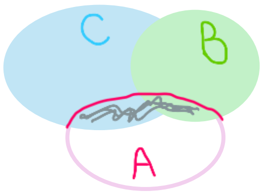
Corrigé TD 0

Soit E un ensemble et A, B et C des parties de E.

1. Faire un dessin illustrant les égalités : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. Compléter les généralisations suivantes:
   soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ des parties de E. $A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) =$...................... et $A \cup (\bigcap_{k=1}^{n} B_k) =$.................... .
3. Démontrer l'une des égalités puis sa généralisation.

1.



2. soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ des parties de E. $A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k)$ et $A \cup (\bigcap_{k=1}^{n} B_k) = \bigcap_{k=1}^{n} (A \cup B_k)$

3. $x \in A \cap (B \cup C)$

sietssi $x \in A \; et \; x \in (B \cup C)$

sietssi $x \in A \; et \; [x \in B \; ou \; x \in C]$

sietssi $[x \in A \; et \; x \in B] \; ou \; [x \in A \; et \; x \in C]$

sietssi $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Les ensembles $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ont donc exactement les mêmes éléments. Ces deux ensembles sont donc égaux. Ainsi, $A \cap (B \cup C) \overset{**}{\triangleq} (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Généralisation :

Posons $H(n)$: " si $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ sont des parties de E alors $A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k)$ ".

<u>Initialisation</u> : si A, B_1 sont des parties de E alors $A \cap (\bigcup_{k=1}^{1} B_k) = A \cap B_1 = \bigcup_{k=1}^{1} (A \cap B_k)$. Donc $H(1)$ est vrai.

si A, B_1, B_2 sont des parties de E alors $A \cap (\bigcup_{k=1}^{2} B_k) = A \cap (B_1 \cup B_2) \underbrace{=}_{d'après \, **} (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k)$. Donc $H(2)$ est vrai.

<u>Propagation</u> : soit n un entier naturel non nul. Supposons que $H(n)$ est vrai. Soit $A, B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ des parties de E.

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k \right) = A \cap \left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) \cup B_{n+1} \right) \overset{\substack{par \, ** \\ avec \, B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \\ et \, C = B_{n+1}}}{\triangleq} \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k) \right) \cup (A \cap B_{n+1}) \overset{car \, H(n) \, vrai}{\triangleq} \left(\bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k) \right) \cup (A \cap B_{n+1}) = \bigcup_{k=1}^{n+1} (A \cap B_k).$$

Donc, pour chaque entier $n \geq 1$, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : le théorème de récurrence simple assure que pour tout entier $n \geq 1, H(n)$ est vraie.

Ecrire le cas échéant en langage mathématique ou en français les ensembles suivants :

a. $E = \{x \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k\}$.
   E est l'ensemble des entiers naturels pairs

b. $E = \{10^n / n \in \mathbb{N}\}$. E est l'ensemble des puissances de 10.
   $E = \{f : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\}$. E est l'ensemble des fonctions paires

c. E est l'ensemble des réels supérieurs leur carré. $E = [0,1]$

d. E est l'ensemble des entiers relatifs carrés d'un autre entier.
   $E = \{y \in \mathbb{Z} / \exists x \in \mathbb{N}, y = x^2\}$.

Simplifier les ensembles :

a. $\{t \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, t \leq \varepsilon\} = \mathbb{R}^-$ b. $\{t \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, t \geq \varepsilon\} = \emptyset$ c. $\{t \in \mathbb{R} / \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, t > \varepsilon\} = \mathbb{R}^{+*}$

Pour chacune des phrases suivantes,

1. L' écrire le cas échéant en langage mathématique ou en français
2. Préciser si elle est vraie ou fausse
3. Expliciter en français et en langage mathématique sa négation.

a. Tout réel positif est le carré d'un réel négatif. V
b. Il n'existe aucun entier relatif inférieur à tous les autres. V
c. Un réel n'est pas forcément supérieur à son carré. V
d. Tout réel est au plus égal à son carré. F
e. Le logarithme d'un réel supérieur à 1 est positif. V
f. L'inverse de tout entier naturel non nul est non nul et compris entre 0 et 1. F
g. $(\forall b > 0, 0 \leq a \leq b) \Rightarrow a = 0$. V
h. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / x^2 = y^2 + 1$. V
i. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 + 1$. F
j. $\exists A \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in \mathbb{R}, (x > A \Rightarrow x^2 > 10^3)$. V
k. Si l'entier 3 est pair alors l'entier 5 est pair. V
l. Tout entier est un rationnel. V
m. Tout rationnel est un décimal. F
n. Un réel est rationnel ou irrationnel. V
o. Multiplier une inégalité par un réel positif conserve le sens de l'inégalité. V
p. La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. F
q. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Leftrightarrow e^x < e^y)$.V

Extrait du concours ENAC pilote. Sélectionner la/les assertion(s) vraies :

Partie 1 $\wedge$ et $\vee$ désignent respectivement les connecteurs positionnels « et » et « ou ».

Pour une proposition $A(x)$ dépendant d'une variable x, on note $\neg A(x)$ sa négation.

Question 1 :

A. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Longrightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est $(\exists x \in E, A(x)) \wedge (\exists x \in E, \neg A(x))$.

B. La négation de $(\exists x \in E, A(x)) \Longrightarrow (\forall x \in E, A(x))$ est $(\exists x \in E, A(x)) \vee (\exists x \in E, \neg A(x))$.

C. La négation de $(\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq N)$ est $(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N)$.

D. La négation de $(\exists x \in \mathbb{R}, x = x^2)$ est $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x^2)$.

Question 2 :

A. $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.
B. $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.
C. $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.
D. $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1)$.

Question 3 : Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et P, Q et R les assertions suivantes :
P: "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$" , Q: "$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$" et R: "$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0).$" .
A. $\neg R \Longrightarrow Q$.
B. $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.
C. $\neg P \Longrightarrow \neg R$.
D. $Q \Longrightarrow R$.

Partie 2

Question 4 : Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On pose $a = 2n^3 + n^2 + 2n + 5$ et $b = n^2 + 1$.
A. $PGCD(a, b) = PGCD(b, 3)$.
B. $PGCD(a, b) = PGCD(b, 2)$ car $a = b(2n + 1) + 4$ donc $PGCD(a, b) = PGCD(b, 4)$et $n^2 + 1 = 4m \Longrightarrow \begin{cases} n = 2p + 1 \\ \underbrace{4p^2 + 4p + 2 = 4m}_{impossible} \end{cases}$. Donc n^2+1 n'est pas divisible par 4 et $PGCD(b, 4) = PGCD(b, 2)$. $x^3 - x^2 + x + 1$
C. Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 1$ et si n est impair alors $PCGD(a, b) = 2$. car si n est pair alors a et b sont impairs et $PGCD(b, 2) = 1$…
D. Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 2$ et si n est impair alors $PCGD(a, b) = 1$.

Question 5 : L'ensemble S des solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$du système $\begin{cases} PGCD(x, y) = 5 \\ PPCM(x, y) = 60 \end{cases}$ est constitué de :
A. 6 couples solutions.
B. 4 couples solutions.
C. 2 couples solutions.
D. 1 couple solution.

Car $xy = 5 \times 60 = 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$. Alors, $(x, y) = (5,60)\ ou\ (x, y) = (60,5) ou\ (x, y) = (15,20)\ ou\ (x, y) = (20,15)$.

Partie 3

Question 6 : L'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$
A. n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$. car si on pose $x = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers et premiers entre eux alors $x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow p^3 - p^2q + pq^2 + q^3 = 0 \Leftrightarrow p(p^2 + pq + q^2) = q^3 \Longrightarrow p\ divise\ q^3 \Longrightarrow p\ et\ q\ ne\ sont\ pas\ premiers\ entre\ eux$ …. Donc par contraposée, comme p et q sont premiers entre eux, $x^3 - x^2 + x + 1 \neq 0$.
B. admet une seule solution dans $\mathbb{Q}$.
C. admet deux solutions dans $\mathbb{Q}$.
D. admet trois solutions dans $\mathbb{Q}$.

