

# Calcul intégral- Recherche de primitive.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs complexes. Soit  $a \in D$ .

- $\forall x \in D, f(x) = Re(f(x)) + iIm(f(x))$ . On définit  $Re(f) : (x \mapsto Re(f(x)))$  et  $Im(f) : (x \mapsto Im(f(x)))$  les fonctions partie réelle et partie imaginaire de  $f$ . Ce sont deux fonctions définies sur  $D$  et à valeurs réelles.
- Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs complexes. Soit  $L$  un complexe et  $a$  un point ou un bord de  $D$  non isolé.
- $f$  est bornée sur  $D$  lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que :  $\forall x \in D, |f(x)| \leq M$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} Re(f)(x) = Re(L)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} Im(f)(x) = Im(L)$ .
- $f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $D$ ) lorsque  $Re(f)$  et  $Im(f)$  sont continues en  $a$  (resp. sur  $D$ ).
- $f$  est dérivable en  $a$  (resp. sur  $D$ ) lorsque  $Re(f)$  et  $Im(f)$  sont dérivables en  $a$  (resp. sur  $D$ ) et  $f' = (Re f)' + i(Im f)'$ . Autrement dit,  $\forall x \in D, Re(f'(x)) = (Re f)'(x)$  et  $Im(f'(x)) = (Im f)'(x)$ .
- Une primitive de  $f$  sur  $D$  est toute fonction  $F$  dérivable sur  $D$  telle que  $\forall x \in D, F'(x) = f(x)$ ; autrement dit lorsque sur  $D$ ,  $Re(F)$  est une primitive de  $Re(f)$  et  $Im(F)$  est une primitive de  $Im(f)$ .

**Exemples à connaître :**

- Soit  $a$  un complexe et  $f : (t \mapsto e^{at})$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = ae^{at}$  et si  $a \neq 0$  alors  $F : (t \mapsto \frac{1}{a}e^{at})$  est une primitive de  $f$ .
- Soit  $\varphi$  une fonction dérivable sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et  $f : (t \mapsto e^{\varphi(t)})$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $D$  et  $\forall t \in D, f'(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$ .

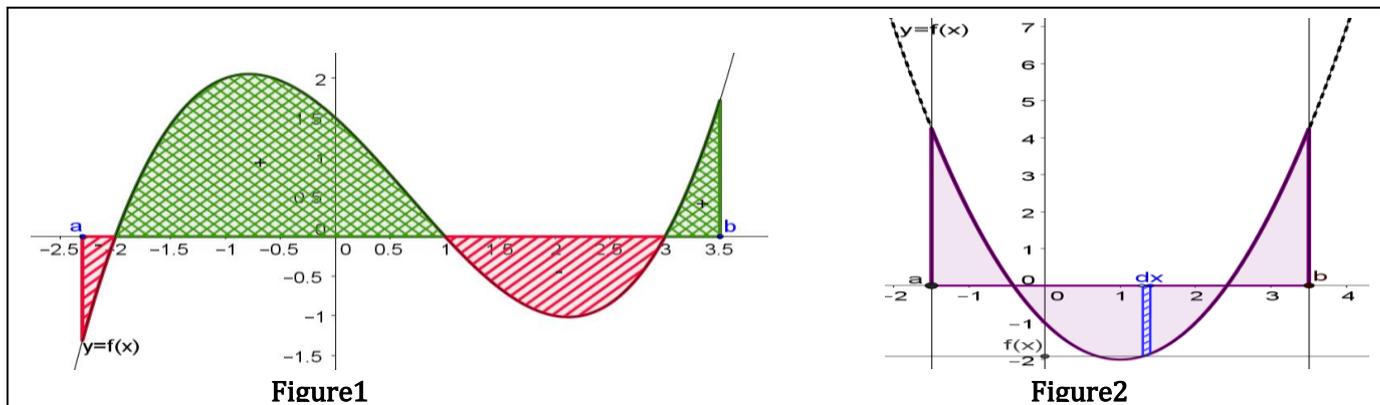
## I Généralités (Rappels)

**Définition :** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . L'intégrale d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  est l'aire algébrique (\*) de la surface délimitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses, les droites verticales d'équation  $x = a$  et  $x = b$ . Cette aire est notée  $\int_a^b f(t)dt$  ou  $\int_{[a,b]} f$ . (fig1)

La fonction que l'on intègre s'appelle l'intégrande.

**NB :** 1) L'aire géométrique de la même surface est  $\int_a^b |f(t)|dt$ .  
 2) L'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  ne dépend pas de  $t$ ,  $\int_a^b f(t)dt$  dépend de  $f$  de  $a$  et de  $b$ . La variable  $t$  est dite muette,  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\theta)d\theta$ . Cette intégrale dépend de l'expression de  $f$ , de  $a$  et de  $b$ .

2) D'où vient cette notation (fig2):  $dx$  signifie une petite variation de  $x$  (ici sur l'axe des abscisses).



Comme  $f$  est continue,  $f$  varie peu lorsque  $x$  varie peu. On peut donc approximer  $f$  par  $f(x)$  lors de la variation  $dx$  de  $x$  et ainsi  $f(x)dx$  est l'aire algébrique hachurée. On va sommer ces aires algébriques pour obtenir l'aire globale : la somme est indiquée par  $\int_a^b$  qui signifie que l'on fait la somme de toutes ces petites aires quand  $x$  varie de manière continue de  $a$  à  $b$  (on ne peut pas utiliser simplement le signe  $\sum$  puisqu'il indique une somme sur des entiers donc « discontinue » mais on pourra utiliser  $\lim \sum C_f$  sommes de Riemann).

6 **Définition** : Soit  $a$  et  $b$  deux réels. L'intégrale d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continue sur  $[a, b]$  est l'aire :  

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t)dt .$$
 Alors  $\operatorname{Re} \left( \int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t)dt$  et  $\operatorname{Im} \left( \int_a^b f(t)dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t)dt .$

7 **Par convention**,  $\int_a^a f(t)dt = 0$  et  $\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt$  pour tous  $a$  et  $b$  réels tels que  $a < b$ .

8 **CONSEQUENCE** : Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et à valeurs réelles ou complexes alors pour tout  $(a, b) \in I^2$ ,  $\int_a^b f(t)dt$  existe .

9 **Définition** : Si  $f$  est continue sur  $]a, b]$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  finie (i.e.  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$ ) alors  $\tilde{f} : (x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in ]a, b] \\ L & \text{si } x = a \end{cases})$  est continue sur  $[a, b]$  et par définition,  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$  . Idem en  $b^-$ .

10 **Théorème Relation de Chasles** : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  . Soit  $a, b, c$  trois réels de  $I$ .  

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

11 **Théorème Linéarité de l'opérateur intégral** : Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  . Soit  $a, b$  deux réels de  $I$  . Soit  $\alpha$  une constante (réelle ou cpxe) .  

$$\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$
 et  $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$   
 On peut résumer ces deux propriétés en une seule : soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes réelles ou complexes), alors  

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

12 **Théorème Positivité de l'opérateur intégral** : Si  $a, b$  sont deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  est continue et positive sur  $[a, b]$  alors  $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \geq 0$  .

