TD 1

Récurrence. Sommes et produits finis. Premières suites. Systèmes linéaires.

I Cours

EX 0

n, P et N sont des entiers tels que $P \leq N$. x et λ des réels.

1. VRAI OU FAUX (justifier)

a. $\sum_{k=1}^{n}(\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k$

b. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

c. $\sum_{k=1}^{n}(a_k \times b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

d. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(a_i \times b_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

e. $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$

f. $\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \prod_{k=1}^{n} a_k$

g. $\prod_{k=1}^{n} a_k^n b_k^n = \left[\prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=1}^{n} b_k\right]^n$

h. $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$

i. $\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} 3^k\right) = \sum_{k=1}^{n} 6^k$

j. $\left(\prod_{k=1}^{n} 2^k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} 3^k\right) = \prod_{k=1}^{n} 6^k$

k. $\sum_{P\leq k\leq l\leq N} a_{lk} = \sum_{l=P}^{N}\sum_{k=P}^{N} a_{lk} = \sum_{k=P}^{N}\sum_{l=P}^{N} a_{lk}$

l. $\sum_{P\leq k,l\leq N} a_{lk} = \sum_{l=P}^{N}\sum_{k=P}^{N} a_{lk} = \sum_{k=P}^{N}\sum_{l=P}^{N} a_{lk}$.

2. Compléter :

a. Soit $S_n(x) = \sum_{k=n}^{2n} \binom{n+1}{k-1}(x^k + 2n - k)$.

$S_2(-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $S_{n+1}(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \ldots \ldots.$

b. $\sum_{k=1}^{n+3}(a_{k+2} + b_{k-1}) = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} a_k + \sum_{k=\ldots}^{\ldots} b_k$

c. $\prod_{k=3}^{n} \frac{(k-1)a_k}{b_{k-2}} = \frac{\ldots \times \prod_{k=3}^{n} a_k}{\ldots\ldots\ldots}$

d. $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} = \sum_{j=\ldots}^{n} \ldots \ldots \ldots = \sum_{i=1}^{\ldots} \ldots \ldots \ldots \ldots$

e. $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} = \sum_{j=\ldots}^{n} \ldots \ldots \ldots = \sum_{i=1}^{\ldots} \ldots \ldots \ldots \ldots$

f. $\sum_{k=P}^{N}(a_k - a_{k-1}) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

g. $5^P + 5^{P+1} + 5^{P+2} + \cdots + 5^N + 5^{N+1} = ..$

h. $9 - 16 + 25 - 36 + \cdots + 225 = \cdots \ldots \ldots \ldots$

i. $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} = ..$

j. $1 - x^n = (1-x)(\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots)$

k. $1 + x^{2n+1} = (1+x)(\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots)$

l. $1 + x^{2n+1} = (1+x)(\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots)$.

II Calculs de sommes et produits

Ex 1 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Ecrire, avec des coefficients binomiaux :

1. $A_n = \dfrac{\prod_{\substack{0\leq k\leq 2n \\ k\ pair}} k}{\prod_{\substack{0\leq k\leq 2n \\ k\ impair}} k}$

2. $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)}{(2n-k+1)}$

3. $Q_n = \prod_{k=0}^{n-1}(n(n+p) - k(k+p))$

Ex 2 TECHNIQUE DE BASE. Savoir-faire absolument !

Calculer les sommes et produits suivants (p et n sont des entiers naturels et x un réel) :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)$

2. $T_n(x) = \sum_{k=0}^{3n} 2^{k+1}x^{1-3k}$ où $x \neq 0$.

3. $U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}5^k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}2^{1-k}$

4. $H(n) = \sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}} + \binom{n}{k+1}3^{2k} - 5(k+2)^3\right)$

5. $E_n(x) = \sum_{k=0}^{3n} e^{-kx}$

6. $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} x^{2k^2+1}$

7. $Q(n) = \prod_{k=0}^{n} 3^{\binom{n}{k}}$.

8. $R_n = \prod_{j=0}^{n} \frac{2j+1}{2j-3}$.