Question 7 : Les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$ sont :
A. 1,3,5,7.
B. -3,3,5,11.
C. -1,3,5,9. car $(3n - 17) = 3(n - 4) - 5$. Donc on cherche n tels que $n - 4$ divise 5 , c'est à direr $n - 4 = 1$ ou $n - 4 = -1$ ou $n - 4 = 5$ ou $n - 4 = -5$.
D. 2,3,5,6.

Partie 4 Soit (u_n) la suite d'entiers définie par : $u_0 = 15\ et$ pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 6$.

Question 8 : On peut établir que :
A. Tout diviseur commun de u_{n+1} et u_n divise aussi 5. FAUX pour n=0 car $u_0 = 15\ et\ u_1 = 69$.
B. Tout diviseur commun de u_{n+1} et u_n divise aussi 6. car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 5u_n = -6$ donc si p divise u_{n+1} et u_n, p divisie 6.
C. Tout diviseur commun de u_{n+1} et u_n divise aussi 15. FAUX pour n=0 car $u_0 = 15\ et\ u_1 = 69$.
D. u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux. FAUX pour $n = 0$ car $u_0 = 15\ et\ u_1 = 69$.

Question 9 : On obtient alors :
A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise u_n. FAUX pour n=0 car $u_0 = 15\ et\ u_1 = 69$.
B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise u_n.
C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise u_n. FAUX pour n=0 car $u_0 = 15\ et\ u_1 = 69$. (et 5 ne divise pas 6)
D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise u_n. FAUX pour n=0 car $u_0 = 15\ et\ u_1 = 69$.

Question 10 : Ainsi, $PQCD(\ u_{n+1}, u_n) =$
A. 1.
B. 2.
C. 3. car $PGCD(u_0, u_1) = 3$.
D. 5.
E. 6.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Soit $H(n)$: « il existe un entier $a_n$tel que : $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17a_n$ ».

Initialisation : $3 \times 5^{2\times1-1} + 2^{3\times1-2} = 3 \times 5 + 2 = 17 = 17 \times 1$. Donc $a_n = 1$ convient.

Propagation : Soit n un entier naturel non nul. Supposons $H(n)$ vraie i.e. supposons qu'il existe un entier $a_n$tel que : $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17a_n$.

Alors $3 \times 5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2} = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 25 \times 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n+1} \underbrace{=}_{car\ H(n)\ vraie} 25 \times [17a_n - 2^{3n-2}] + 2^{3n+1}$ et par suite,

$3 \times 5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2} = 25 \times 17a_n - 2^{3n-2} \times [25 - 2^3] = 25 \times 17a_n - 2^{3n-2} \times 17 = 17 \times [25 \times a_n - 2^{3n-2}]$.

Posons $a_{n+1} = 25 \times a_n - 2^{3n-2}$. Alors a_{n+1} est bien un entier vérifiant $3 \times 5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2} = 17a_{n+1}$.

Donc pour tout entier non nul n, $H(n + 1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

Conclusion : le théorème de récurrence simple permet alors de conclure que pour tout entier non nul n, $H(n)$ est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. On pose $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, u_{n-1} et u_1.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

1. Soit n un entier naturel. $u_{n+1} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = u_n u_1 - u_{n-1}$.
2. Posons $H(n)$: « $u_n \in \mathbb{Z}$ ».

Init : $u_1 \in \mathbb{Z}$ et $u_0 = 2 \in \mathbb{Z}$. Donc $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.

Propag : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que $H(n)$ et $H(n-1)$ sont vraies. Sous cette hypothèse, je vais prouver que $H(n+1)$ est vraie. Je sais donc que u_n et u_{n-1} sont entiers. De plus, u_1 l'est aussi. J'en déduis que $u_{n+1} = u_n u_1 - u_{n-1}$ est aussi entier.