13 **Théorème Croissance de l'opérateur intégral** : Si  $a, b$  sont deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a, b]$  et  $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$  alors  $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt = \int_{[a,b]} g(t)dt$

## II Propriétés utiles au calcul intégral et à la recherche de primitive

14 **♥♥Théorème fondamental de l'intégration** :

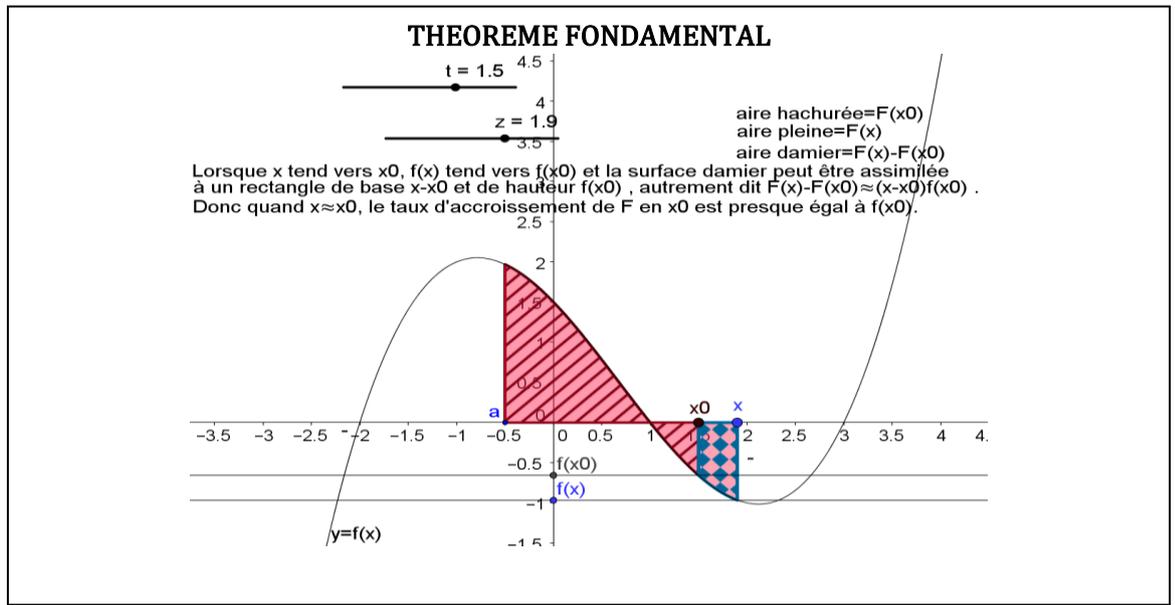
1. Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$  . L'application  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , est une primitive de  $f$  sur  $I$  et est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .
2. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

**Notation** : on pourra noter  $H(x) = \int_a^x f(t)dt$  une primitive quelconque de  $f$ .

15 **NB** :

- Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$  alors les primitives de  $f$  sur  $I$  sont de la forme  $F + cste$  (réelle si  $f$  est réelle et complexe si  $f$  est complexe .
- Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur les intervalles disjoints  $I$  et  $J$  alors les primitives de  $f$  sur  $I \cup J$  sont de la forme  $F + cste_1$  sur  $I$  et  $F + cste_2$  sur  $J$  .
- Si  $F$  est une primitive de  $f$  et  $G$  est une primitive de  $g$  sur un même intervalle  $I$  et  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes alors  $\alpha F + \beta G$  est une primitive de  $\alpha f + \beta g$  sur un intervalle  $I$ .

16 Illustration :



17 **Théorème :** Soit  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et  $(a, b) \in I^2$ .

Pour tout primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$ , on a :  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$  notation  $\hat{=} [F(t)]_a^b$ .

18 **Exemple :** Soit  $\beta$  un réel. Calculons  $I = \int_{e^2}^e \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta}$ . Soit  $f$  définie par :  $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ .  $\forall t \in [e, e^2]$ ,  $\ln(t) \geq 1$  donc,  $f$  est définie et continue sur  $[e, e^2]$  et  $I$  existe bien. On a alors :

$$\int_{e^2}^e \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} = \int_{e^2}^e \frac{1}{t} \frac{(\ln(t))^{-\beta}}{u(t)^\alpha} dt \quad \hat{=} \quad \begin{cases} \left[ \frac{1}{1-\beta} (\ln(t))^{1-\beta} \right]_{e^2}^e & \text{si } \beta \neq 1 \\ \left[ \ln(\ln(t)) \right]_{e^2}^e & \text{si } \beta = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} (1 - 2^{1-\beta}) & \text{si } \beta \neq 1 \\ -\ln(2) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

$u'(t) = \frac{1}{t}$   
 avec  $\alpha = -\beta$   
 et  $u(t) = \ln(t)$   
 $\frac{1}{\alpha+1} u(t)^{\alpha+1}$  si  $\alpha \neq -1$   
 $\ln|u(t)|$  si  $\alpha = -1$

**Théorème d'intégration par parties (IPP) :** Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  et  $(a, b) \in I^2$ . Alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

19 **NB :**  $u$  et  $v$  jouent le même rôle : on a aussi  $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$ .

20 **Exemple :** Calculons  $I = \int_0^\pi t^2 \sin(t)dt$ . Soit  $f$  définie par :  $f(t) = t^2 \sin(t)$ .  $f$  est continue sur  $[0, \pi]$  donc  $I$  existe. Et,

$$I = \int_0^\pi \frac{t^2}{u(t)} \frac{\sin(t)}{v'(t)} dt \quad \hat{=} \quad \left[ \frac{t^2 (-\cos(t))}{u(t) v(t)} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2t (-\cos(t))}{u'(t) v(t)} dt = \pi^2 + 2 \int_0^\pi \frac{t \cos(t)}{J} dt$$

$u(t)=t, v(t)=-\cos(t)$   
 $u'(t)=1, v'(t)=\sin(t)$

$$\text{De même, } J = \int_0^\pi \frac{t \cos(t)}{\alpha(t) \beta'(t)} dt \quad \hat{=} \quad \left[ \frac{t \sin(t)}{\alpha(t) \beta(t)} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1 \sin(t)}{\alpha'(t) \beta(t)} dt = - \int_0^\pi \sin(t) dt. \text{ Donc, } J = [\cos(t)]_0^\pi = (-1 - 1) = -2$$

$\alpha(t)=t, \beta(t)=\sin(t)$   
 $\alpha'(t)=1, \beta'(t)=\cos(t)$

et  $I = \pi^2 - 4$ . « Contrôle qualité » :  $\forall t \in [0, \pi], t^2 \sin(t) \geq 0$  donc par la propriété de positivité,  $I \geq 0$  OK !! ....

