PROGRAMME DE COLLE 2

CHAPITRE 0 : Langage mathématiques-Raisonnements-Sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

I. Notation

- Notations et vocabulaire ensemblistes : $\in, \cup, \cap, \subset, \{\ldots\}, \backslash$. Ensembles disjoints.
- définition d'une fonction (application), d'une suite réelle.
- Quantificateurs : $\forall, \exists, \exists!$
- Proposition (ou assertion) et sa négation
- Implication entre deux propositions, sa contraposée et sa réciproque.
- Equivalence.

II. Sous -ensemble remarquable de $\mathbb{R}$

- **Définition de** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \boldsymbol{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **.**
- **Calculs dans** $\mathbb{Z}$ **:**
  - Somme et produit d'entiers.
  - Définition d'un multiple, d'un diviseur, d'un entier premier, d'un entier pair, d'un entier impair.
  - Définition de deux entiers premiers entre eux, du $PPCM$ et du $PGCD$ de deux entiers.
  - Théorème de décomposition primaire : tout entier s'écrit de manière unique comme produit d'entiers premiers. Et application aux résultats suivants. Soit n et et m deux entiers.
    - Caractérisation d'un diviseur : n divise m lorsque tout entier premier de la décomposition primaire de n apparait dans la décomposition primaire de m et sa puissance dans n est inférieurs à celle dans m.
    - Caractérisation de deux entiers premiers entre eux : n et m sont premiers entre eux lorsque leurs décompositions primaires n'ont aucun entier premier en commun, lorsque $PGCD(n, m) = 1$.
    - Critère de divisibilité : si n divise mp et n et p sont premiers entre eux alors n divise m.
  - Définition de la congruence et du « modulo ».
  - Théorème de la division euclidienne : soit n et m deux entiers naturels tels que n non nul. Il existe deux uniques entiers naturels q et r tels que $m = nq + r$ et $0 \leq r < n.$ Application au résultat : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Tout entier est congru modulo m à un unique entier naturel compris entre 0 et $m - 1$.
- **Calculs dans** $\mathbb{Q}$ **:** représentant irréductible, somme, produit et quotient.
- **Calculs dans** $\mathbb{R}$ **:** $\sqrt{2}$ est irrationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel , le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est irrationnel.

III. Raisonnements

- Démonstration par disjonction de cas
- Démonstration par récurrence : Soit $H(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n .

Théo de récurrence simple : $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, H(n_0) \text{ vraie} \\ \forall n \geq n_0, (H(n) \Rightarrow H(n+1)) \end{cases} \Rightarrow (\forall n \geq n_0, H(n) vraie).$

Théo de récurrence forte $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, H(n_0) \text{ vraie} \\ \forall n \geq n_0, (H(n_0), H(n_0+1), \ldots, H(n-1), H(n) \Rightarrow H(n+1)) \end{cases} \Rightarrow (\forall n \geq n_0, H(n) vraie).$

Théo de récurrence double $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, H(n_0)\ et\ H(n_0+1) \text{ vraies} \\ \forall n \geq n_0, (H(n), H(n+1) \Rightarrow H(n+2)) \end{cases} \Rightarrow (\forall n \geq n_0, H(n) vraie).$

- Démonstration par l'absurde
- Démonstration par contraposée
- Démonstration par analyse-synthèse
- Démonstration d'une unicité

CHAPITRE 1 : Sommes et Produits finis-Suites particulières-Systèmes linéaires.

I. Sommes et produits finis

Soit (u_n) une suite réelle.

- Sommes et produits finies
  - Notation d'une somme finie et d'un produit fini.
  - Propriétés: découpage, séparation, mise en facteur.
  - Changement d'indices.
  - Ecriture de u_n en fonction de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et S_{n-1} OU en fonction de $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et P_{n-1}.
  - Somme télescopique $\sum_{k=P}^{N}(u_k - u_{k+1}) = u_P - u_{N+1}$. Produit télescopique $si\ \forall k, u_k \neq 0\ alors\ \prod_{k=P}^{N} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{N+1}}{u_P}$.
- Sommes doubles
  - Notation d'une somme double et finie.
  - Théorème d'interversion de deux sommes finies.
  - Produit de deux sommes simples et finies.

II. Formules sommatoires

- Somme d'entiers consécutifs (au carré) : pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Somme géométrique.
  - Factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$: pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, $1 - x^n = (1 - x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.
  - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$: pour tous réels a et b et tout entier naturel n non nul,
  $$a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$
  - Formule des sommes géométriques: pour tout réel x et tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$,
  $$\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1} x^p \ si \ x \neq 1 \\ n - p + 1 \ si \ x = 1 \end{cases}.$$
- Formule du binôme de Newton
  - Définition d'une factorielle, d'un coefficient binomial.
  - Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux. Valeurs particulières.
  - Formule de Pascal : pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
  - Triangle de pascal pour déterminer les valeurs des coefficients binomiaux.
  - Formule du binôme de Newton : pour tout entier naturel n et tous réels a et b , $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- Calcul de sommes par dérivation , par intégration
  - Calcul de $\sum_{k=0}^{n} kx^k \ et \ \sum_{k=0}^{n} k^2x^k$ par dérivation de $f : (x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k)$. (une autre méthode par système linéaire)
  - Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k \ et \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} x^k$ par dérivation ou intégration de $f : \left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)$ ou par transformation de $k\binom{n}{k}$ ou $\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$.

III. Formules sommatoires

- Définition, expression explicite d'une suite arithmétique, géométrique
- Définition et expression explicite d'une suite arithmético-géométrique.

IV. Systèmes linéaires

- Reconnaitre un système linéaire. Solution d'un système, résoudre un système.
- Opérations élémentaires réversibles, système échelonné, systèmes équivalents, système (in-)compatible, équation de compatibilité, système de Cramer.
- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.
- Méthode générale de Gauss pour la résolution d'un système linéaire.

QUESTIONS DE COURS :

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.

Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

1) Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2) Enoncer et démontrer (en utilisant des méthodes différentes) les formules donnant $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
3) Enoncer et démontrer la formule de factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$ et celle des sommes géométriques $\sum_{k=0}^{n} x^k \ et \ (\sum_{k=p}^{n} x^k)$.
4) Enoncer et démontrer la formule de Pascal.
5) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton

Rappeler soigneusement (avec les hypothèses) le résultat avant de le démontrer !!!