

Inégalités dans \mathbb{R} .

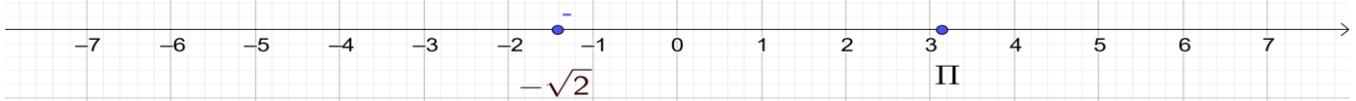
Premières fonctions réelles.

I. Relation d'ordre dans \mathbb{R} .

- On rappelle que pour tous réels x et y ,
 - $x \leq y$ signifie que $y - x \geq 0$.
 - $x < y$ signifie que $x \leq y$ et $x \neq y$.
 - Un nombre réel non nul et son inverse ont le même signe.
 - Le produit de deux réels de même signe (resp. strict) est positif (resp. strictement).

- On dit que : la relation \leq est une relation d'ordre totale sur \mathbb{R} car elle vérifie :
 - Réflexivité** : pour tout réel x , $x \leq x$.
 - Antisymétrie** : pour tous réels x et y , $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$.
 - Transitivité** : pour tous réels x , y et z , $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
 - Ordre total** : pour tous réels x et y , $(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$. (tous les réels sont comparables entre eux)

- On représente alors l'ensemble des réels par une droite graduée et orientée dite **droite des réels**.



4. Caractérisation de certains réels :

- Le seul réel positif strictement inférieur à tout réel positif est ZERO i.e. soit $a \in \mathbb{R}$; alors, $(\forall \varepsilon > 0, 0 \leq a \leq \varepsilon) \Rightarrow (a = 0)$.
- Un réel inférieur à tout réel positif est un réel négatif i.e. soit $a \in \mathbb{R}$; alors, $(\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \Rightarrow a \leq 0$.

5. Droite numérique achevée (utile pour les calculs de limites). On ajoute à \mathbb{R} les objets $+\infty$ et $-\infty$ pour construire $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ appelée droite numérique achevée. Dans cet ensemble, voici les règles de calcul qui complètent celles de \mathbb{R} .

Pour tout réel a , $-\infty < a < +\infty$

- $a + (+\infty) = +\infty$ $a + (-\infty) = -\infty$ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $a / (\pm\infty) = 0$ $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ $(-\infty) \times (+\infty) = -\infty$
- Si $a \neq 0$ alors $\begin{cases} a \times (+\infty) = \text{sgn}(a)\infty \\ a \times (-\infty) = \text{sgn}(a)\infty \\ \frac{a}{0^+} = \text{sgn}(a)\infty \\ \frac{a}{0^-} = -\text{sgn}(a)\infty \end{cases}$

6. Formes indéterminées (« FI ») : $(-\infty) + (+\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , 0^0 , $+\infty^0$, $a/0$ avec chgt de signe

Cette relation d'ordre totale dans \mathbb{R} vérifie les **propriétés** suivantes :

7. Propriétés : Soient a, b, t et a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des réels et p un entier relatif.

- si $a \leq b$ et $a' \leq b'$ (resp. $a' < b'$) alors $a + a' \leq b + b'$ (resp. $a + a' < b + b'$). (\leq) est dite compatible avec l'addition.
- Généralisation** : si pour tout k , $a_k \leq b_k$, alors $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$.
- si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k \leq b_k$ et $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket / a_k < b_k$ alors $\sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k$.
- En particulier** : si $a \leq b$ alors $a + t \leq b + t$.
- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq a' \leq b'$ alors $0 \leq aa' \leq bb'$. ⚠
- Généralisation** :
 - si pour tout k , $0 \leq a_k \leq b_k$, alors $0 \leq \prod_{k=1}^n a_k \leq \prod_{k=1}^n b_k$.
 - si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq a^p \leq b^p$. ⚠
- si $a \leq b$ et $0 \leq t$ alors $ta \leq tb$. Et si $a < b$ et $0 < t$ alors $ta < tb$.
- si $a \leq b$ et $t \leq 0$ alors $ta \geq tb$. ⚠
- si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$ et si $a \leq b < 0$ alors $0 > \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. ⚠
- si $a < 0 < b$ alors $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$.
- Si $b > 0$ et $\frac{a}{b} > 1$ alors $a > b$. Si $b > 0$ et $\frac{a}{b} < 1$ alors $a < b$. Si $b < 0$ et $\frac{a}{b} > 1$ alors $a < b$. Si $b < 0$ et $\frac{a}{b} < 1$ alors $a > b$.

Pour multiplier une inégalité par un réel, je dois connaître le signe de ce réel.

Pour mettre au carré chaque membre d'une inégalité, il faut connaître le signe de ces deux membres.

Pour comparer l'inverse des membres d'une inégalité, je dois contrôler les signes des membres de l'inégalité !

8. NB : 10 et 11 disent que la fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}^{+*} et sur \mathbb{R}^{-*} mais pas sur \mathbb{R}^* .

9. Inéquations : Soient a, b, t et x des réels. $(a + x > b \text{ si et si } x > b - a)$ et $(ax > b \text{ si et si } \begin{cases} x > \frac{b}{a} \text{ si } a > 0 \\ x < \frac{b}{a} \text{ si } a < 0 \\ x \text{ quelconque si } a = 0 \text{ et } b < 0 \\ \text{impossible si } a = 0 \text{ et } b \geq 0. \end{cases})$.

10. Définitions : 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (resp. décroissante) lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).

2. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs réelles.

f est croissante sur I lorsque : pour tous réels x et y dans I , $(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.

f est décroissante sur I lorsque : pour tous réels x et y dans I , $(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$.

f est strictement croissante sur I lorsque : pour tous réels x et y dans I , $(x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y))$.

f est strictement décroissante sur I lorsque : pour tous réels x et y dans I , $(x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y))$.

11. Méthode : Pour comparer deux nombres,

1) on utilise les règles de calcul en démarrant d'une inégalité évidente.

Exercice : Démontrer que : pour tout entier naturel n , $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

2) on étudie très souvent le signe de leur différence. Pour prouver que $a \leq b$, on prouve que $b - a \geq 0$.

Exercice : Démontrer que pour tous réels a et b , $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$. (inégalité à connaître).

3) Pour comparer a et b , on peut comparer $\frac{a}{b}$ avec 1 dès que $b \neq 0$ et que je connais le signe de b .

Exercice : Soit a un réel strictement positif. On pose $\forall n, P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^k)$. Montrer que la suite (P_n) est strictement croissante.

4) On peut les comparer à un réel intermédiaire. Pour prouver que $a \leq b$, on prouve que $a \leq c$ puis $c \leq b$.

Exercice : comparons $a = \sqrt{3}$, $b = \frac{17}{10}$ et $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

5) on peut comparer leurs images par une fonction strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle contenant ces deux réels. Assez souvent, pour comparer deux réels positifs, on compare leurs carrés (qui sont ordonnés dans le même ordre) puisque la fonction carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

En particulier Si a et b sont strictement positifs, alors $a < b$ si et ssi $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ si et ssi $a^2 < b^2$ si et ssi $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ si et ssi $\ln(a) < \ln(b)$.

6) Pour montrer que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$, il est parfois nécessaire d'étudier la fonction $h(x) = g(x) - f(x)$. C'est le cas lorsque les méthodes précédentes ne s'appliquent pas.

Exercice : Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

7) Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, il est parfois nécessaire de faire une preuve par récurrence.

Exercice : Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, (1-x)^p \leq 1 - x^p$.

12. Exercice : Montrer que pour tout entier naturel n , $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} > \sqrt{2n+3}$.

13. Exercice : Soit x un réel. Comparer les réels a , b et éventuellement c dans les cas suivants :

1. $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $b = 2\sqrt{3}$ et $c = 1 + \sqrt{3}$.

2. $a = \frac{100001}{1000001}$ et $b = \frac{1000001}{10000001}$.

3. $a = e^{x^2+1}$ et $b = e^{2x}$.

4. $a = \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$, $b = \ln(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$.

5. $a = \frac{2x}{x^2+1}$ et $b = \frac{2x-1}{x^2}$.

6. $a = \frac{1}{x}$ et $b = -2$

7. $a = \frac{1}{x}$ et $b = 2x$

14. ATTENTION : la fonction carrée est croissante sur \mathbb{R}^+ et décroissante sur \mathbb{R}^- . En général, pour a et b réels, les équivalences suivantes sont fausses:

$(a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b)$ et $(a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$

Par contre, si préalablement je sais que a et b sont négatifs alors

$(a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \geq b)$ et $(a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$ sont vraies.

15. Somme nulle de réels positifs : une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun de ces réels est nul.

Autrement dit, $(a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0) \Leftrightarrow (a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0)$. \rightarrow Démo par contraposée.

16. Exercice : Soient a, b, c et d des réels tels que : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$. Montrer que $a = b = c = d$.

II. Les intervalles et les parties bornées de \mathbb{R} .

1. Intervalles.

17. Définition d'un intervalle : Les intervalles de \mathbb{R} sont par définition les sous-ensembles de \mathbb{R} « sans trous » i.e.

Un sous-ensemble D de \mathbb{R} est un intervalle si et ssi tout réel compris entre deux éléments de D est élément de D

si et ssi $\forall (a, b) \in D^2, \forall x \in \mathbb{R}, (a \leq x \leq b \Rightarrow x \in D)$.

18. Exercice : Montrer que l'intersection de deux intervalles de \mathbb{R} est un intervalle de \mathbb{R} .

19. Il existe 10 types d'intervalles différents dans \mathbb{R} : soient a et b réels tq $a < b$

$\emptyset =]a, a[$

$\{a\} = [a, a]$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

singleton

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

segment

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$

et $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

On note I l'intervalle obtenu en ôtant à I ses extrémités (i.e. ses bords). \dot{I} est appelé l'intérieur de I .
 et \bar{I} l'intervalle obtenu en ajoutant à I ses extrémités finies. \bar{I} est appelé l'adhérence de I .

- 20. NB : 1.** L'ensemble vide \emptyset ne contient rien. $\{a\}$ est appelé un singleton et contient un seul réel a .
2. Un intervalle qui n'est ni un singleton ni le vide contient une infinité de réels. Un tel intervalle sera dit non trivial.
3. $]y - a, y + a[= \{x \in \mathbb{R} / |x - y| < a\}$ contient tous les réels qui sont à distance de y strictement inférieure à a et $[a - y, a + y] = \{x \in \mathbb{R} / |x - y| \leq a\}$ contient les réels qui sont à distance de y inférieure à a (Cf paragraphe suivant).
 Ce sont des intervalles centrés en y .
4. **Rappel :** si n et m sont deux entiers tels que $n \leq m$ alors $\llbracket n, m \rrbracket$ est l'ensemble de tous les entiers compris entre n et m . Autrement dit, $\llbracket n, m \rrbracket = \{n, n + 1, \dots, m\}$.

21. Propriété : Soit a et b deux réels tels que $a < b$. $[a, b] = \{ta + (1 - t)b / t \in [0, 1]\}$. \leftarrow Démonstration par double inclusion.

22. Exercices : 1. Justifier que la réunion de deux intervalles n'est pas forcément un intervalle.

Matérialiser sur l'axe réel les ensembles $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, n + \frac{1}{2}[$ et $F = \bigcap_{i=1}^{10}]1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}[$.

2. Parties majorées, minorées ou bornées. Plus petit élément (ou minimum).

23. Définition d'une partie majorée (resp. minorée) : Soit A une partie de \mathbb{R} . A est majorée (respectivement minorée) lorsqu'il existe un réel m' (resp. m) tel que tout élément x de A vérifie : $x \leq m'$ (resp. $m \leq x$). m' est appelé un majorant de A (resp. m est appelé un minorant de A). (A majorée $\Leftrightarrow \exists m' \in \mathbb{R} / \forall x \in A, x \leq m'$).

24. Définition d'une partie bornée : Une partie A de \mathbb{R} est bornée lorsque A est majorée et minorée, i.e. lorsqu'il existe deux réels m et m' tels que tout élément x de A vérifie : $m \leq x \leq m'$ ($\exists (m, m') \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in A, m \leq x \leq m'$).

25. Exemple : Les intervalles bornés sont le vide et les intervalles dont les deux extrémités sont finies.

26. Définitions : 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On note $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée lorsqu'il existe un réel m , indépendant de n , tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq m$; autrement dit, lorsque A est majorée.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée lorsqu'il existe un réel m' , indépendant de n , tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m'$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée et majorée.

2. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. On note $A = \{f(x) / x \in Df\}$
 f est majorée lorsqu'il existe un réel m , indépendant de x , tel que $\forall x \in Df, f(x) \leq m$; autrement dit, lorsque A est majorée.
 f est minorée lorsqu'il existe un réel m' , indépendant de x , tel que $\forall x \in Df, f(x) \geq m'$.
 f est bornée lorsque f est minorée et majorée.