CCL : D'après le théorème de <u>récurrence double</u> , je peux affirmer que $H(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. Je cherche $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

Analyse : supposons qu'un tel entier p existe. Alors, $p \in \mathbb{Z}$, $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

Alors, nécessairement, $x + \frac{1}{x} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2} + \frac{1}{\frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2} + \frac{2}{p \pm \sqrt{p^2-4}} = \frac{\left(p \pm \sqrt{p^2-4}\right)^2 + 4}{2(p \pm \sqrt{p^2-4})} = \frac{2p^2 \pm 2p\sqrt{p^2-4}}{2(p \pm \sqrt{p^2-4})} = \frac{p(p \pm \sqrt{p^2-4})}{p \pm \sqrt{p^2-4}} = p$.

Donc si p existe alors nécessairement $p = x + \frac{1}{x}$; donc un unique entier p peut convenir.

Synthèse. Posons $p = x + \frac{1}{x}$. Alors $p \in \mathbb{Z}$ et $\underbrace{x^2 - px + 1}_{K(x)} = 0$. Posons $K(t) = t^2 - pt + 1$. Comme K admet x comme racine réelle, on a $\Delta_K = p^2 - 4 \geq 0$ et par suite $p^2 \geq 4$. De plus, x étant racine de K, $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$. Donc p convient et est l'unique entier qui convienne d'après l'analyse.

Ainsi, $p = x + \frac{1}{x}$ est l'unique entier tel que : $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = (3n-2)(-2)^{n-1}$.
2. L'affirmation : "$\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$" est-elle vraie ?

1. Pour tout entier n, posons $v_n = (3n-2)(-2)^{n-1}$ et $H(n)$ la propriété "$u_n = v_n$".

Initialisation : $v_0 = (-2)(-2)^{-1} = 1$. Donc $v_0 = u_0$ et $H(0)$ est vraie. $v_1 = (3-2)(-2)^0 = 1$. Donc $v_1 = u_1$ et $H(1)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Supposons que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies. Alors,

$u_{n+2} = -4[u_{n+1} + u_n] = -4[(3(n+1)-2)(-2)^{n+1-1} + (3n-2)(-2)^{n-1}] = -4 \times (-2)^{n-1} \times [(3(n+1)-2)(-2) \quad + (3n-2)]$

$u_{n+2} = -(-2)^{n+1} \times [(-3n-4)] = (-2)^{(n+2)-1} \times [(3(n+2)-2)]$. Donc $v_{n+2} = u_{n+2}$ et $H(n+2)$ est vraie.

Conclusion : le théorème de récurrence double assure que pour tout entier non nul n, $H(n)$ est vraie.

2. L'affirmation signifie que « la suite u est majorée ». Or, si l'on considère les entiers n impairs i.e. de la forme $n = 2p+1$, alors $u_{2p+1} = (6p+4)(-2)^{2p} = (6p+4) \times 4^p$. Donc, $\lim_{p \to +\infty} u_{2p+1} = +\infty$. La suite u ne peut donc pas être majorée. L'affirmation est donc fausse.

Soit u la suite définie par : $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Calculer les premiers termes de la suite : $u_2 = \frac{2}{1}u_1 = 6, u_3 = \frac{2}{2}(u_1 + u_2) = 9$ et $u_4 = \frac{2}{3}(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{2}{3}(3+6+9) = 12$.

Il semble que $\underbrace{u_n = 3n}_{H(n)}$. Démontrons cette conjecture par récurrence forte.

Initialisation : évidemment la propriété est vraie pour $n \in \{1;2;3;4\}$.

Propagation : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!], u_k = 3k$.

Alors $u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 3k = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{6}{n}\frac{n(n+1)}{2} = 3(n+1)$. Donc $H(n+1)$ est vraie dès que $H(1), H(2), \ldots, H(n)$ sont vraies.

Conclusion : le théorème de récurrence forte assure alors que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 3n$.

Soit Φ la suite (de Fibonacci) définie par : $\Phi_0 = 0, \Phi_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi_n \geq n-1$. En déduire la limite de Φ.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi_{n+1}^2 - \Phi_{n+2}\Phi_n = (-1)^n$.
3) Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \Phi_{n+p} = \Phi_{n+1}\Phi_p + \Phi_n\Phi_{p-1}$.

