

TD 8 Calcul intégral

Ex 1 A. Calculer les intégrales I ou primitives F suivantes : $\alpha \in \mathbb{R}$, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $x \in \mathbb{R}$.

1. $I = \int_{\ln(4)}^{\ln(2)} (3e^{-\frac{x}{4}} + 1)^2 dx$
2. $I = \int_1^2 e^u \left(\frac{1}{u} + \ln(u) \right) du$
3. $I_\alpha = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^\alpha(x)}$
4. $I = \int_{e^3}^{e^2} \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$
5. $I = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{4}x \right)^3 dx$
6. $F(x) = \int^x \sqrt{\theta} + \frac{1}{\sqrt{\theta}} d\theta$
7. $I_{(x)} = \int_{2x}^x t^{x^2} e^x dt$
8. $I = \int_0^1 t e^{3t^2} dt$
9. $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{Arccsin}(x)} dx$
10. $F(t) = \int^t \frac{5}{\cos^2(3z)} dz$
11. $I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos^5 y + 4\cos^3 y - 7) \sin(y) dy$
12. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin(t))^5 dt$
13. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(3t))^2 dt$
14. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(2x) \sin^6(2x) dx$
15. $I = \int_0^\pi \sin(nt) \sin(mt) dt$
16. $I = \int_\pi^{2\pi/3} \frac{\sin t}{\sqrt{\cos(2t)+1}} dt$
17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t) \tan(t) dt$
18. $F(x) = \int^x \operatorname{ch}(3t) \operatorname{sh}(t) dt$
19. $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2} dt$
20. $I = \int_0^1 e^t \sin(e^t) dt$
21. $I(x) = \int^x x \operatorname{sh}(tx) dt$
22. $I = \int_0^1 e^{2t} \operatorname{sh}(t) dt$
23. $I = \int_0^1 \frac{1}{1-it} dt$
24. $F(x) = \int^x \frac{\ln(t)}{t(1+\ln(t^2))} dt$

B. Idem. On pourra utiliser la parité de l'intégrande et/ou simplifier son expression sur l'intervalle d'intégration.

25. $I = \int_{-1}^1 e^{-|u|} du$
26. $I = \int_{4/e}^{2/e} \frac{|y|}{y} dy$
27. $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{\ln(3 + \cos(\tan(x)))} dx$

Ex 2 Calculer les intégrales suivantes en appliquant le théorème d'intégration par parties ou passage en cppe (ou rien ?)

1. $I = \int_0^1 (5u^2 + 3) \operatorname{ch}(2u) du$
2. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (5t - 1) \sin^3(2t) dt$
3. $I = \int_1^2 \ln^2(y) dy$
4. $I = \int_0^\pi \cos(2t) e^{-t} dt$
5. $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} (2t^3 \operatorname{Arctan}(t)) dt$
6. $I = \int_2^1 t^2 \ln(4t) dt$
7. $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (3t - t^3) \sin(4t) dt$
8. $I = \int_0^{\pi/4\pi} e^t (\sin(t) - \cos(t)) dt$
9. $F(y) = \int^y \operatorname{Arccos}(t) dt$
10. $I = \int_0^\pi t \sin(t) e^t dt$
11. $I = \int_0^1 a^3 e^{-a^2/2} da$
12. $I = \int_1^2 \cos(\ln(t)) dt$
13. $I = \int_1^2 \frac{\omega \ln(\omega)}{(1+\omega^2)^2} d\omega$ (on écrira $\frac{1}{\omega(1+\omega^2)} = \frac{a}{\omega} + \frac{b\omega+c}{1+\omega^2}$ où a, b, c cstes)