21 **Application à la recherche d'une primitive de  $\ln$  :**  $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Donc,  $F: (x \mapsto \int_1^x \ln(t) dt)$  est une primitive de  $\ln$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ . Calculons  $F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$  (pour obtenir une expression de  $F$  sans intégrale) et pour cela, appliquons le TIPP avec  $u(t) = \ln(t)$  et  $v(t) = t$ .  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) dt = \int_1^x 1 \times \ln(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} [t \times \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - \int_1^x 1 dt = x \ln(x) - [t]_1^x$$

$F(x) = x \ln(x) - x + 1$ . Ainsi,  $H: (x \mapsto x \ln(x) - x + 1)$  est une primitive de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Donc  $G = F - 1$  est aussi une primitive de  $\ln$ . Ainsi,  $G: (x \mapsto x \ln(x) - x)$  est une primitive de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**Vérification :**  $G'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$  OK !!

22

**♥Théorème de changement de variables (CV) :**  
 Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $J$  et  $\varphi$  une fonction réelle de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  telles que :  $\varphi(I) \subset J$ . Soit  $(a, b) \in I^2$ . Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

$x = \varphi(t)$   
 $dx = \varphi'(t)dt$   
 $t = a \Rightarrow x = \varphi(a)$   
 $t = b \Rightarrow x = \varphi(b)$

23

**NB :** souvent  $\varphi$  est bijective et  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$

$$\begin{aligned}
 &x = \varphi(t) \text{ et } t = \varphi^{-1}(x) \\
 &dx = \varphi'(t)dt \text{ et } dt = (\varphi^{-1})'(x)dx \\
 &x = \alpha \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(\alpha) \\
 &x = \beta \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(\beta)
 \end{aligned}$$

24

**Exemple:** Calculons  $I = \int_0^1 \frac{dx}{ch(x)}$  en effectuant le changement de variable  $t = e^x$ .

Soit  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{ch(x)}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 1$  donc  $ch(x) \neq 0$ . Donc  $f$  est continue sur  $[0,1]$  et  $I$  existe . Alors,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{ch(x)} = \int_0^1 \frac{2dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = 2 \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1} \stackrel{CV}{=} 2 \int_1^e \frac{dt}{t^2 + 1} = 2[Arctan(t)]_1^e = 2Arctan(e) - \frac{\pi}{2} .$$

$$\begin{aligned}
 &x = \ln(t) \text{ et } t = e^x \\
 &dx = \frac{1}{t}dt \text{ et } dt = e^x dx \\
 &x = 0 \Leftrightarrow t = 1 \\
 &x = 1 \Leftrightarrow t = e
 \end{aligned}$$

25

**Application à la recherche d' une primitive de  $(x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2})$  ,  $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}})$  ,  $(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}})$  tel que  $a > 0$**

$\forall x, \int \frac{1}{t^2+a^2} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(\frac{t}{a})^2 + 1} dt \stackrel{u=\frac{t}{a}}{=} \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{u^2+1} adu = \frac{1}{a} Arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cste$  . Avec le même principe :  $\forall x \in ]-a, a[$ ,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}} dt = \int \frac{1}{a\sqrt{1-(\frac{t}{a})^2}} dt \stackrel{u=\frac{t}{a}}{=} \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} adu = Arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + cste .$$

$$\text{Et } \forall x, \int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}} dt = \int \frac{1}{a\sqrt{1+(\frac{t}{a})^2}} dt \stackrel{u=\frac{t}{a}}{=} \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} adu = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + cste$$

$$\forall x \in [-1; 1], \int \sqrt{1-u^2} du \stackrel{u=\sin(\theta)}{=} \int_{Arcsin(x)}^{Arcsin(x)} \sqrt{1-(\sin\theta)^2} \cos(\theta) d\theta = \int_{Arcsin(x)}^{Arcsin(x)} \sqrt{\cos^2\theta} \cos(\theta) d\theta =$$

$$\int_{Arcsin(x)}^{Arcsin(x)} \cos^2(\theta)d\theta = \int_{Arcsin(x)}^{Arcsin(x)} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta \right]_{Arcsin(x)}^{Arcsin(x)} = \frac{\sin(2Arcsin(x))}{4} + \frac{Arcsin(x)}{2} + cste = \frac{x\sqrt{1-x^2} + Arcsin(x)}{2} + cste$$

$$\text{Alors, } \forall x \in [-a; a], \int \sqrt{a^2-t^2} dt = a \int \sqrt{1-(\frac{t}{a})^2} dt \stackrel{u=\frac{t}{a}}{=} a^2 \int_0^{\frac{x}{a}} \sqrt{1-u^2} du = \frac{x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 Arcsin(\frac{x}{a})}{2} + cste .$$

### III Méthodes de calcul intégral

Nous cherchons à calculer  $I = \int_a^b f(t)dt$

26

**A. Justifier que  $I$  existe ...**

- Si  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  alors  $I$  existe.
- Si  $f$  est continue sur le segment  $]a, b]$  et  $f$  a une limite finie en  $a$  alors  $I$  existe.
- Si  $f$  est continue sur le segment  $]a, b[$  et  $f$  a une limite finie en  $a$  et une limite finie en  $b$  alors  $I$  existe.

27 B. Observer la forme de  $f$  et travailler en conséquence ....

**FORME SIMPLE QUE L'ON PEUT INTEGRER DIRECTEMENT :**

28

Expression de $f$	Une Primitive usuelle de $f$	Exemple
$\exp(ax + b)$	$\frac{1}{a} \exp(ax + b)$	
$\exp((ai + b)x)$	$\frac{1}{ai + b} \exp((ai + b)x)$	
$\frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{a} \ln( ax + b )$	
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	
$\text{ch}(ax + b)$	$\frac{1}{a} \text{sh}(ax + b)$	
$\text{sh}(ax + b)$	$\frac{1}{a} \text{ch}(ax + b)$	
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$	
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	
$1 + \tan^2 x \quad (= \frac{1}{\cos^2(x)})$	$\tan(x)$	
$x^\alpha$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln( x ) & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$	
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\text{Arctan}(x)$	
$u'(x)u(x)^\alpha$ tq $\alpha \neq -1$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$(x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{2})$ est une primitive de $(x \mapsto \frac{\ln(x)}{x})$ sur $\mathbb{R}^{++}$
$\frac{u'(x)}{u(x)^\alpha} = u'(x)u(x)^{-\alpha}$ tq $\alpha \neq 1$	$\frac{u(x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$	$(x \mapsto \frac{1}{3(1+\text{ch}(3x))})$ est une primitive de $(x \mapsto \frac{\text{sh}(3x)}{(1+\text{ch}(3x))^2})$ sur $\mathbb{R}$ .
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln( u(x) )$	$-\ln \cos $ est une primitive de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	$(x \mapsto \cos(x) e^{\sin(x)})$ est une primitive de $e^{\sin}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	
$u'(x)\text{sh}(u(x))$	$\text{ch}(u(x))$	
$u'(x)\text{ch}(u(x))$	$\text{sh}(u(x))$	
$u'(x)\text{sh}(u(x))$	$\text{sh}(u(x))$	
$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$	$\tan(u(x))$	
$u'(ax + b)$	$\frac{u(ax + b)}{a}$	
$u'(x) \times v'(u(x))$	$v(u(x))$	

29 **FORME PLUS COMPLIQUEE POUR LAQUELLE ON DOIT TRAVAILLER :**

- Transformer l'expression
- Faire une ou des IPP
- Faire un changement de variables ....