Ex 3 LES CLASSIQUES. Savoir-faire absolument !

1. Calculer $U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k+2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

2. Calculer $P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$ et $I_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1}$ où $n \in \mathbb{N}$

3. Calculer $S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. En déduire la limite de (S_n).

4. Déterminer trois réels A , B et C tels que : $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,2\}$, $\frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k-2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n}\frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3}$.

5. Calculer $S_n = \sum_{k=3}^{n} ln\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1;2\}$. En déduire la limite de (S_n).

6. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k^2+k-1)3^{-k}2^{2k}$ où $n \in \mathbb{N}$.

7. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k^2+k+1}{k+1}\right)$ où $n \in \mathbb{N}$.

8. Calculer $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p}$ et $T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{p}{k}$ où n, p entiers et $n > p \geq 0$.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$. Effectuer le changement d'indice $p = 2n + 1 - k$ et en déduire la valeur de S_n.

Ex 5 Montrer (de deux manières : par récurrence et par télescopage) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k \times k\,! = (n+1)\,! - 1$.

Ex 6 Télescopage

1. Calculer $W_n = \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})$ *et* $Y_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. En déduire la limite de (S_n).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$. En déduire la limite de (S_n).
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$ $tq\ n \in \mathbb{N}^*$.
5. Déterminer deux réels a *et* b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{4x^4+1} = \frac{a}{2x^2+2x+1} + \frac{b}{2x^2-2x+1}$. En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$. En déduire la limite de (S_n).

Ex 7 On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Ex 8 Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - 1\big)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

Ex 9 1) Montrer que $\forall (k,n) \in (\mathbb{N}\backslash\{0,1\})^2, k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}, n \in \mathbb{N}$.
2) *Soit* $(n,k,i) \in \mathbb{N}^3$ *tel que* $k \leq i \leq n$. Montrer que $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$. En déduire $S_n = \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}, n \in \mathbb{N}$.

Ex 10 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 4^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 4^k$. Calculer $S_n + 2T_n$ puis $S_n - 2T_n$ .En déduire S_n et T_n .

Ex 11 En appliquant une méthode analogue à celle employée pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2$ *et* $\sum_{k=0}^{n} k^3$, calculer $\sum_{k=0}^{n} k^4$.

Ex 12 Calculer les sommes doubles suivantes (n *et* p désignent deux entiers naturels tels que $n \geq 2$ *et* $p \geq 3$)

1. $S_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-2 \\ 1 \leq m \leq p-3}} \alpha$
2. $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} (1 - 2^i) 2^{ij}$
3. $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2$
4. $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$
5. $S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2i + 3j$
6. $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n}^{n} i2^j$
7. $S_n = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n}^{n} \frac{1}{i}$
8. $S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$.

Ex 13 Soit $\in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_n = \prod_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} ij$. En déduire $T_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

III D'autres applications de la « FBN »

Ex 14

1. Soit a, b, c, d des entiers. Justifier que : $\left(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}\right)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 / \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
3. Trouver une relation entre $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$.En déduire que les suites (a_n) *et* (b_n)sont strictement croissantes.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.
5. En déduire que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de couples d'entiers naturels (x, y) solutions.

Ex 15 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n > n$.

IV Suites particulières

Ex 16 Donner une expression explicite des suites récurrentes définies de la manière suivante :

1. $\begin{cases} \forall n, u_{n+1} = 3 + u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \forall n, u_{n-1} = -4u_n \\ u_1 = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \forall n, & u_{n+1} = 1 - 3u_n \\ & u_0 = 2 \end{cases}$
4. $\forall n, \sum_{k=0}^{n} u_k = \binom{n}{3}$.
5. $\forall n, \prod_{k=0}^{n} u_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+n}$
6. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = u_n + n^2 - 3^{n+\frac{1}{2}}$.
7. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = (n+1)e^n u_n$.
8. $u_0 = 2$ *et* $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
9. $u_0 = -1$ *et* $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 1 - 3n + u_n$.