Ex 3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^2 \frac{3}{1-4t} dt$
2. $I = \int_{-4}^{-2} \frac{1-x}{3x-2} dx$
3. $I = \int_0^{-1} \frac{4}{(1-2x)^2} dx$
4. $I = \int_0^1 \frac{x^6-1}{1+2x} dx$
5. $I = \int_{-2}^{-3} \frac{1}{t(t^2-1)} dt$
6. $F(x) = \int^x \frac{4t-5}{(t+1)(t+2)} dt$
7. $I = \int_{-1}^0 \frac{t^3}{5+3t^2} dt$
8. $I = \int_{-5/\sqrt{3}}^0 \frac{1}{25+9t^2} dt$
9. $I = \int_1^0 \frac{x^3}{x^2+1} dx$
10. $I = \int_1^0 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$
11. $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$
12. $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$
13. $I = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{t^2}{1+4t^2} dt$
14. $I = \int_{-\frac{1}{4}}^0 \frac{t^2+t}{1-4t^2} dt$
15. $I = \int_0^{-1} \frac{1}{2+t+t^2} dt$
16. $I = \int_0^1 \frac{2t-1}{2-t+t^2} dt$
17. $I = \int_0^1 \frac{t^2-3t}{2t^2+t+1} dt$
18. $I = \int_0^1 \frac{2t^3+3t+4}{t^2-t+1} dt$

Ex 4 Calculer à l'aide de changements de variables les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(t) dt$ (CV : $x = \tan(t)$)
2. $I = \int_3^4 \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ (CV : $t = 1 + x^2$)
3. $I = \int_{1/2}^0 e^{\sqrt{u}} du$ (CV : $x = \sqrt{u}$)
4. $I = \int_0^1 x^2 \operatorname{Arccos}(x) dx$
5. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)}$ (CV : $t = \cos(x)$)
6. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin(x)}$ (CV : $t = \tan(\frac{x}{2})$)
7. $I = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2(x)}$ (CV : $t = \tan(x)$)
8. $I = \int_1^2 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1} dt$
9. $I = \int_{1/2}^0 \frac{1+t}{\sqrt{1-t}} dt$ (CV : $t = \cos^2(x)$)
10. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\operatorname{ch}(x)}$
11. $I = \int_{1/2}^0 \frac{\sqrt{1+t}}{1-t} dt$ (CV : $t = \cos^2(x)$)
12. $F(y) = \int_0^y \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$
13. $I_2 = \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x} dx$ (CV : $u = \tan(\frac{x}{2})$)

Ex 5 Calculer à l'aide de changements de variables ou pas les intégrales ou primitives suivantes :

1. $I = \int_0^1 \frac{2t+1}{\sqrt{t^2+t+1}} dt$
2. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-3x}} dx$
3. $I = \int_0^{-1} (1-2\alpha)^{\frac{4}{7}} d\alpha$
4. $I = \int_0^{1/2} \frac{t-3}{\sqrt{1-t^2}} dt$
5. $I = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt$
6. $I = \int_1^2 \frac{1-5x}{\sqrt{2x-1}} dx$
7. $I = \int_1^0 t \sqrt{1-t} dt$
8. $I = \int_0^1 (1+3t)^{\frac{8}{3}} \sqrt{3-2t} dt$
9. $I = \int_1^0 t \sqrt{1-t^2} dt$
10. $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt$
11. $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ (CV : $t = \cos(x)$)
12. $I = \int_1^2 \sqrt{t^2-1} dt$ (CV : $t = \operatorname{ch}(x)$)
13. $I = \int_0^{-1} \sqrt{4t^2+9} dt$ (CV : $t = ?$)
14. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4t^2} dt$
15. $I = \int_0^1 \sqrt{t^2-t+1} dt$
16. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \sqrt{1-t^2} dt$

17. Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$. On fera pour cela un bon changement de variable aboutissant à intégrer $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.
18. Calculer $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{-x-x^2} dx$. On fera pour cela un bon changement de variable aboutissant à intégrer $\sqrt{1-u^2}$.
19. Calculer $I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$ où a, b réels tels que $a < b$. On pourra effectuer le CV : $u = x - \frac{a+b}{2}$.

Ex 6 Trouver une primitive des fonctions f suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $f: (x \mapsto \sqrt{x^2 - x})$ | 6. $f: (x \mapsto x \operatorname{Arcsin}(x))$ | 11. $f: (x \mapsto \frac{\ln(x)}{2x})$ |
| 2. $f: (x \mapsto \frac{1+x}{(3+2x+x^2)^{2017}})$ | 7. $f: (x \mapsto x \cos(2x) e^{-x})$ | 12. $f: (x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^3})$ |
| 3. $f: (x \mapsto \frac{x}{1+x})$ | 8. $f: (x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln(x))^2})$ | 13. $f: (x \mapsto e^{(x+e^x)})$ |
| 4. $f: (x \mapsto \frac{x^5-2x^2+6}{2-x})$ | 9. $f: (y \mapsto \frac{1}{\cos(y)})$ | 14. $f: (r \mapsto \frac{r}{r^2+6r-7})$ |
| 5. $f: (t \mapsto \frac{t^4-t+1}{2+t+t^2})$ | 10. $f: (x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}})$ | 15. $f: (x \mapsto 2^x)$ |

Ex 7 PELE-MELE 0) Calculer $I = \int_0^1 e^{\operatorname{Arccos}(x)} dx$.