$f(x)$	Méthode pour intégrer $f$	Exemple
$\sin^2(px)$ ou $\cos^2(px)$ $p$ réel	<b>OBJECTIF : faire apparaître des termes de la forme <math>\cos(mx)</math>.</b> Pour cela : <b>Linéariser</b> avec la formule de trigo : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$	$\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$
$\cos(px) \cos(mx)$ $p, m$ réels	<b>OBJECTIF : faire apparaître une somme de termes de la forme <math>\cos(mx)</math>.</b> Pour cela : <b>Linéariser</b> avec la formule de trigo : $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$	$\int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx$ $\text{tq } (p, q) \in \mathbb{N}^2$
$\sin(px) \sin(mx)$ $p, m$ réels	<b>OBJECTIF : faire apparaître une somme des termes de la forme <math>\cos(x)</math>.</b> Pour cela : <b>Linéariser</b> avec la formule de trigo : $\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$	
$\sin(px) \cos(mx)$ $p, m$ réels	<b>OBJECTIF : faire apparaître une somme des termes de la forme <math>\sin(mx)</math>.</b> Pour cela : <b>Linéariser</b> avec la formule de trigo : $\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$	
$\cos^k(px) \sin^l(px)$ Avec $p$ réel $k$ et $l$ entiers naturels et $k = 2n + 1$ impair (ou $l$ impair)	<b>OBJECTIF : faire apparaître une somme de termes de la forme <math>u'(x)u(x)^d</math>.</b> Pour cela : <b>Ecrire</b> $\cos^{2n+1}(px) = (\cos^2(px))^n \cos(px)$ <b>Utiliser la formule de trigo</b> $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ : $f(x) = \sin^l(px) (1 - \sin^2(px))^n \cos(px)$ <b>Développer avec la FBN</b> et reconnaître une somme de termes de la forme $u'(x)u(x)^d$ Si $l = 2n + 1$ alors idem en échangeant sin et cos.	$\int_0^x \sin^5(t) dt$
$\cos^k(px) \sin^l(mx)$ avec $p, m$ réels $k$ et $l$ entiers naturels	<b>OBJECTIF : faire apparaître une somme de termes de la forme <math>\cos(dx)</math> ou <math>\sin(dx)</math>.</b> <b>Linéariser</b> avec les formules Euler et binôme de Newton : $\cos^k(px) \sin^l(mx) = \left(\frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2}\right)^k \left(\frac{e^{ipx} - e^{-ipx}}{2i}\right)^l = \dots$ Développer dans chaque parenthèse avec la formule du binôme de Newton Développer le produit des deux parenthèses Regrouper les exponentielles imaginaires deux à deux conjuguées	
$ch^k(px) sh^l(mx)$ $p, m$ réels avec $k$ ou $l$ entiers naturels	<b>OBJECTIF : faire apparaître une somme de termes de la forme <math>e^{dx}</math>.</b> Pour cela : <b>remplacer <math>ch</math> et <math>sh</math> par leur expression en fonction d'exponentielles réelles</b> et tout développer. (on peut si $k$ ou $l$ impairs appliquer la même méthode qu'au 5)	$\int_0^1 ch(3x)sh^2(x)e^{-x} dx$
$P(x)\ln(x)$ $P(x) \text{ Arctan}(mx)$ $P(x) \text{ Arcsin}(mx), P(x) \text{ Arccos}(mx)$ ( $P$ polynomiale, $m$ réel)	<b>OBJECTIF : faire apparaître une fraction que l'on sait intégrer .</b> Pour cela : <b>IPP en intégrant <math>P(x)</math> et dérivant l'autre facteur</b> $\ln(x)$ , $\text{Arctan}(x)$ ou $\text{Arcsin}(x)$ I.e : $u'(x) = P(x)$ et $v(x) = \ln(x)$	$\int_e^{\frac{1}{e}} (1 - 3x^2)\ln^2(x) dx$
$P(x)e^{mx}$ $P(x)\cos(mx)$ , $P(x)\sin(mx)$ $P(x)ch(mx)$ , $P(x)sh(mx)$ ( $m$ réel, $P$ polynomiale)	<b>OBJECTIF : faire baisser le degré du polynôme jusqu'à obtenir une constante.</b> <b>Des IPP en dérivant <math>P(x)</math> et intégrant l'autre facteur</b> $\exp(mx)$ , $\cos(mx)$ ou ... Autant d'IPP que le degré de $P$ jusqu'à obtenir un polynôme constant .	$\int_0^1 (2x^2 - x + 3)e^{-2x} dx$
$\sin(px)e^{mx}$ $\cos(px)e^{mx}$	<b>OBJECTIF : obtenir une relation de la forme <math>I = aI + b</math>.</b> Pour cela : <b>Deux IPP</b> en dérivant le $\sin$ (ou $\cos$ ) et en intégrant l'exponentielle Retrouver l'intégrale de départ et résoudre $I = b + aI$ <b>OU</b> <b>OBJECTIF : obtenir une intégrande de la forme <math>e^{(c+id)x}</math>.</b> Pour cela : <b>Passer en complexe</b> $\sin(px)e^{mx} = \text{Im}(e^{(m+ip)x})$ donc une primitive de $\sin(px)e^{mx}$ est $\text{Im}\left(\frac{e^{(m+ip)x}}{m+ip}\right)$ . Il reste à trouver $\text{Im}\left(\frac{e^{(m+ip)x}}{m+ip}\right)$	$\int_0^\pi \sin(4x)e^{-3x} dx$