1) Soit $H(n)$ la propriété : "$\Phi_n \geq n-1$".

Initialisation : $\Phi_0 = 0 \geq -1 = 0-1$ et $\Phi_1 = 1 \geq 0 = 1-1$. $\Phi_2 = 1 = 2-1$ et $\Phi_3 = 2 = 3-1$. Donc, $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$ et $H(3)$ sont vraies.

Propagation : Soit n un entier naturel supérieur à 2. Je suppose que $\Phi_n \geq n-1$ et $\Phi_{n+1} \geq n$.

Alors $\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n \geq n-1+n = 2n-1$. Donc, $\Phi_{n+2} - (n+1) \geq 2n-1-(n+1) = n-2 \geq 0$ car $n \geq 2$. Donc, $\Phi_{n+2} \geq n+1$.

Conclusion : le théorème de récurrence double assure que $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \Phi_n \geq n-1$. Comme cette inégalité est encore vraie pour n=0 et n=1, on peut finalement conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi_n \geq n-1$.

2) Montrons que la suite $v = (\underbrace{\Phi_{n+1}^2 - \Phi_{n+2}\Phi_n}_{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1. Soit n un entier naturel.

$v_{n+1} = \Phi_{n+2}^2 - \Phi_{n+3}\Phi_{n+1} = \Phi_{n+2}^2 - (\Phi_{n+2} + \Phi_{n+1})\Phi_{n+1} = \Phi_{n+2}(\Phi_{n+2} - \Phi_{n+1}) - \Phi_{n+1}^2 \underbrace{=}_{\substack{car\ \Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n \\ donc\ \Phi_{n+2} - \Phi_{n+1} = \Phi_n}} \Phi_{n+2}(\Phi_n) - \Phi_{n+1}^2 = -v_n$.

La suite v est donc géométrique de raison (-1) et par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n$ $i.e.$ $\Phi_{n+1}^2 - \Phi_{n+2}\Phi_n = (-1)^n$.

3) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Posons $H(p) : \Phi_{n+p} = \Phi_{n+1}\Phi_p + \Phi_n\Phi_{p-1}$ $tel\ que$ $p \in \mathbb{N}^*$.

Une récurrence se fait sur un seul entier, ici p. L'autre entier est soit fixé avant , soit la propriété $H(p)$ de récurrence contient « $\forall n$ ». Attention, $H(p)$ ne contient pas « $\forall p$ ».

Initialisation : $\Phi_{n+1} = \Phi_{n+1} \times 1 + \Phi_n \times 0 = \Phi_{n+1}\Phi_1 + \Phi_n\Phi_0$. Donc $H(1)$ est vraie.

$\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n = \Phi_{n+1} \times 1 + \Phi_n \times 1 = \Phi_{n+1}\Phi_2 + \Phi_n\Phi_1$. Donc $H(2)$ est vraie.

Propagation : Soit p un entier naturel non nul. Je suppose $H(p)$ et $H(p+1)$ vraies. Sous cette hypothèse, je vais prouver que $H(p+2)$) est vraie .

$\Phi_{n+p+2} = \Phi_{n+p+1} + \Phi_{n+p} \underbrace{=}_{\substack{en\ appliquant \\ H(p)\ \text{et}\ H(p+1)}} (\Phi_{n+1}\Phi_{p+1} + \Phi_n\Phi_p) + (\Phi_{n+1}\Phi_p + \Phi_n\Phi_{p-1}) = \Phi_{n+1}(\Phi_{p+1} + \Phi_p) + \Phi_n(\Phi_p + \Phi_{p-1}) = \Phi_{n+1}\Phi_{p+2} + \Phi_n\Phi_{p+1}$ **c'est gagné !**

Conclusion : le théorème de récureence double assure que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \Phi_{n+p} = \Phi_{n+1}\Phi_p + \Phi_n\Phi_{p-1}$. n étant quelconque dans $\mathbb{N}$, nous pouvons affirmer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \Phi_{n+p} = \Phi_{n+1}\Phi_p + \Phi_n\Phi_{p-1}$.