27. Définition d'un maximum et d'un minimum d'une partie. Soit A une partie de \mathbb{R} . m est appelé le plus petit élément ou minimum de A lorsque m minore A et m est élément de A . m' est appelé le plus grand élément ou maximum de A lorsque m' majore A et m' est élément de A . On note, le cas échéant, $m = \min(A)$ et $m' = \max(A)$.

28. NB : 1) Tout sous-ensemble de \mathbb{R} fini admet un plus grand et un plus petit élément. Exemple : $\max\{\pi; 2\sqrt{3}; \frac{10}{3}\} = 2\sqrt{3}$.

2) Si A est un ensemble d'entiers relatifs et A est majoré (resp. minoré) alors A admet un maximum (resp. minimum).

exemple : Si $A = \mathbb{Z} \cap [-\sqrt{2}, +\infty[$ alors $\min(A) = -1$.

3) Si A est un ensemble de réels minoré (resp. majoré) alors A n'a pas forcément de minimum (resp. de maximum). ex : $A =]1, +\infty[$ est minoré par -3 mais aucun minorant de A n'appartient à A . Donc A n'a pas de minimum. Par contre, on constate que parmi tous les minorants de A , l'un d'entre eux est plus près de A que les autres : il s'agit de 1. 1 est le plus grand minorant de A . 1 est appelé la borne inférieure de A , c'est le plus grand minorant de A . Idem avec la borne supérieure qui sera le plus petit majorant d'un ensemble majoré.

29. Définition : Si a et b sont deux réels alors $\max(a, b)$ (respectivement $\min(a, b)$) est le plus grand (respectivement petit) des réels a et b . De même, si a_1, a_2, \dots, a_n sont de réels alors $\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (resp. $\min(a_1, a_2, \dots, a_n)$) est le plus grand (resp. petit) réel parmi les réels a_1, a_2, \dots, a_n .

30. Exercice : Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient a_1, a_2, \dots, a_n et b_1, b_2, \dots, b_n des réels. Les réels a_1, a_2, \dots, a_n sont strictement positifs.

1. On pose $m = \min\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ et $M = \max\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Montrer que : $m \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq M$.

2. En déduire que $\min\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\} \leq \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \max\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\}$.

31. Méthode pour encadrer la somme finie $\sum_{k=0}^n a_k$:

1. On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$
2. On encadre a_k en utilisant $0 \leq k \leq n$ et les inégalités usuelles.
3. On somme cet encadrement pour k allant de 0 à n .

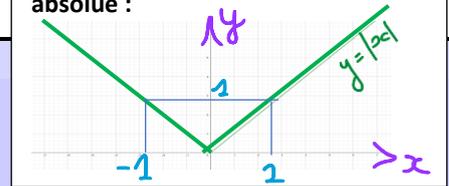
III. Valeur absolue d'un réel.

32. Définition : Soit x un réel. $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ appelé la **valeur absolue** du réel x . Sur l'axe réel, $|x|$ est la distance entre les points d'abscisses 0 et x . On définit alors la fonction valeur absolue qui à chaque réel x , associe la valeur absolue de x .

33. NB : pour tout réel x , $|x|$ existe et est un réel positif.

34. Valeurs particulières à connaître : $|-13,45| = 13,45 = |13,45|$

35. Courbe de la fonction valeur absolue :



36. Propriétés de la valeur absolue : Soit x, y et a, a_1, \dots, a_n des réels.

- $|x|^2 = x^2$ et $|-x| = |x| = \max(x, -x)$.
- $|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{si } x - a \geq 0 \\ a - x & \text{si } x - a < 0 \end{cases}$ = distance entre les réels a et x .
- Si $a > 0$ alors $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in]-a, a[$.
- La fonction valeur absolue est strictement croissante (resp. décroissante) sur \mathbb{R}^+ (resp. sur \mathbb{R}^-)
- Si $a > 0$ alors $|x - y| < a \Leftrightarrow y - a < x < y + a \Leftrightarrow x \in]y - a, y + a[$.
- $|xy| = |x||y|$ et si y non nul, $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$.
- inégalités triangulaires :** $||x| - |y|| \stackrel{2^{\text{ème}} \text{ I.T.}}{\leq} |x + y| \stackrel{1^{\text{ère}} \text{ I.T.}}{\leq} |x| + |y|$.
- Généralisations :** $|\prod_{k=1}^n a_k| = \prod_{k=1}^n |a_k|$ et $|\sum_{k=1}^n a_k| \stackrel{\text{I.T.}}{\leq} \sum_{k=1}^n |a_k|$. **↳ Démo**

37. Exercices :

- Montrer que pour tous réels a, b et c , $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$.
- Résoudre, **par équivalence**, l'équation $7 - 4x \geq |2x + 5|$ d'inconnue réelle x .
- Soit x et y deux réels. Prouver **par disjonction de cas** que : $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

38. Théorème : Une partie A de \mathbb{R} est bornée si et si il existe un réel M tel que : $\forall a \in A, |a| \leq M$. **↳ Démo**

La suite réelle u est bornée si et si il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

La fonction réelle f est bornée si et si il existe un réel M tel que : $\forall x \in Df, |f(x)| \leq M$.

39. Exercices : 1) Montrer que les ensembles $A = \left\{ \frac{x}{1+x^2} / x \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \left\{ \frac{1-\sin(x)}{3-2\cos(x)} / x \in \mathbb{R} \right\}$ sont bornés.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^{**}$. Déterminer un majorant et un minorant de $g: \left([-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \right) : t \mapsto \frac{at^2}{e^{t+1}} - \frac{t^2}{a^2}$.

40. Pour majorer $\frac{a}{b}$ où $a > 0$ et $b \geq 0$, il faut majorer a et minorer b par un réel strictement positif. Pour majorer $a - b$, il faut majorer a et minorer b .

IV. Racine carrée et racine $n^{\text{ème}}$ d'un réel positif.

41. Définition : Soit x un réel.

Si $x \geq 0$ alors \sqrt{x} est l'unique réel positif dont le carré vaut x , \sqrt{x} est l'unique antécédent positif de x par la fonction carrée. \sqrt{x} est appelé la **racine carrée** du réel positif x .

Si $x < 0$ alors \sqrt{x} n'est pas défini (ou n'existe pas).

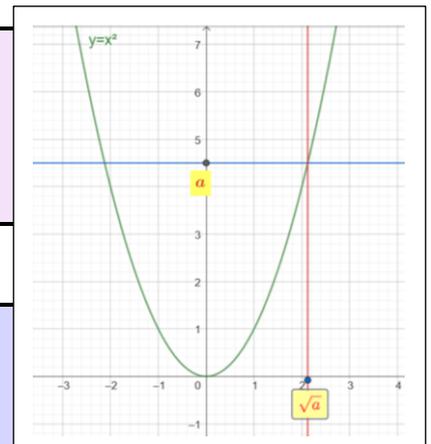
On définit alors la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ qui ? à chaque réel positif x , associe \sqrt{x} .

