TD 0

Logique, langage mathématique et raisonnement. Entiers, rationnels et récurrence !

Exercice 0

Écrire le cas échéant en langage mathématique ou en français les ensembles suivants :

- a. $E = \{x \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k\}$ d. E est l'ensemble des réels supérieurs leur carré.
 b. $E = \{10^n / n \in \mathbb{N}\}$ a.e. E est l'ensemble des entiers relatifs carrés d'un autre entier.
 c. $E = \{f: (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\}$ autre entier.

Simplifier les ensembles :

- a. $\{t \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, t \leq \varepsilon\} = \dots$ b. $\{t \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, t \geq \varepsilon\} = \dots$ c. $\{t \in \mathbb{R} / \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+, t > \varepsilon\} = \dots$

Pour chacune des phrases suivantes,

- A-1. Les écrire le cas échéant en langage mathématique si elles sont écrites ou en français et les écrire en français courant lorsqu'elles sont écrites en langage mathématique.
 B-2. Préciser si elles est/sont vraies ou fausses.
 C-3. Expliciter en français et en langage mathématique sa/leur négation.

- a. Tout réel positif est le carré d'un réel négatif. j. $\exists A \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in \mathbb{R}, (x > A \Rightarrow x^2 > 10^3)$.
 b. Il n'existe aucun entier relatif inférieur à tous les autres. k. Si l'entier 3 est pair alors l'entier 5 est pair.
 c. Un réel n'est pas forcément supérieur à son carré. l. Tout entier est un rationnel.
 d. Tout réel est au plus égal à son carré. m. Tout rationnel est un décimal.
 e. Le logarithme d'un réel supérieur à 1 est positif. n. Un réel est rationnel ou irrationnel.
 f. L'inverse de tout entier naturel non nul est non nul et compris entre 0 et 1. o. La réunion de deux intervalles est un intervalle.
 g. $(\forall b > 0, 0 \leq a \leq b) \Rightarrow a = 0$. p.o. Multiplier une inégalité par un réel positif conserve le sens de l'inégalité.
 h. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / x^2 = y^2 + 1$. b.p. La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
 i. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 + 1$. q. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Leftrightarrow e^x < e^y)$.

EXERCICE 1 Extrait du concours ENAC pilote. Sélectionner la/les assertion(s) vraies :

Partie 1 $\wedge$ et $\vee$ désignent respectivement les connecteurs positionnels « et » et « ou ».

Pour une proposition $A(x)$ dépendant d'une variable x , on note $\neg A(x)$ sa négation.

Question 1 :

- D.A. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est $(\exists x \in E, A(x)) \wedge (\exists x \in E, \neg A(x))$.
 E.B. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est $(\exists x \in E, A(x)) \vee (\exists x \in E, \neg A(x))$.
 F.C. La négation de $(\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq N)$ est $(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N)$.
 G.D. La négation de $(\exists x \in \mathbb{R}, x = x^2)$ est $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x^2)$.

Question 2 :

- A. $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.
 B. $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.
 C. $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.
 D. $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.

Question 3 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et P, Q et R les assertions suivantes :

$P: " \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0. "$, $Q: " \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0. "$ et $R: " (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0). "$

- A. $\neg R \Rightarrow Q$.
 B. $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
 C. $\neg P \Rightarrow \neg R$.
 D. $Q \Rightarrow R$.

Partie 2

Question 4 : Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On pose $a = 2n^3 + n^2 + 2n + 5$ et $b = n^2 + 1$.

- A. $PGCD(a, b) = PGCD(b, 3)$.
 B. $PGCD(a, b) = PGCD(b, 2)$.
 C. Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 1$ et si n est impair alors $PGCD(a, b) = 2$.
 D. Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 2$ et si n est impair alors $PGCD(a, b) = 1$.

Question 5 : L'ensemble S des solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ du système $\begin{cases} PGCD(x, y) = 5 \\ PPCM(x, y) = 60 \end{cases}$ est constitué de :

- A. 6 couples solutions. B. 4 couples solutions.

a mis en forme : Police :10 pt, Non Gras, Non souligné

a mis en forme : Police :10 pt

a mis en forme : Police :10 pt, Non Gras, Non souligné

a mis en forme : Interligne : Multiple 1,08 li, Numéros + Niveau : 1 + Style de numérotation : 1, 2, 3, ... + Commencer à : 1 + Alignement : Gauche + Alignement : 0 cm + Retrait : 0,63 cm, Motif : Transparente (Accent 6)

a mis en forme : Droite : -1,15 cm, Interligne : Multiple 1,08 li, Numéros + Niveau : 1 + Style de numérotation : a, b, c, ... + Commencer à : 1 + Alignement : Gauche + Alignement : 0 cm + Retrait : 0,63 cm

C. 2 couples solutions.

D. 1 couple solution.

Partie 3

Question 6 : L'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$

- A. n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$.
- B. admet une seule solution dans $\mathbb{Q}$.
- C. admet deux solutions dans $\mathbb{Q}$.
- D. admet trois solutions dans $\mathbb{Q}$.

Question 7 : Les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$ sont :

- A. 1,3,5,7.
- B. -3,3,5,11.
- C. -1,3,5,9.
- D. 2,3,5,6.

Partie 4 Soit (u_n) la suite d'entiers définie par : $u_0 = 15$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$.

Question 8 : On peut établir que :

- A. Tout diviseur commun de u_{n+1} et u_n divise aussi 5.
- B. Tout diviseur commun de u_{n+1} et u_n divise aussi 6.
- C. Tout diviseur commun de u_{n+1} et u_n divise aussi 15.
- D. u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.

Question 9 : On obtient alors :

- A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise u_n .
- B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise u_n .
- C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise u_n .
- D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise u_n .

Question 10 : Ainsi, $PQCD(u_{n+1}, u_n) =$

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 5.
- E. 6.

Exercice 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice 3 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. On pose $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, u_{n-1} et u_1 .
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}$.

Exercice 3 Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = (3n - 2)(-2)^{n-1}$.
2. L'affirmation : " $\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$ " est-elle vraie ?

RQUE : on saura très bientôt calculer $\sum_{k=0}^n k(-2)^k$ et donc $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 4 Soit u la suite définie par : $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sum_{k=1}^n u_k$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 5 Soit ϕ la suite (de Fibonacci) définie par : $\phi_0 = 0, \phi_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n \geq n - 1$. En déduire la limite de ϕ .
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n$.
- 3) Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \phi_{n+p} = \phi_{n+1}\phi_p + \phi_n\phi_{p-1}$.