Ex 17

1. Soit (u_n) *et* (v_n) deux suites telles que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \quad et \quad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n \\ u_0 = 2\,, v_0 = 1 \end{cases}$.
   a. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   b. En déduire des expressions explicites de u_n *et de* v_n.
2. Soit (u_n) *et* (v_n) deux suites telles que $u_0 = 0$ *et* $\forall n, u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n}$ *et* $v_n = \frac{1}{1+u_n}$.
   a. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ *et* v_n existent .
   b. Montrer que (v_n) est arithmétique. En déduire une expression explicite de u_n.
3. Soit (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.
   a. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   b. En déduire une expression de u_n en fonction de n *et de* u_0 *et* u_1 .

Ex 18 Soit u *et* v les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{1-2u_n}{1+u_n}$.

1. Montrer que les suites u et v sont bien définies.
2. Montrer que v est géométrique.
3. En déduire une expression explicite de u_n *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Ex 19 Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n. \end{cases}$

1. Montrer que la suite v définie par : $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ est arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression explicite de u_n *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

V Systèmes linéaires

J'essaie de faire apparaitre un coefficient égal à 1 puis j'utilise **uniquement** cette ligne (que l'on aura passé en L_1) pour faire disparaitre l'inconnue correspondante sur les **autres** lignes en effectuant des opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$.

Ex 20 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues réelles $x_1, x_2, \dots, x_n, x, y, z, t$ et de paramètres réels a, b, c, m, p, q et/ou λ.

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = m^2 - 3 \\ 2x + 2y = -m \end{cases}$
5. $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ -2x - my = m \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x + 4y - 5z = -8 \\ 3x + 9y - 8z = 1 \\ 4x + 17y - 11z = 41 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 5x + y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 6 \\ x + 2y - 7z = -1 \\ 2x - 2y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 5x - z = -4 \\ 2x - y - z = -3 \\ 8x + 3y + 5z = -1 \\ 6x + y + z = -3 \end{cases}$
9. $\begin{cases} mx + y + (m-1)z = 3 \\ (m-1)x + y + (m-1)z = 9 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$
10. $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = 1 \\ x + by + az = 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x + y + z - 4t = -1 \\ 2x - 3y - 8z + 7t = 8 \\ x + 3y + 5z - 10t = -5 \\ 4x - y - 6z - t = 6 \end{cases}$
13. $\begin{cases} -3x + 2y + 2z = \lambda x \\ -2x + y + 2z = \lambda y \\ -2x - 2y + z = \lambda z \\ -2x - 2y + t = \lambda t \end{cases}$
14. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$.
    $(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$
    indication : distinguer les cas $n = 3p, n = 3p + 1$ *et* $n = 3p + 2$

Je vérifie chaque équivalence en écrivant les opérations dans les deux sens et en m'assurant que je ne divise pas par un réel qui pourrait être nul (par exemple, s'il dépend d'un paramètre).

Ex 21 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), déterminer les points d'intersection :
   a. entre l'hyperbole d'équation $xy = 2$ et la droite passant par $A(3,4)$ et dirigée par $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
   b. entre les droites d'équation $2x - 3y = 2$ et $7x - 2y = 1$.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer les points d'intersection des plans d'équation :
   $4x - 3y + 5z = 2$ et $7x - 2y + 3z = 1$.

Ex 22 Résoudre (S): $\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$. **Indication** : appliquer une bonne fonction qui permet de se ramener à un système linéaire.

Ex 23 Soit $a\ b, c, d$ des réels .

1. On suppose ici que $c \neq 0$. Montrer qu'il existe deux réels U *et* V tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}, \frac{ax+b}{cx+d} = U + \frac{V}{cx+d}$. En déduire une primitive de f: $\left(x \mapsto \frac{1-2x}{3x+5}\right)$.
2. On suppose ici que $c \neq d$. Montrer qu'il existe deux réels U *et* V tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}, \frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} = \frac{U}{x-c} + \frac{V}{x-d}$. En déduire la somme $S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2+k}$.

Ce sont des décompositions en éléments simples. Cf chap suivant.