$\frac{P(x)}{ax+b}$	<b>OBJECTIF : écrire <math>\frac{P(x)}{ax+b}</math> sous la forme <math>\frac{P(x)}{ax+b} = Q(x) + \frac{C}{ax+b}</math> où <math>Q</math> polynomiale. Faire la division euclidienne de <math>P(x)</math> par <math>ax + b</math>. <math>Q</math> est le quotient et <math>c</math> le reste.</b>	$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-2x} dx$
$\frac{1}{x^2+ax+b}$ avec $a^2 - 4b > 0$	<b>OBJECTIF : écrire <math>\frac{1}{x^2+ax+b}</math> sous la forme <math>\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)}</math> (décomposition en éléments simples). Pour cela : Factoriser le dénominateur: <math>x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)</math> Chercher <math>A</math> et <math>B</math> tels que: <math>\forall x \in Df, f(x) = \frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)}</math>. <math>\forall x \in Df, (x - \alpha)f(x) = \frac{1}{x-\beta} = A + \frac{B(x-\alpha)}{(x-\beta)}</math>. Donc, <math>B = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{(x-\beta)} = \frac{1}{(\alpha-\beta)}</math>. De même, pour <math>A</math>.</b>	$\int_{-7}^x \frac{1}{t^2+6t-7} dt$
$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$	<b>OBJECTIF : écrire <math>f</math> sous la forme <math>f(x) = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}</math> (décomposition en éléments simples). Même méthode que précédemment.</b>	
$\frac{1}{x^2+ax+b}$ avec $a^2 - 4b = 0$	<b>OBJECTIF : écrire <math>f</math> sous la forme <math>f(x) = u'(x)u^{-2}(x)</math>. Pour cela : Factoriser le dénominateur : <math>f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^2}</math></b>	$\int_{-1}^x \frac{1}{9t^2+6t+1} dt$
$\frac{1}{x^2+ax+b}$ avec $a^2 - 4b < 0$	<b>OBJECTIF : faire apparaître <math>\frac{1}{1+t^2}</math> à intégrer . Pour cela : Ecrire <math>x^2 + ax + b</math> sous sa forme canonique <math>\alpha\left[\left(\frac{x+\beta}{\gamma}\right)^2 + 1\right]</math> Faire le changement de variable <math>t = \frac{x+\beta}{\gamma}</math></b>	$\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+t+1} dt$
$\frac{cx+d}{x^2+ax+b}$	<b>OBJECTIF : décomposer <math>f(x)</math> sous la forme <math>A \times \frac{2x+a}{x^2+ax+b} + B \times \frac{1}{x^2+ax+b}</math> où <math>A, B</math> sont des constantes. <math>\frac{1}{x^2+ax+b}</math>. Pour cela, une des formes précédentes. Ecrire <math>cx + d = \frac{c}{2}(2x + a) + \left(d - \frac{ac}{2}\right)</math>. Distribuer le dénominateur sur ces deux termes.</b>	$\int_0^1 \frac{1-3t}{t^2+2t+2} dt$
$\frac{P(x)}{x^2+ax+b}$ où $a, b$ réels et $P$ polynomiale	<b>OBJECTIF : décomposer <math>f(x) = Q(x) + A \times \frac{2x+a}{x^2+ax+b} + B \times \frac{1}{x^2+ax+b}</math> où <math>Q</math> polynomiale . Pour cela, Effectuer la division euclidienne de <math>P</math> par <math>Q</math>. Ecrire <math>P(x)</math> sous la forme <math>Q(x)(x^2 + ax + b) + \alpha(2x + a) + \beta</math> où <math>Q</math> polynomiale . Distribuer <math>\frac{1}{x^2+ax+b}</math> sur les trois termes .</b>	$\int_2^1 \frac{t^3+3t-1}{t^2+t} dt$
$\frac{1}{(x^2+1)^n}$ Où $n$ entier naturel supérieur à 2	<b>OBJECTIF : Obtenir une relation entre <math>I_n = \int_w^z \frac{1}{(x^2+1)^n} dx</math> et <math>I_{n-1} = \int_w^z \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx</math> pour obtenir une relation entre <math>I_n</math> et <math>I_1 = \int_w^z \frac{1}{x^2+1} dx</math> Décomposer <math>\frac{(1+x^2)-x^2}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x}{\underbrace{2}_{u(x)}} \times \frac{2x}{\underbrace{(x^2+1)^n}_{v(x)}}</math>. Faire une IPP pour intégrer <math>u(x)v'(x)</math> Faire apparaître une relation <math>I_n = A \times I_{n-1} + B \times I_n</math>. En déduire <math>I_n</math> en fonction de <math>I_{n-1}</math>. Puis <math>I_{n-1}</math> en fonction de <math>I_{n-2}</math> (...)</b>	$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

## EXEMPLES

30

**Méthode pour intégrer les fonctions de la forme  $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ , où  $a, b, c$  réels et  $a$  non nul.**

Posons  $Q(x) = ax^2 + bx + c$

**1<sup>er</sup> cas :  $\Delta_Q = 0$  i.e.  $Q$  est un carré .** Cherchons une primitive de  $f : x \mapsto \frac{1}{9x^2+6x+1}$

$f$  est continue sur  $Df = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$  ; donc sur tout intervalle inclus dans  $Df$ ,  $f$  admet des primitives. Et, sur chacun de ces intervalles, on a :

$$\int \frac{1}{9x^2+6x+1} dx = \int \frac{1}{(3x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{(3x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \frac{-1}{3x+1} + cste.$$

de la forme  $u'(x)u(x)^{-2}$  à un facteur cst près.      je fais apparaître ce facteur et je compense

**2<sup>er</sup> cas :  $\Delta_Q > 0$  i.e.  $Q$  se factorise en deux facteurs de degré 1 à racines réelles distinctes.** Cherchons une primitive de  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+6x-7}$

$f$  est continue sur  $Df = \mathbb{R} \setminus \{-7; 1\}$  ; donc sur tout intervalle inclus dans  $Df$ ,  $f$  admet des primitives.

$\forall x \in Df, \frac{1}{x^2+6x-7} = \frac{1}{(x+7)(x-1)} = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+7)} \right]$ . Donc, sur chaque intervalle inclus dans  $Df$ , les primitives de  $f$  sont les fonctions de la forme  $\left( x \mapsto \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-1}{x+7} \right| + cste \right)$ .

**2<sup>er</sup> cas :  $\Delta_Q < 0$  i.e.  $Q$  n'a pas de racines réelles.** Cherchons les primitives de  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+4}$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue sur  $Df = \mathbb{R}$ ; donc sur tout intervalle,  $f$  admet des primitives et  $F : (x \mapsto \int_0^x \frac{1}{t^2+3t+4} dt)$  est la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0.

$$\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + 3t + 4 = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \left[ \frac{4}{7} \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \right] = \frac{7}{4} \left[ \left(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right].$$

$$\text{Donc, } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \frac{1}{\frac{7}{4} \left[ \left(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right]} dt = \frac{4}{7} \int_0^x \frac{1}{\left(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dt \stackrel{u = \frac{2t+3}{\sqrt{7}}}{=} \frac{4}{7} \int_{\frac{3}{\sqrt{7}}}^{\frac{2x+3}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1} \frac{\sqrt{7}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{7}} \int_{\frac{3}{\sqrt{7}}}^{\frac{2x+3}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2}{\sqrt{7}} \left[ \text{Arctan}(u) \right]_{\frac{3}{\sqrt{7}}}^{\frac{2x+3}{\sqrt{7}}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan} \left( \frac{2x+3}{\sqrt{7}} \right) + cste.$$

Les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont alors toutes les fonctions de la forme  $\left( x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan} \left( \frac{2x+3}{\sqrt{7}} \right) + c \right)$  tq  $c$  cste réelle.

31

**Méthode pour intégrer les fonctions de la forme  $f(x) = \frac{ux+v}{ax^2+bx+c}$ , où  $a, b, c, u, v$  réels et  $a$  et  $u$  non nuls.**

Posons  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ . Quel soit le signe de  $\Delta_Q$ , on commence par faire transformer :  $ux + v = Q'(x) + w$ . Ensuite, on utilise la méthode ci-dessus.

Cherchons les primitives de  $f : x \mapsto \frac{2-5x}{2x^2-x+1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

$\Delta_Q < 0$ . Par conséquent,  $f$  est continue sur  $Df = \mathbb{R}$ ; donc sur tout intervalle,  $f$  admet des primitives et  $F : (x \mapsto \int_0^x \frac{2-5t}{2t^2-t+1} dt)$  est la primitive

de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0.  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2-5t}{2t^2-t+1} = \frac{2-\frac{5}{4}(4t-1)-\frac{5}{4}}{2t^2-t+1} = -\frac{5}{4} \frac{(4t-1)}{2t^2-t+1} + \frac{3}{4} \frac{1}{2t^2-t+1}$ . Donc, puisque  $g$  et  $h$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{5}{4} \int_0^x \frac{(4t-1)}{2t^2-t+1} dt + \frac{3}{4} \int_0^x \frac{1}{2t^2-t+1} dt = -\frac{5}{4} \ln|2x^2 - x + 1| + \frac{3}{4} H(x).$$

Ensuite pour calculer  $H(x)$ , il faut appliquer la méthode illustrée précédemment. Ici,  $\Delta_Q < 0$ .

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2t^2 - t + 1 = 2 \left[ t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right] = 2 \left[ \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right] = 2 \left[ \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \right] = \frac{14}{16} \left[ \left(\frac{4}{\sqrt{7}} \left(t - \frac{1}{4}\right)\right)^2 + 1 \right] = \frac{7}{8} \left[ \left(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1 \right].$$

$$\text{Donc, } H(x) = \int_0^x \frac{1}{2t^2-t+1} dt = \frac{8}{7} \int_0^x \frac{1}{\left(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dt = \frac{8}{7} \int_{\frac{-1}{\sqrt{7}}}^{\frac{4x-1}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1} \frac{\sqrt{7}}{4} du = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan} \left( \frac{4x-1}{\sqrt{7}} \right) + \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = -\frac{5}{4} \ln|2x^2 - x + 1| + \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan} \left( \frac{4x-1}{\sqrt{7}} \right) + \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{7}} \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$$

Les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme :  $\left( x \mapsto -\frac{5}{4} \ln|2x^2 - x + 1| + \frac{3}{2\sqrt{7}} \text{Arctan} \left( \frac{4x-1}{\sqrt{7}} \right) + cste \right)$ .

32

**Méthode pour intégrer les fonctions de la forme  $f(x) = \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}$ , où  $a, b, c$  réels et  $a$  non nul et  $P$  polynomiale de degré supérieur à 2**

Posons  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ . Quel soit le signe de  $\Delta_Q$ , on commence par faire la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ . Ensuite, on utilise les méthodes ci-dessus.

$$\text{Calculons } I = \int_1^{-1} \frac{1-2t^4}{t^2-2t-15} dt.$$

$\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = t^2 - 2t - 15 = (t-5)(t+3)$ . Par conséquent,  $f$  est continue sur  $Df = \mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$  donc sur  $[-1; 1]$ . Ainsi,  $I$  existe.

$$\begin{array}{l} \frac{-2t^4 + 1}{-(-2t^4 + 4t^3 + 30t^2)} \\ \frac{-4t^3 - 30t^2 + 1}{-(-4t^3 + 8t^2 + 60t)} \\ \frac{-38t^2 - 60t + 1}{-(-38t^2 + 76t + 570)} \\ \frac{-136t - 569}{-2t^2 - 4t - 38} \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{t^2 - 2t - 15}{-2t^2 - 4t - 38} \\ \text{Alors, } \forall t \in [-1; 1], f(t) = \frac{1-2t^4}{t^2-2t-15} = \frac{(t^2-2t-15)(-2t^2-4t-38) - 136t - 569}{t^2-2t-15} = -2t^2 - 4t - 38 + \frac{-68(2t-2)-705}{t^2-2t-15} \\ f(t) = -2t^2 - 4t - 38 - 68 \frac{(2t-3)}{t^2-2t-15} - 705 \frac{1}{(t-5)(t+3)} = -2t^2 - 4t - 38 - 68 \frac{(2t-3)}{t^2-2t-15} - \frac{705}{8} \left[ \frac{1}{t-5} - \frac{1}{t+3} \right]. \\ \text{Donc, } I = \left[ -\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 38t - 68 \ln|t^2 - 2t - 15| - \frac{705}{8} \ln \left| \frac{t-5}{t+3} \right| \right]_1^{-1} \end{array}.$$

$$\text{Ainsi, } I = \frac{2}{3} - 2 + 38 - 68 \ln(12) - \frac{705}{8} \ln(3) + \frac{2}{3} + 2 + 38 + 68 \ln(16) = \frac{232}{3} + 136 \ln(2) - \frac{1249}{8} \ln(3).$$

## IV Méthodes pour trouver une primitive

33

Nous cherchons une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$  (ou toutes les primitives de  $f$  sur  $I$ ): une primitive de  $f$  est est souvent notée  $\int f(x) dx$ . Vous trouverez des calculs de primitives utilisant cette notation. Pour ma part, je vais revenir à un calcul d'intégral classique en suivant la méthode suivante :

**A. Justifier que  $f$  admet une primitive sur cet intervalle  $I$  ....** Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ , alors  $f$  admet des primitives sur  $I$ .

**B. Regarder la forme de  $f$  :**

- Soit je reconnais dans l'expression de  $f$  une dérivée usuelle (tableau 1).
- Soit je peux transformer  $f$  ( par linéarisation ou « bidouille » ou décomposition en éléments simples) afin de l'écrire  $f$  comme une somme de fonctions dont je connais une primitive. Dans le tableau 2, cela correspondant aux cas ne nécessitant ni IPP ni de CV (\*).

- Soit le calcul d'une intégrale de  $f$  nécessite IPP ou CV (cas \*\* du tableau2). Dans ce cas ,
  - Je choisis un élément  $a$  dans  $I$  et j'introduis  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .
  - J' invoque le cours pour affirmer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .
  - Je calcule  $F(x)$  avec les méthodes du tableau précédent .

34 **Exemple :** Cherchons une primitive de  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)}$ .

$f$  est continue sur  $I = ]0, +\infty[$  donc  $f$  admet une primitive sur l'intervalle  $I$ .

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)} = \frac{1}{2} \frac{\frac{2\ln(x)}{x}}{1+(\ln(x))^2} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$ . Donc les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions de la forme :  $(x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1 + (\ln(x))^2) + c)$  tq  $c$  constante réelle.

35 **Exemple :** Cherchons une primitive de  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x}}$ .

$f$  est continue sur  $I = ]\frac{1}{3}, +\infty[$  donc  $f$  admet une primitive sur l'intervalle  $I$ .

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x}} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)(1-3x) + \frac{1}{3}}{\sqrt{1-3x}} = -\frac{1}{3} \sqrt{1-3x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1-3x}} = \frac{1}{9} \underbrace{(-3)(1-3x)^{\frac{1}{2}}}_{u'(x)u(x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{9} \underbrace{(-3)(1-3x)^{-\frac{1}{2}}}_{u'(x)u(x)^{-\frac{1}{2}}}$$

Donc  $F: \left(x \mapsto \frac{1}{9} \frac{(1-3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9} \frac{(1-3x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

36 **Exemple :** Cherchons une primitive de  $f(x) = x^2 \text{Arctan}(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^x t^2 \text{Arctan}(t) dt &= \left[ \frac{t^3}{3} \text{Arctan}(t) \right]_{\cdot}^x - \int_{\cdot}^x \frac{t^3}{3(1+t^2)} dt = \frac{x^3}{3} \text{Arctan}(x) - \frac{1}{3} \int_{\cdot}^x \frac{t(t^2+1) - t}{(1+t^2)} dt \\ &= \frac{x^3}{3} \text{Arctan}(x) - \frac{1}{3} \int_{\cdot}^x t - \frac{1}{2} \frac{2t}{(1+t^2)} dt = \frac{x^3}{3} \text{Arctan}(x) - \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] + cste. \end{aligned}$$

Les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme  $(x \mapsto \frac{x^3}{3} \text{Arctan}(x) - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + c)$  tel que  $c$  constante réelle.

37 **Exemple :** Cherchons une primitive de  $f(x) = \frac{2x^3+3x-1}{x^2+x+1}$ .

Notons  $N(x) = 2x^3 + 3x - 1$  et  $D(x) = x^2 + x + 1$ .  $\Delta_D < 0$ . Donc  $Df = \mathbb{R} \text{ et } f$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ . Par conséquent,  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$  et  $F: (x \mapsto \int_0^x f(t)dt)$  est celle qui s'annule en 0. Cherchons une expression de  $F$  en calculant  $F(x) = \int_0^x \frac{2t^3+3t-1}{t^2+t+1} dt$ .

• Effectuons la division euclidienne de  $N$  par  $D$  :

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 + 3t - 1 & t^2 + t + 1 \\ -(2t^3 + 2t^2 + 2t) & 2t - 2 \\ \hline -2t^2 + t - 1 & \\ -(-2t^2 - 2t - 2) & \\ \hline 3t + 1 & \end{array} \quad \text{Donc, } 2t^3 + 3t - 1 = (t^2 + t + 1)(2t - 2) + 3t + 1.$$

Et par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{(t^2+t+1)(2t-2)+3t+1}{t^2+t+1} = (2t-2) + \frac{3t+1}{t^2+t+1} = (2t-2) + \frac{\frac{3}{2}(2t+1) - \frac{1}{2}}{t^2+t+1} = \frac{(2t-2)}{Q(t)} + \frac{\frac{3}{2}(2t+1)}{2 \frac{t^2+t+1}{g(t)}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{t^2+t+1}{h(t)}}.$$

•  $Q, g$  et  $h$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  donc,  $\forall x \in \mathbb{R} F(x) = \int_0^x Q(t)dt + \frac{3}{2} \int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^x h(t)dt$

$$F(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} H(x).$$

• Calcul de  $H(x)$ :  $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x \frac{1}{\frac{3}{4} \left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]} dt = \frac{4}{3} \int_0^x \frac{1}{\left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]} dt \\ &\stackrel{\text{CV}}{=} \frac{4}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{[u^2+1]} \frac{\sqrt{3}}{2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{[u^2+1]} du \\ &\stackrel{\text{CV}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{[u^2+1]} du \end{aligned}$$

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \text{Arctan}(u) \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6} \right].$$

• Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6} \right] = x^2 - 2x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

• Alors,  $F - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$  est une autre primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Et les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sont toutes les fonctions de la forme  $(x \mapsto x^2 - 2x +$

$\frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{\text{Arctan}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} + cste)$ . Autrement dit,

$$\int f(x)dx = x^2 - 2x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{\text{Arctan}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} + cste.$$

### Méthode : Quand le théorème d'IPP ne peut pas s'appliquer partout : deux exemples

#### Recherche d'une primitive d'Arcsin

$\text{Arcsin}$  est continue sur  $[-1, 1]$ . Donc,  $F: (x \mapsto \int_0^x \text{Arcsin}(t) dt)$  est une primitive de  $\text{Arcsin}$ .

Calculons  $F(x) = \int_0^x \text{Arcsin}(t) dt$ . Je souhaite appliquer le TIPP avec  $u(t) = \text{Arcsin}(t)$  et  $v(t) = t$ .  $u'$  n'étant définie et continue que sur  $] - 1, 1[$ , je vais fixer  $x \in ] - 1, 1[$ . Alors,  $F(x) = \int_0^x 1 \times \text{Arcsin}(t) dt = [t \times \text{Arcsin}(t)]_1^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

Donc,  $\forall x \in ] - 1, 1[$ ,  $F(x) = x \text{Arcsin}(x) + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$ . De plus,  $F$  est continue en 1 et en -1 ; donc,  $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$ . De même en -1.

Donc, finalement,  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $F(x) = x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$ .

Posons  $G = F - 1$ . Alors,  $G: (x \mapsto x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2})$  est une primitive de  $\text{Arcsin}$  sur  $[-1, 1]$ .

Rque :  $G$  étant une primitive de  $\text{Arcsin}$  sur  $[-1, 1]$ ,  $G$  est alors dérivable en -1 et en 1 (ce qui n'est pas évident lorsqu'on regarde son expression contenant  $\text{Arcsin}$  et  $\sqrt{x^2-1}$  non dérivables ni en 1 et ni en -1) et  $G'(1) = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$  et  $G'(-1) =$

$$\text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

#### Calcul de $I = \int_0^1 t \ln(t) dt$ .

Existence : Posons  $f: (t \mapsto \begin{cases} t \ln(t) & \text{si } t \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases})$ .  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  ; donc,  $I = \int_0^1 f(t) dt$  existe.

Calcul : la méthode préconisée pour intégrer le produit d'un polynôme et d'un logarithme est l'intégration par parties en posant  $u(t) =$  une primitive du polynôme et  $v(t) = \ln(t)$ . Mais  $v = \ln$  n'est pas dérivable sur  $[0, 1]$ , donc je ne peux pas appliquer le TIPP sur  $[0, 1]$  mais je peux l'appliquer sur  $[x, 1]$  avec  $x \in ]0, 1[$ .

Posons  $F: (x \mapsto \int_1^x t \ln(t) dt)$  une primitive de  $f$  sur  $[0, 1]$  (d'après le théorème fondamental).

Alors  $I = F(1) - F(0) = -F(0)$ . Or  $F$  est continue en 0 ; donc,  $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ . De plus,  $\forall x \in ]0, 1[$ ,

$$F(x) = \int_1^x t \ln(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int_1^x t dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^x$$

$u(t) = \frac{t^2}{2}$   
 $v(t) = \ln(t)$   
 $C^1 \text{ sur } ]x, 1[ \text{ et}$   
 $u'(t) = t$   
 $v'(t) = \frac{1}{t}$

Donc,  $\forall x \in ]0, 1[$ ,  $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$ . Alors,  $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ . Ainsi,  $I = -\frac{1}{4}$ .

