DL 1

A rendre mardi 16 septembre 2023

Ex 1 Soit $S_n = \sum_{1\leq i,k\leq n} \frac{i}{i+k}$. Montrer que $S_n = \sum_{1\leq i,k\leq n} \frac{k}{i+k}$. En déduire S_n.

Ex 2. Soit β un réel distinct de 1. Soit n un entier naturel fixé et $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\, \beta^k$.

1. Calculer S_n avec l'une des méthodes vues en cours.
2. Déterminer A et B deux réels indépendants de n telle que la suite (u_n) de la forme : $u_n = (An+B).\beta^n$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n\, \beta^n$.
3. En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\, \beta^k$. (on demande une expression sans $\sum$).

Ex 3 Soit n un entier naturel fixé et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^4$.

1. Déterminer (avec preuve) la valeur de T_n.
2. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Calculer : $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Retrouver $\sum_{k=0}^{n} k$, grâce à la somme précédente.
4. Déterminer des entiers a , b, c et d tels que : $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}, k^4 = a\binom{k}{4} + b\binom{k}{3} + c\binom{k}{2} + d\binom{k}{1}$.
5. Retrouver alors la valeur de T_n donnée au 1.