42. NB : \sqrt{x} est un réel positif. \sqrt{x} existe si et si $x \geq 0$.

42. Valeurs particulières à connaître : $\sqrt{2} \approx 1,41$ et $\sqrt{3} \approx 1,73$.

43. Propriétés de la racine carrée. Soit x, y et a, a_1, \dots, a_n des réels.

- $x^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a} & \text{si } a \geq 0 \\ \text{impossible} & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$. Et, si $x \geq 0$ alors $(\sqrt{x})^2 = x$.
- $0 \leq a < x \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{x}$. La fonction racine carrée est strictement croissante.
- Si x et y sont positifs, alors $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
- Si x et y sont de même signe alors $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}|y|$ et si, de plus, x est non nul, alors $\frac{\sqrt{y}}{x} = \frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}}$
- Si x et y sont positifs, alors $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- Généralisations :** si tous les réels a_k sont positifs alors $\sqrt{\prod_{k=1}^n a_k} = \prod_{k=1}^n \sqrt{a_k}$ $\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$ **↳ Démo**
- Inégalité de Cauchy-Schwarz** pour tous réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$



44. Exercices : 1. Simplifier $r = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$, $s = \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2}$, $t = \sqrt{(3 - \pi)^2}$, $u = \left(\frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2$ et $v = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

2. Résoudre par analyse-synthèse puis par équivalence l'équation $\sqrt{20+x} + 5 = x$ d'inconnue réelle x .

45. Propriétés de la fonction racine carrée. $f: (x \mapsto \sqrt{x})$ est continue sur \mathbb{R}^+ et dérivable sur \mathbb{R}^{++} mais n'est pas dérivable en 0. $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ et Cf admet une tangente verticale en 0.

46. La courbe de la fonction racine carrée est :



47. Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle non trivial I et à valeurs réelles. Soit a un élément de I .

- f est continue en a lorsque : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur I lorsque pour tout $a \in I, f$ est continue en a .
- f est dérivable en a lorsque : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie et on note alors $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. La droite dite tangente à Cf en $A((a, f(a)))$ est alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Cette tangente est horizontale lorsque $f'(a) = 0$.
- f est dérivable sur I lorsque pour tout $a \in I, f$ est dérivable en a .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I . Réciproque fausse.
- Cf admet une tangente verticale en a lorsque f est continue en a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.

Pour transformer une expression qui contient une somme ou différence de racines carrées, on multiplie cette expression par $1 = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ou $1 = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ pour faire apparaître $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

48. Déf si a et x sont deux réels positifs non tous nuls alors $\sqrt{a} \pm \sqrt{x}$ est appelée la quantité conjuguée de $\sqrt{a} \mp \sqrt{x}$. $(\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x}) = a - x$.

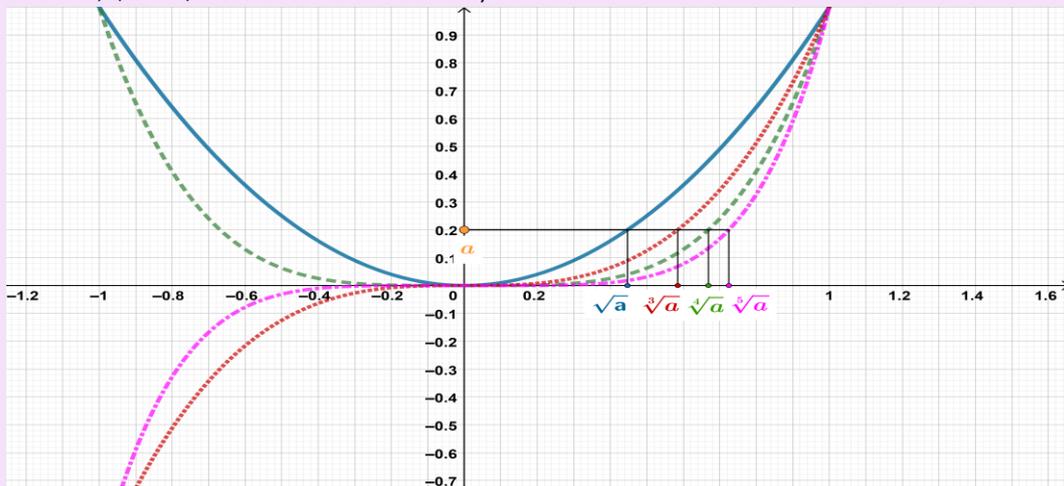
49. Exercices : 1. Rendre entiers les dénominateurs des réels suivants : $a = \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$ et $b = \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

2. Montrer que la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend en décroissant vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. En déduire un encadrement puis la limite quand $N \rightarrow +\infty$ de $T_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}}$.

50. Définition d'une racine n^{ième} :

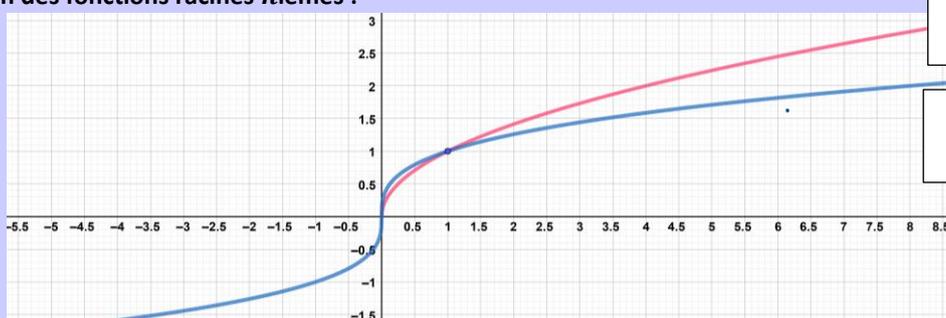
- Soit n un entier naturel pair. Tout réel x positif, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, la racine n ième du réel positif x , est l'unique réel positif dont la puissance n vaut x . (pour $n = 2, \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ est la racine carrée de a).
- Soit n un entier naturel impair, pour tout réel $x, \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, la racine n ième du réel x , est l'unique réel dont la puissance n vaut x . (pour $n = 2, \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ est la racine carrée de a).



- Soit un rationnel $r = \frac{p}{q}$ (où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) et a un réel. $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$ existe dès que $\sqrt[q]{a^p}$ existe (cela dépend de la parité de n et p).

51. Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$ et $\sqrt[3]{-8} = -2$ et $\sqrt[4]{16} = 2$ mais $\sqrt[4]{-16}$ n'existe pas. $(-8)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^4} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$.

52. Représentation des fonctions racines n^{ières} :



$y = \sqrt[n]{x}$
avec n pair

$y = \sqrt[n]{x}$
avec n impair

53. Règles de calcul sur les puissances entières :

- Pour tout entier naturel pair n , pour tout réel x , $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ et pour tout réel positif x , $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
- Pour tout entier naturel impair n , pour tout réel x , $\sqrt[n]{x^n} = x$.
- Pour **tous rationnels** p et q , pour tous réels (ou complexes si p et q sont entiers) x et y éventuellement non nuls, $x^p x^q = x^{p+q}$ $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ $(x^p)^q = x^{pq}$ $x^p y^p = (xy)^p$ $\frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p$.
- **En particulier, si x et y sont réels POSITIFS**, alors $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ et si y est non nul alors $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$.
- **Généralisation** : pour tous réels (éventuellement positifs ou strictement positifs) x, x_1, \dots, x_n et tous rationnels p, p_1, \dots, p_n , $(\prod_{k=1}^n x_k)^p = \prod_{k=1}^n x_k^p$ et $\prod_{k=1}^n x^{p_k} = x^{\sum_{k=1}^n p_k}$

54. Exemples : $\sqrt{\frac{(-2)^{2k+4} \times 3^{k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}} = \left(\frac{(-1)^{2k+4} \times 2^{2k+4} \times 3^{k-1}}{2^{2k} \times 3^{-k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^{2k+4-2k} \times 3^{k-1+k-1})^{\frac{1}{2}} = (2^4 \times 3^{2k-2})^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}} \times (3^{2k-2})^{\frac{1}{2}} = 2^2 \times 3^{k-1}$.

55. Exercice : Montrer que pour tous réels positifs a_1, a_2, \dots, a_n , pour tout entier naturel non nul p ; $\sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt[p]{a_k}$

V. Partie entière

56. **Définition de la partie entière d'un réel.** Soit x un réel, Le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x s'appelle la **partie entière** de x , notée $[x]$. Autrement dit, $[x]$ est l'unique entier relatif qui vérifie : $[x] \leq x < [x] + 1$.

57. Exemple : $[\pi] = 3$ et $[-\pi] = -4$.

58. **Caractérisation de la partie entière** Soit k un entier relatif et x un réel. Alors : $k = [x]$ si et ssi $k \leq x < k + 1$. Autrement dit, si un réel est encadré par deux entiers consécutifs et ne peut pas être égal au plus grand de ces deux entiers alors le plus petit des deux entiers est la partie entière de ce réel.

59. Exercice : Soit n un entier naturel. Montrer que : $[\sqrt{n^2 + 7n + 12}] = n + 3$.

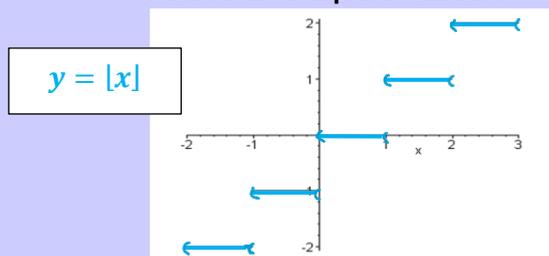
60. Pour montrer que $[X] = p$, il suffit de prouver que : $p \in \mathbb{Z}$ et $p \leq X < p + 1$.

61. **Propriété de la partie entière** . Soit x et y deux réels.

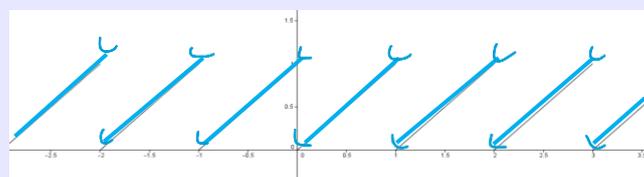
1. $x - 1 < [x] \leq x$
2. $x = [x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, (n \leq x \Rightarrow n \leq [x])$ et $(n > x \Rightarrow n \geq [x] + 1)$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, [x + n] = [x] + n$
5. $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$. La fonction partie entière est croissante (pas strictement).

62. On définit ainsi la **fonction partie entière E** : $(x \mapsto [x])$ **définie sur \mathbb{R}** .

63. La courbe de la fonction partie entière est :



64. EXERCICE : justifier que la courbe de la fonction $(x \mapsto x - [x])$ dite **partie décimale** est :



66. **Application** :

Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique entier relatif tel que : $p10^{-n} \leq x < p10^{-n} + 10^{-n}$. Entre deux réels distincts, il y a toujours un rationnel et un irrationnel. Cela signifie que \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans \mathbb{R} .

VI. Fonctions exponentielle et logarithme népérien

67. **Sans démonstration** rappelons les principaux résultats vus en terminale :

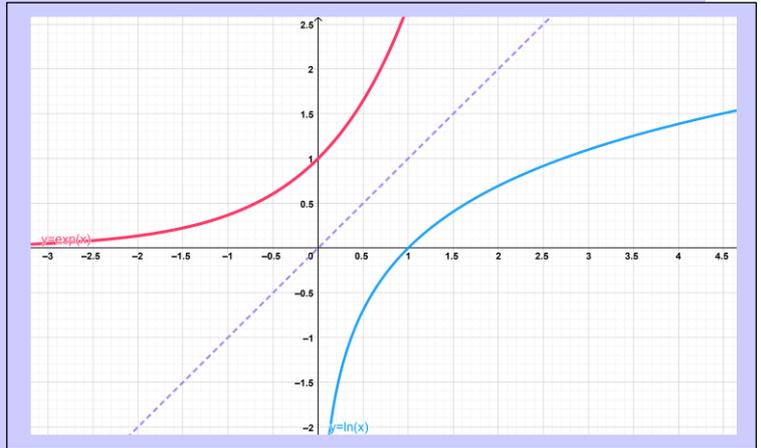
La fonction exponentielle est l'unique fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) \stackrel{\text{noté}}{=} e^x$ et $e^0 = 1$.
La fonction logarithme népérien est l'unique fonction définie et dérivable sur \mathbb{R}^+ , qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

68. Ces fonctions vérifient les règles de calcul suivantes :

71. Ces fonctions ont pour graphe :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+*2},$$

- $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(a)} = a$
- $a = e^x \Leftrightarrow x = \ln(a)$
- $e^{x+y} = e^x e^y$ et $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $e^{px} = (e^x)^p$ et $\ln(a^p) = p \ln(a)$
- $e^x > 0$. $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$.
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$.