Contrôle qualité : sur  $[0, 1]$ ,  $t \ln(t) \leq 0$ , donc  $I \leq 0$ . OK!!



$$\int_0^{\text{Arcsin}(x)} \cos^2(\theta) d\theta = \int_0^{\text{Arcsin}(x)} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta \right]_0^{\text{Arcsin}(x)} = \frac{\sin(2\text{Arcsin}(x))}{4} + \frac{\text{Arcsin}(x)}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \text{Arcsin}(x)}{2}$$

Alors,  $\forall x \in [-a; a], \int_0^x \sqrt{a^2 - t^2} dt = a \int_0^x \sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2} dt \stackrel{u = \frac{t}{a}}{=} a^2 \int_0^{\frac{x}{a}} \sqrt{1-u^2} du = a^2 \frac{x}{2a} \frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)}{2} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)}{2}$ .

$\begin{matrix} \stackrel{u = \frac{t}{a}}{=} \\ \frac{adu = dt}{t=0 \Leftrightarrow u=0} \\ t=x \Leftrightarrow u = \frac{x}{a} \end{matrix}$

### Recherche d'une primitive de $f : (u \mapsto \sqrt{1+u^2})$ .

$f$  est continue sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  donc admet des primitives sur cet intervalle et  $F: (x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+u^2} du)$  est la primitive sur cet intervalle qui s'annule en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x \sqrt{1+u^2} du \stackrel{u = \text{sh}(\theta) \text{ i.e. } \theta = \ln(u + \sqrt{1+u^2})}{=} \int_0^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \sqrt{1 + (\text{sh}\theta)^2} \text{ch}(\theta) d\theta = \int_0^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \sqrt{\text{ch}^2\theta} \text{ch}(\theta) d\theta \stackrel{\text{car } \text{ch}(\theta) \geq 0}{=} \int_0^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \text{ch}^2(\theta) d\theta = \int_0^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} \frac{\text{ch}(2\theta)+1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sh}(2\theta)}{2} + \theta \right]_0^{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{\text{sh}(2\ln(x + \sqrt{1+x^2}))}{4} + \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2} = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2}$$

### Recherche d'une primitive de $f : (u \mapsto \sqrt{u^2-1})$ .

$f$  est continue sur les intervalles  $]-\infty, -1]$  et  $[1, +\infty[$  donc admet des primitives sur chacun de ces intervalles et  $F: (x \mapsto \int_{-1}^x \sqrt{u^2-1} du)$  est la primitive de  $f$  sur  $]-\infty, -1]$  qui s'annule en -1.

$$\forall x \in ]-\infty, -1], \int_{-1}^x \sqrt{u^2-1} du \stackrel{\text{Comme } u \leq -1, \text{ on peut poser } u = -\text{ch}(\theta) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}^+}{=} \int_0^{\ln(-x + \sqrt{x^2-1})} \sqrt{\text{ch}^2(\theta) - 1} (-\text{sh}(\theta)) d\theta = \int_0^{\ln(-x + \sqrt{x^2-1})} \text{sh}^2(\theta) d\theta = - \int_0^{\ln(-x + \sqrt{x^2-1})} \frac{\text{ch}(2\theta)-1}{2} d\theta = - \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{sh}(2\theta)}{2} - \theta \right]_0^{\ln(-x + \sqrt{x^2-1})} = - \frac{\text{sh}(2\ln(-x + \sqrt{x^2-1}))}{4} + \frac{\ln(-x + \sqrt{x^2-1})}{2} = - \frac{\text{sh}(\ln((-x + \sqrt{x^2-1})^2))}{4} + \frac{\ln(-x + \sqrt{x^2-1})}{2} \stackrel{\text{car } \theta \geq 0 \text{ donc } \text{sh}(\theta) \geq 0}{=} - \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2-1} + \ln(-x + \sqrt{x^2-1}) \right) = \frac{1}{2} \left( e^{\ln((-x + \sqrt{x^2-1})^2)} - e^{-\ln((-x + \sqrt{x^2-1})^2)} \right) = \frac{1}{2} \left( (-x + \sqrt{x^2-1})^2 - e^{\ln\left(\frac{1}{(-x + \sqrt{x^2-1})^2}\right)} \right) = \frac{1}{2} \left( (-x + \sqrt{x^2-1})^2 - \frac{1}{(-x + \sqrt{x^2-1})^2} \right) = \frac{1}{2} \left( (-x + \sqrt{x^2-1})^2 - \frac{(\sqrt{x^2-1} + x)^2}{x^2-1-x^2} \right) = \frac{1}{2} \left( (-x + \sqrt{x^2-1})^2 - (\sqrt{x^2-1} + x)^2 \right) = -2x\sqrt{x^2-1}$$

### Méthode pour intégrer une fonction de la forme $f : (x \mapsto \sqrt{ax^2 + bx + c})$ .

Suivant le signe de  $a$ , en mettant  $\sqrt{|a|}$ , on se ramène à intégrer une fonction de la forme  $g : (x \mapsto \sqrt{\pm x^2 + \alpha x + \beta})$  où  $\alpha$  et  $\beta$  constantes

**Etudions sur un exemple comment calculer une intégrale d'une fonction  $g$  de la forme  $(x \mapsto \sqrt{-x^2 + \alpha x + \beta})$ .** Calculons  $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x-x^2}}{=g(x)} dx$ .

$g$  est continue sur  $[0,1]$  donc  $I$  existe.

$$x - x^2 = -\left[x^2 - x\right] = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left[1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4} [1 - (2x - 1)^2]$$

$$\text{Donc, } I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} [1 - (2x - 1)^2]} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{1 - (2x - 1)^2} dx \stackrel{u = 2x-1}{=} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du \stackrel{u = \sin(t)}{=} \dots$$

$\begin{matrix} \stackrel{u = 2x-1}{=} \\ \frac{du = 2dx \text{ i.e. } dx = \frac{1}{2} du}{x=0 \Leftrightarrow u=-1} \\ x=1 \Leftrightarrow u=1 \end{matrix}$

**Etudions sur un exemple comment calculer une intégrale d'une fonction  $g$  de la forme  $(x \mapsto \sqrt{x^2 + \alpha x + \beta})$ .** Calculons  $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}{=g(x)} dx$ .

$g$  est continue sur  $[0,1]$  donc  $I$  existe.

$$x^2 - 3x + 5 = \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = \frac{11}{4} \left[\frac{4}{11} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{11}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x - \frac{3}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$$

$$\text{Donc, } I = \int_0^1 \sqrt{\frac{11}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x - \frac{3}{2}\right)\right)^2 + 1\right]} dx = \frac{\sqrt{11}}{2} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x - \frac{3}{2}\right)\right)^2 + 1} dx \stackrel{u = \frac{2}{\sqrt{11}} \left(x - \frac{3}{2}\right)}{=} \frac{\sqrt{11}}{2} \int_{-\frac{3}{\sqrt{11}}}^{\frac{1}{\sqrt{11}}} \sqrt{u^2 + 1} \frac{\sqrt{11}}{2} du \stackrel{u = \text{sh}(t)}{=} \dots$$

$\begin{matrix} \stackrel{u = \frac{2}{\sqrt{11}} \left(x - \frac{3}{2}\right)}{=} \\ \frac{du = \frac{2}{\sqrt{11}} dx \text{ i.e. } dx = \frac{\sqrt{11}}{2} du}{x=0 \Leftrightarrow u = -\frac{3}{\sqrt{11}}} \\ x=1 \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{11}} \end{matrix}$