- 1) Soit $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \sin(2x)}$. Montrer que $I = \int_0^{1/2} \frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$. En déduire la valeur de I .
- 2) Montrer que $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\frac{\pi}{4}-x)) dx$. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx$
- 3) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que : $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$. Calculer $I = \int_a^b x f(x) dx$ en fonction de $J = \int_a^b f(x) dx$. Application : Calculer $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ (CV: $u = ?$ ou forme connue $\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$).
- 4) Déterminer une primitive de $f: (x \mapsto \cos(x) \ln(1 + \cos(x)))$ sur $]-\pi, \pi[$. On pourra faire une IPP.
- 5) Soit $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2}) \operatorname{Arctan}(x) dx$. Montrer, en effectuant le CV $u = \frac{1}{x}$, que : $I = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1+u^2}{u^2} du - I$. En déduire I .
- 6) Déterminer toutes les primitives de $f: (x \mapsto \frac{1}{2+\sin^2(x)})$. On pourra effectuer le CV : $u = \tan(x)$.
- 7) Soit $I = \int_{-1}^{-2} \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} dr$. Montrer que $I = \int_{\ln(\sqrt{2}-1)}^{\ln(\sqrt{5}-2)} \frac{\operatorname{ch}^2(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{5}-2} 1 - \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u-1} - \frac{2}{u+1} du$. En déduire I .

Ex 8 Justifier que :

- Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire alors pour tout réel a , $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$
- Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire alors pour tout réel a , $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$
- Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique alors pour tous réels a et b , $\int_a^{b+T} f(t) dt = \int_{a+T}^{b+2T} f(t) dt$ et $\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$

Ex 9 Trouver des relations de récurrence en appliquant le théorème d'intégration par parties :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. Etablir une relation entre I_n et I_{n+1} . En déduire $I = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^4} dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$. **INTEGRALE DE WALLIS**
 - Montrer que: $(n+2)J_{n+2} = (n+1)J_n$. En déduire une expression de J_n à l'aide de factorielles.
 - Montrer que (J_n) est convergente.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
 - Déterminer une expression de I_n à l'aide de la formule du binôme.
 - Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} . En déduire une autre expression de I_n .
 - Donner alors une formule sommatoire.
 - Montrer que (I_n) est convergente.

Ex 10 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x e^{-t^2} dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} \int_1^x e^{-t^2} dt$.

- $F: (x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{1+5t^2} - \frac{x^2}{1+t^9} dt)$ est une primitive de quelle fonction ?
- $F: (x \mapsto x \int_1^x e^{-t^2} dt)$ est une primitive de quelle fonction ?

Ex 11 Fonction définie par une intégrale Soit $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)}$ et $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

- Déterminer le domaine de définition et celui de continuité de φ .
- Monter que $\forall x \in]0, 1[, f(x)$ existe. Monter que $\forall x \in]1, +\infty[, f(x)$ existe. Ainsi, $D_f = D\varphi =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
- Justifier que φ admet une primitive G sur l'intervalle $]0, 1[$ et une primitive H sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

4. Soit $x \in]0,1[$. Exprimer $f(x)$ à l'aide de G, x et x^2 . En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de φ, x et x^2 . En déduire les variations de f sur $]0,1[$.
5. Faire de même sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
6. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en 0.
7. Soit $x \in]1, +\infty[$. Montrer que : $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$. En déduire les limites de f en $+\infty$.
8. Soit $x \in]1, +\infty[$. Montrer que $\forall t \in [x, x^2], 0 < \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$. En déduire la limite de f en 1^+ .
9. Faire de même en 1^- et conclure.