69. Généralisation : pour tous réels strictement positifs

$$a_0, \dots, a_n \text{ et tous réels } x_0, \dots, x_n,$$

- $\ln\left(\prod_{k=0}^n a_k\right) = \sum_{k=0}^n \ln(a_k)$
- $e^{\sum_{k=0}^n x_k} = \prod_{k=0}^n e^{x_k}$.

70. NB : si $ab > 0$ alors $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$ idem avec $\frac{a}{b}$.

VII. Fonctions polynomiales.

1. Définition

72. Définitions : Une fonction ou expression polynomiale réelle (resp. complexe) est une fonction de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (**)$$

où n est un entier naturel, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des réels (resp. complexes) indépendants de la variable x (des constantes) $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de f et $(**)$ est la forme développée de f .

Si $a_n \neq 0$ alors le degré de f est n et on note $n = \text{deg}(f)$ et $a_n x^n$ est le terme dominant de f . La fonction nulle est la seule fonction polynomiale dont tous les coefficients sont nuls ; par convention, le degré de la fonction nulle vaut $-\infty$.

Le réel (ou complexe) α est racine réelle (ou complexe) de f lorsque $f(\alpha) = 0$ i.e. lorsque α est une solution réelle (ou complexe) de l'équation polynomiale $f(x) = 0$.

2. De degré 2

73. Théorème : factorisation et signe d'un trinôme.

Soient a, b et c trois réels tels que a non nul. On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$ (forme développée de P)

P est une fonction polynomiale de degré 2 à coefficients réels. On note (E) l'équation $P(x) = 0$. Par définition, les solutions de (E) sont les racines de P . On note $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé le discriminant de P et de (E) . 1.

■ Alors, pour tout réel x , $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ (forme canonique de P).

■ Si $\Delta = 0$, alors $\Delta = \delta^2$ tel que $\delta = 0$ et (E) admet une unique solution (dite solution double) qui est réelle et qui vaut : $x_0 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-b}{2a} = x_1 = x_2$. Pour tout réel x , $P(x) = a(x - x_0)^2$ (forme factorisée de P) et $P(x)$ est du signe de a .

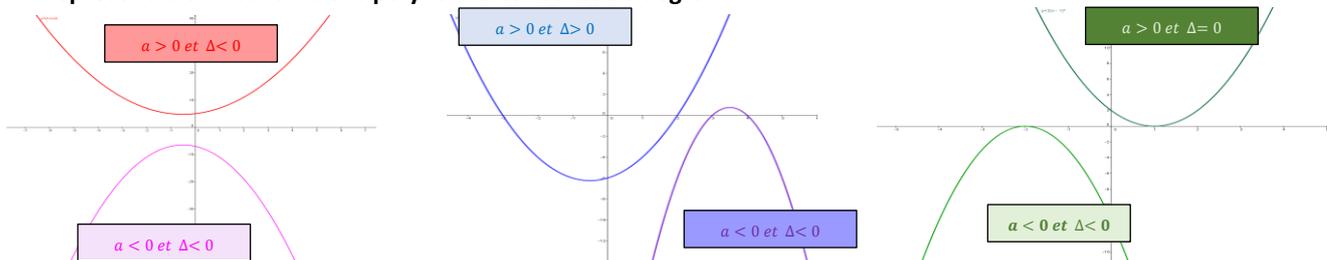
Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = \delta^2$ tel que $\delta = \sqrt{\Delta}$ et (E) admet deux solutions distinctes qui sont réelles et qui sont : $x_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$. De plus, pour tout réel x , $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (forme factorisée de P) et

$P(x)$ est du signe de a si et si x ne se trouve pas entre x_1 et x_2 .

Si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet aucune solution réelle. Pour tout réel x , $P(x)$ est du signe strict de a

■ ■ ■ Enfin, $x_1 + x_2 = 2x_0 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = x_0^2 = \frac{c}{a}$. → Démo

74. Représentation des fonctions polynomiales réelles de degré 2 :



75.NB: 1. Lorsque $c = 0$ alors l'équation est $x(ax + b) = 0$ et admet 0 et $-\frac{b}{a}$ comme solution.
 2. Pour que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c$ conserve le même signe, il faut et il suffit que son discriminant Δ_p soit négatif ou nul.

76. Théorème Soit α et β deux réels. Les seuls réels x et y (éventuellement confondus) qui vérifient $\begin{cases} x + y = \alpha \\ xy = \beta \end{cases}$ sont les solutions de l'équation $t^2 - \alpha t + \beta = 0$. **↪ Démo**

78. Exercice: 1) Compléter :

- $x^2 + 12 > 7$ si et seulement si ...
- $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ si et seulement si ...
- $|x| + 5x^2 - 6 > 0$ si et seulement si ...

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{8x^3 + 1}{2x^2 - x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 5\sqrt{x} - 6}$.

3) Soit $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} + \frac{1-3x}{-x^2-5x+6}$. Etudier le signe $f(x)$ en fonction de x .

4) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+1} \geq x$ d'inconnue x réelle.

77. Pour trouver les solutions réelles de (E): $ax^2 + bx + c = 0$ ou factoriser, dans $\mathbb{R}, ax^2 + bx + c$, il faut
 Ou bien trouver deux réels x_1 et x_2 qui vérifient $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
 Ou bien trouver une solution évidente x_1 de (E) alors l'autre solution de (E) est $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$ (ou $x_2 = \frac{c}{ax_1}$ si $x_1 \neq 0$)
 Ou bien calculer Δ et appliquer le théorème de factorisation.

79. Application : Inégalité de Cauchy-Schwarz pour tous réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, |\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$

3. De degré n

80. Théorème : Les coefficients d'une fonction polynomiale sont **uniques**. Autrement dit si $\forall x \in \mathbb{R}, a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$. **↪ Démo**

81. Théorème :

2. Soit $p \in \mathbb{Z}$. $f_p: (x \mapsto x^p)$ est dérivable sur son domaine Df_p de définition et $\forall x \in Df_p, f_p'(x) = \begin{cases} px^{p-1} & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases}$.

3. Soit a_0, a_1, \dots, a_n des réels. La fonction polynomiale $f: (x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k)$ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$.

3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{terme dominant de } f(x)$ et cette limite existe toujours (finie ou infinie) et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$

↪ Démo

Par suite, f' étant polynomiale, f' est aussi dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k x^{k-2} \dots$

82. Opérations sur les fonctions polynomiales :
 Si $f: (x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k)$ et $g: (x \mapsto \sum_{k=0}^m b_k x^k)$ sont deux fonctions polynomiales alors en posant $\forall k > n, a_k = 0$ et $\forall k > m, b_k = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)x^k$ et $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$ où $c_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j$.

Conséquences : 1. La somme et le produit de fonctions polynomiales sont polynomiales.
 2. $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$ et $\deg(f \times g) = \deg(f) + \deg(g)$. **↪ Démo**

83. Théorème : Toute fonction polynomiale réelle et degré impaire admet au moins une racine réelle. **↪ Démo grâce au TVI**

Corollaire des valeurs intermédiaires : Si f est continue sur un intervalle I et f change de signe sur I alors f s'annule sur I .

84. Théorème de la division euclidienne polynomiale (admis pour le moment) :
 Si f et g sont deux fonctions polynomiales réelles (resp. complexes) telles que g est non nulle alors il existe deux uniques fonctions polynomiales q et r réelles (resp. complexes) telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ et $\deg(r) < \deg(g)$.

85. Déf. : q est le **quotient** de la **division euclidienne de f par g** . r est le **reste** de la division euclidienne de f par g .
 Lorsque le reste r est nul, on dit que g **divise** f .

86. En pratique : on pose la division (comme pour des entiers)

$$\begin{array}{r}
 2x^5 + 4x^2 - 1 \\
 - (2x^5 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3) \\
 \hline
 \frac{4}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 1 \\
 - (\frac{4}{3}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2) \\
 \hline
 \frac{2}{9}x^3 + \frac{32}{9}x^2 - 1 \\
 - (\frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{27}x^2 + \frac{2}{27}x) \\
 \hline
 \frac{100}{27}x^2 - \frac{2}{27}x - 1 \\
 - (\frac{100}{27}x^2 - \frac{200}{81}x + \frac{100}{81}) \\
 \hline
 \frac{194}{81}x - \frac{181}{81}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 3x^2 - 2x + 1 \\
 \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{27}x + \frac{100}{81}
 \end{array}
 \right.$$

On obtient : $2x^5 + 4x^2 - 1 = (3x^2 - 2x + 1) \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{27}x + \frac{100}{81} \right) + \frac{194}{81}x - \frac{181}{81}$

87. Théorème :

Si f est une fonction **polynomiale** réelle *non nulle* de degré n et α est **racine** réelle de f alors

- il existe une unique fonction polynomiale réelle q de degré $(n - 1)$ telle que : pour tout réel x , $f(x) = (x - \alpha)q(x)$.
- $q(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x) = x - \alpha$ et le reste est nul (i.e. g divise f). **↳ Démonstration**

88.NB: si α est racine complexe de f ou bien si f est à coefficients complexes, alors q existe encore et est à coefficients complexes.

89.Exemple : Soit $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$. Déterminons le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

Je constate que (-1) est racine évidente de f . Alors $(x - (-1))$ divise $f(x)$. Cherchons le quotient q tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x + 1)q(x)$.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} 2x^3 + x^2 + 1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline -x^2 + 1 \\ -x^2 - x \\ \hline x + 1 \\ -(x + 1) \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ 2x^2 - x + 1 \end{array} \right. \\ \text{1}^{\text{ère}} \text{ méthode : par division euclidienne} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{2}^{\text{ème}} \text{ méthode : Cherchons un réel } b \text{ tel que, } \forall x, 2x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(2x^2 + bx + 1). \\ \text{i.e. } \forall x, 2x^3 + x^2 + 1 = 2x^3 + (b + 2)x^2 + (b + 1)x + 1. \\ \text{Alors } b = -1 \text{ convient.} \end{array} \right.$$

CCL : pour tout réel x , $2x^3 + x^2 + 1 = (x + 1) \frac{2x^2 - x + 1}{=q(x)}$.

Comme $\Delta_q < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, q(x) > 0$. Par conséquent, $f(x)$ est du signe de $x + 1$. Ainsi, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

90. Pour connaître le signe d'une fonction polynomiale f ,

- je la factorise :
 - Si $\deg(f) = 2$ alors je sais trouver les racines.
 - Si $\deg(f) > 2$ alors je cherche une racine évidente a puis je factorise $f(x)$ par $x - a$. Alors $f(x) = (x - a)q(x)$. je factorise alors $q(x)$ avec ces mêmes principes.
- je fais si besoin un tableau de signe.
- Si je ne parviens pas à factoriser f j'étudie ses variations.

VIII. Fonctions rationnelles simples.

91. Définitions :

Une **fonction rationnelle** réelle est une fonction f de la forme $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont polynomiales réelles et $\deg(B) \geq 1$. Les racines de B sont appelées des pôles de f .

92. Propriété : Si $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{terme dominant de } A}{\text{terme dominant de } B}$ et cette limite existe toujours (finie ou infinie)

93. Propriété : Si $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ et $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ tq $\deg(R) < \deg(B)$ alors $\forall x \in Df, f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$. Q , le quotient de la division euclidienne de A par B est appelé **la partie entière** de f .

94. Exemple : prenons $f(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 5}$. En effectuant la division euclidienne de $x^4 - 3x + 1$ par $x^2 - 2x + 5$, j'obtiens :

$$x^4 - 3x + 1 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 1) - 15x + 6. \text{ Alors,}$$

$$f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 1) - 15x + 6}{x^2 - 2x + 5} = \underbrace{x^2 + 2x - 1}_{\substack{\text{partie} \\ \text{entière de } f}} + \underbrace{\frac{-15x + 6}{x^2 - 2x + 5}}_{\substack{R \\ B \text{ avec} \\ \deg R < \deg B}}$$

95. ADMIS Décomposition en éléments simples de $\frac{R(x)}{B(x)}$ tq R et B polynomiales et $0 \leq \deg(R) < \deg(B)$.

On factorise $B(x)$: $B(x)$ est alors le produit de facteurs de la forme $(x - a)^m$ avec a réel et $m \in \mathbb{N}^*$ et des facteurs de la forme $(x^2 + rx + s)^p$ où s et r réels et $r^2 - 4s < 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Chaque facteur $(x - a)^m$ donne m éléments simples de première espèce $\frac{u_1}{x-a} + \frac{u_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{u_m}{(x-a)^m}$ tq u_1, u_2, \dots, u_m réels ;

chaque facteur $(x^2 + rx + s)^p$ donne p éléments simples de deuxième espèce $\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 + rx + s} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \dots + \frac{\alpha_m x + \beta_m}{(x^2 + rx + s)^p}$ tq $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_p, \beta_p$ réels selon les modèles qui suivent. Notons a, b et c des réels distincts et λ réel non nul.

Si $B(x) = \lambda(x - a)(x - b)$ alors il existe deux **uniques** réels u et v tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}, \frac{R(x)}{\lambda(x-a)(x-b)} = \frac{u}{x-a} + \frac{v}{x-b}$

Si $B(x) = \lambda(x - a)(x - b)(x - c)$ alors $\exists ! (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}, \frac{R(x)}{\lambda(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{u}{x-a} + \frac{v}{x-b} + \frac{w}{x-c}$

Si $B(x) = \lambda(x - a)^2$ alors $\exists ! (u, v) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}, \frac{R(x)}{\lambda(x-a)^2} = \frac{u}{x-a} + \frac{v}{(x-a)^2}$

Si $B(x) = \lambda(x - a)(x - b)^2$ alors $\exists ! (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}, \frac{R(x)}{\lambda(x-a)(x-b)^2} = \frac{u}{x-a} + \frac{v}{(x-a)^2} + \frac{w}{x-b}$

Si $B(x) = \lambda(x - a)^3$ alors $\exists ! (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \frac{R(x)}{\lambda(x-a)^3} = \frac{u}{x-a} + \frac{v}{(x-a)^2} + \frac{w}{(x-a)^3}$.

Si $B(x) = \lambda(x - a)(x^2 + rx + s)$ alors $\exists ! (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \frac{R(x)}{\lambda(x-a)(x^2 + rx + s)} = \frac{ux+v}{x^2 + rx + s} + \frac{w}{x-a}$

Si $B(x) = \lambda(x - a)^3(x^2 + rx + s)^2$ alors $\exists ! (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^7,$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \frac{R(x)}{\lambda(x-a)^3(x^2 + rx + s)^2} = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{x^2 + rx + s} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \frac{u_1}{x-a} + \frac{u_2}{(x-a)^2} + \frac{u_3}{(x-a)^3}$$

96. Regardons sur des exemples comment déterminer les réels u, v et w ?

1. Prenons $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$. En effectuant la division euclidienne de x^4 par $x^3 - x^2 - 4x + 4$, nous obtenons :
 $x^4 = (x^3 - x^2 - 4x + 4)(x + 1) + 5x^2 - 4$ donc $f(x) = (x + 1) + \frac{5x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$. Posons $g(x) = \frac{5x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$.

Factorisons $B(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$:

1 est racine évidente de B . Donc je peux factoriser $B(x)$ par $x - 1$. J'obtiens :

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x - 2)(x + 2).$$

Alors $g(x) = \frac{5x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{5x^2 - 4}{(x - 1)(x - 2)(x + 2)}$.

Donc il existe trois réels u, v et w tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -2\}, g(x) = \frac{5x^2 - 4}{(x - 1)(x - 2)(x + 2)} = \frac{u}{x - 1} + \frac{v}{x - 2} + \frac{w}{x + 2}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -2\}, (x - 1)g(x) = \frac{5x^2 - 4}{(x - 2)(x + 2)} = u + \frac{v(x - 1)}{x - 2} + \frac{w(x - 1)}{x + 2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)g(x) = \frac{1}{(-3)} = u$. Donc $u = -\frac{1}{3}$.

De même, $(x - 2)g(x) = \frac{5x^2 - 4}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{u(x - 2)}{x - 1} + v + \frac{w(x - 2)}{x + 2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)g(x) = \frac{16}{4} = v$. Donc $v = 4$.

Et, $(x + 2)g(x) = \frac{5x^2 - 4}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{u(x + 2)}{x - 1} + \frac{v(x + 2)}{x - 2} + w$. Donc $\lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)g(x) = \frac{16}{12} = w$. Donc, $w = \frac{4}{3}$.

que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -2\}, f(x) = (x + 1) + \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x - 1} + \frac{4}{x - 2} + \frac{4}{3}\frac{1}{x + 2}$.

2. Prenons $f(x) = \frac{2x + 1}{x^3 + x^2}$.

Comme $\deg(2x + 1) < \deg(x^3 + x^2)$, $2x + 1 = \underbrace{0}_{\text{quotient}} \times (x^3 + x^2) + \underbrace{(2x + 1)}_{\text{reste}}$.

Je peux donc directement décomposer f en éléments simples (ici, $f = g$) :

comme $x^3 + x^2 = x(x^2 + 1)$, il existe trois réels u, v , et w tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)x} = \frac{u}{x} + \frac{vx + w}{x^2 + 1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, xf(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} = u + x \frac{vx + w}{x^2 + 1}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 1 = u$. Donc $u = 1$. Et ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 = u + v$. Donc $v = -u = -1$.

Enfin, $f(1) = \frac{3}{2} = u + \frac{v + w}{2} = 1 + \frac{-1 + w}{2}$. Donc, $w = 2$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)x} = \frac{1}{x} + \frac{2 - x}{x^2 + 1}$.

3. Prenons $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$.

Comme $\deg(1) < \deg((x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1))$, la partie entière de f est nulle et on peut directement décomposer f en éléments simples. Comme les deux trinôme du dénominateur de f ont des discriminants strictement négatifs, il existe donc 4 uniques réels u, v, w et s tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{ux + v}{(x^2 + x + 1)} + \frac{wx + s}{(x^2 - x + 1)}$$

Tout d'abord, Alors, $xf(x) = \frac{x}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{ux^2 + vx}{(x^2 + x + 1)} + \frac{wx^2 + s^2}{(x^2 - x + 1)}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 = u + w(*)$.

Ensuite, $f(0) = 1 = v + s (**)$.

Puis, f est paire (il suffit de vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{((-x)^2 - x + 1)((-x)^2 + x + 1)} = f(x)$). Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = f(-x) = \frac{-ux + v}{(x^2 - x + 1)} + \frac{-wx + s}{(x^2 + x + 1)}$. Par unicité de cette décomposition en éléments simples, $-u = w$ et $v = s$.

J'en déduis par (***) que $2v = 1$ et par suite, $v = s = \frac{1}{2}$.

Enfin, $f(1) = \frac{1}{3} = \frac{u + \frac{1}{2}}{3} + w + \frac{1}{2}$. Donc, comme $u = -w$, $\frac{1}{3} = \frac{2w}{3} + \frac{2}{3}$ et ainsi, $w = -\frac{1}{2}$ et $u = \frac{1}{2}$.

J'en conclus que $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{2} \frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)} + \frac{1}{2} \frac{1 - x}{(x^2 - x + 1)}$.

97. Applications aux calculs de somme, de dérivées nièmes et au calcul intégral.

98. Exercice : Montrer que la suite $(S_N)_{N \geq 1}$ tq $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)}$ a une limite finie quand $N \rightarrow +\infty$ et calculer cette limite.