n$  modulo 4.

**Ex 2** Soit  $u$  la suite définie par :  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n})$ .

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}$ .

2) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

3) On rappelle que si  $x \neq 1$  et  $n \in \mathbb{N}$  alors  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ .

Calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .