PROGRAMME DE COLLE 1

CHAPITRE 0 : Langage mathématiques-Raisonnements-Sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

I. Notation

- Notations et vocabulaire ensemblistes : $\in, \cup, \cap, \subset, \{\dots\}, \backslash$. Ensembles disjoints.
- définition d'une fonction (application), d'une suite réelle.
- Quantificateurs : $\forall, \exists, \exists!$
- Proposition (ou assertion) et sa négation
- Implication entre deux propositions, sa contraposée et sa réciproque.
- Equivalence.

II. Sous -ensemble remarquable de $\mathbb{R}$

- **Définition de** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \boldsymbol{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **.**
- **Calculs dans** $\mathbb{Z}$ **:**
  - Somme et produit d'entiers.
  - Définition d'un multiple, d'un diviseur, d'un entier premier, d'un entier pair, d'un entier impair.
  - Définition de deux entiers premiers entre eux, du $PPCM$ et du $PGCD$ de deux entiers.
  - Théorème de décomposition primaire : tout entier s'écrit de manière unique comme produit d'entiers premiers. Et application aux résultats suivants. Soit n et et m deux entiers.
    - Caractérisation d'un diviseur : n divise m lorsque tout entier premier de la décomposition primaire de n apparait dans la décomposition primaire de m et sa puissance dans n est inférieurs à celle dans m.
    - Caractérisation de deux entiers premiers entre eux : n et m sont premiers entre eux lorsque leurs décompositions primaires n'ont aucun entier premier en commun, lorsque $PGCD(n, m) = 1$.
    - Critère de divisibilité : si n divisie mp et n et p sont premiers entre eux alors n divise m.
  - Définition de la congruence et du « modulo ».
  - Théorème de la division euclidienne : soit n et m deux entiers naturels tels que n non nul. Il existe deux uniques entiers naturels q et r tels que $m = nq + r$ et $0 \leq r < n.$ Application au résultat : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Tout entier est congru modulo m à un unique entier naturel compris entre 0 et $m - 1$.
- **Calculs dans** $\mathbb{Q}$ **:** représentant irréductible, somme, produit et quotient.
- **Calculs dans** $\mathbb{R}$ **:** $\sqrt{2}$ est irrationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel , le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est irrationnel.

III. Raisonnements

- Démonstration par disjonction de cas
- Démonstration par récurrence : Soit $H(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n .

Théo de récurrence simple : $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, H(n_0) \text{ vraie} \\ \forall n \geq n_0, (H(n) \Rightarrow H(n+1)) \end{cases} \Rightarrow (\forall n \geq n_0, H(n) vraie)$.

Théo de récurrence forte $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, H(n_0) \text{ vraie} \\ \forall n \geq n_0, (H(n_0), H(n_0+1), \dots, H(n-1), H(n) \Rightarrow H(n+1)) \end{cases} \Rightarrow (\forall n \geq n_0, H(n) vraie)$.

Théo de récurrence double $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, H(n_0) \ et \ H(n_0+1) \text{ vraies} \\ \forall n \geq n_0, (H(n), H(n+1) \Rightarrow H(n+2)) \end{cases} \Rightarrow (\forall n \geq n_0, H(n) vraie)$.

- Démonstration par l'absurde
- Démonstration par contraposée
- Démonstration par analyse-synthèse
- Démonstration d'une unicité

CHAPITRE 1 : Sommes et Produits finis-Suites particulières-Systèmes linéaires.

I. Sommes et produits finis

Soit (u_n) une suite réelle.

- Sommes et produits finies
  - Notation d'une somme finie et d'un produit fini.
  - Propriétés: découpage, séparation, mise en facteur.
  - Changement d'indices.
  - Ecriture de u_n en fonction de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et S_{n-1} OU en fonction de $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et P_{n-1}.
  - Somme télescopique $\sum_{k=P}^{N}(u_k - u_{k+1}) = u_P - u_{N+1}$. Produit télescopique $si\ \forall k, u_k \neq 0\ alors\ \prod_{k=P}^{N} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{N+1}}{u_P}$.
- Sommes doubles
  - Notation d'une somme double et finie.
  - Théorème d'interversion de deux sommes finies.
  - Produit de deux sommes simples et finies.

II. Formules sommatoires

- Somme d'entiers consécutifs (au carré) : pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Somme géométrique.
  - Factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$: pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, $1 - x^n = (1 - x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.
  - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$: pour tous réels a et b et tout entier naturel n non nul,
  $$a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$
  - Formule des sommes géométriques: pour tout réel x et tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$,
  $$\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1} x^p \ si \ x \neq 1 \\ n - p + 1 \ si \ x = 1 \end{cases}.$$
- Formule du binôme de Newton
  - Définition d'une factorielle, d'un coefficient binomial.
  - Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux. Valeurs particulières.
  - Formule de Pascal : pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
  - Triangle de pascal pour déterminer les valeurs des coefficients binomiaux.
  - Formule du binôme de Newton : pour tout entier naturel n et tous réels a et b , $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

QUESTIONS DE COURS :

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.

Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

1) Démontrer le théorème de la division euclidienne sur les entiers naturels
2) Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel
3) Enoncer et démontrer les formules donnant $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$: l'une des formules sera démontrée par récurrence et l'autre par télescopage
4) Enoncer et démontrer la formule de factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$ et celle des sommes géométriques $\sum_{k=0}^{n} x^k \ et \ (\sum_{k=p}^{n} x^k)$
5) Enoncer et démontrer la formule de Pascal

~~6) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton**. (à regarder mais pas à savoir refaire)~~

Rappeler soigneusement (avec les hypothèses) le résultat avant de le démontrer !!!

1) Enoncé : théorème de la division euclidienne. soit n et m deux entiers naturels tels que n non nul. Il existe deux uniques entiers naturels q et r tels que $m = nq + r$ et $0 \leq r < n$.

Existence : je remarque que $0 < n < 2n < 3n < 4n < \cdots$ et $\mathbb{N}$ est la réunion des ensembles disjoints $[\![kn; (k+1)n[\![$ tels que $k \in \mathbb{N}$. Il existe donc un entier naturel q tel que : $qn \leq m < (q+1)n$. Alors $0 \leq m - qn < n$. Posons $r = m - qn$. Alors $q \ et \ r$ vérifient : $m = qn + r$ et $0 \leq r < n$.Donc $q \ et \ r$ conviennent.
Unicité : Supposons qu'il existe deux « autres « entiers $q' \ et \ r'$ vérifiant : $m = q'n + r'$ et $0 \leq r' < n$.
Alors, $m = qn + r = q'n + r'$. Donc, $n(q - q') = r' - r$. Or, $0 \leq r' < n \ et - n < -r \leq 0$. Donc, $-n < r' - r < n$. Par conséquent, $-n < n(q - q') < n$. Comme $n > 0$, on obtient : $-1 < q - q' < 1$. Or le seul entier strictement compris entre -1 et 1 est 0. Donc $q - q' = 0$. Par conséquent, $r' - r = n(q - q') = r' - r = 0$. Ainsi, $q = q'$et $r = r'$. Donc r t q sont les deux uniques entiers vérifiant : $m = qn + r$ et $0 \leq r < n$.

2) Enoncé : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Imaginons un instant que $\sqrt{2}$ n'est pas irrationnel. Alors $\sqrt{2}$ est rationnel. Donc il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (représentant irréductible de $\sqrt{2}$) . Alors, $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 \overset{(**)}{\hat{=}} p^2$. Par conséquent, p^2 est pair et par suite $p \ est \ pair$. Donc il existe un entier m tel que : $p = 2m$. Alors $(**)$ s'écrit $2q^2 = 4m^2$ et par suite $q^2 = 2m^2$. Par conséquent m est pair tout comme p. 2 est donc un diviseur commun de $m \ et \ p$ qui ne sont pas donc pas premiers entre eux. Cela contredit la définition de p et q. Ainsi, l'hypothèse « $\sqrt{2}$ est rationnel » aboutissant à une contradiction, cette hypothèse est fausse et j'en conclus que sa négation est vraie i.e. $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel i.e. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3) Enoncé : pour tout n un entier naturel, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Première méthode par récurrence : Notons $H(n)$ la propriété " $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

Initialisation : $\frac{0(0+1)}{2} = 0 = \sum_{k=0}^{0} k$. Donc, $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ est vraie et sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie i.e. montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$. Nous avons $\sum_{k=0}^{n+1} k = (\sum_{k=0}^{n} k) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. OK !! Ainsi, $(H(n) \Rightarrow H(n+1))$.

Conclusion : le théorème de récurrence simple assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Deuxième méthode par télescopage : Démo de $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$**.** Soit n un entier naturel.

D'une part, $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(k+1)^3}_{u_{k+1}} - \underbrace{k^3}_{u_k} \overset{télescopage}{\hat{=}} u_{n+1} - u_0 = (n+1)^3$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 + 3k + 1 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$.

Par conséquent, $3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^3$ et ainsi,

$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}\right] = \frac{n+1}{6}[2(n+1)^2 - 2 - 3n] = \frac{(n+1)}{6}[2n^2 + n] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) Enoncé :

- Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x , $1 - x^n = (1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.
- Pour tout entier naturel n et tout réel x , $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ n+1 & si\ x = 1 \end{cases}$.
- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$ et tout réel x , $\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1} x^p & si\ x \neq 1 \\ n-p+1 & si\ x = 1 \end{cases}$.

- Soit n entier naturel n non nul et x un réel. $(1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - x\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\underbrace{x^k}_{u_k} - \underbrace{x^{k+1}}_{u_{k+1}}\right)}_{\substack{somme \\ télescopioque}} = u_0 - u_{(n+1)-1} = x^0 - x^n$.

  Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \mathbb{R}, 1 - X^N = (1-X)(\sum_{k=0}^{N-1} X^k)\ \ (*)$
- Soit n un entier naturel et x un réel.
  1er cas : $x = 1$. $\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
  2ème cas : $x \neq 1$ alors d'après ce qui précède $(1-x)(\sum_{k=0}^{n} x^k) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique\ (*) \\ avec\ X=x\neq 1\ et\ N=n+1}} 1 - x^{n+1};\ puisque\ x \neq 1, 1-x \neq 0\ et\ par\ suite,\ \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

  Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N+1}-1}{X-1} & si\ X \neq 1 \\ N+1 & si\ X = 1 \end{cases}\ \ (**)$.
- Soit p *et* n deux entiers naturels tels que $p \leq n$ et x un réel.
  1er cas : $x = 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} 1^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$.
  2ème cas : $x \neq 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} x^p x^{k-p} = x^p(\sum_{k=p}^{n} x^{k-p}) = x^p(\sum_{j=0}^{n-p} x^j) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique\ (**) \\ X=x\neq 1\ et\ N=n-p}} x^p \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1}$.

  Ainsi, $\forall (N,P) \in \mathbb{N}^2 / P \leq N, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=P}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N-P+1}-1}{X-1} X^P & si\ X \neq 1 \\ N-P+1 & si\ X = 1 \end{cases}\ \ (**)$.

5) Enoncé : Formule de Pascal. Pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

<u>1er cas : $k > n$.</u> Alors $k+1 > n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.La formule de Pascal est donc vérifiée si $k > n$.

<u>2ème cas : $k = n$.</u> Alors $k+1 = n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k+1}\ et\ \binom{n}{k+1} = 0$. La formule de Pascal est donc vérifiée si $k = n$.

<u>3ème cas : $k < n$.</u> Alors $k \leq n-1\ donc\ k+1 \leq n < n+1$. Et par suite, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-(k+1))!}$ et $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$. Alors ,

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = n!\left[\frac{1}{k!(n-k)!} + \frac{1}{(k+1)!(n-k-1))!}\right] = n!\left[\frac{1}{k!((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{1}{(k!)(k+1)(n-k-1))!}\right]$

$= n!\left[\frac{k+1}{k!(k+1)((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{(n-k)}{(k!)(k+1)((n-k-1))!)(n-k)}\right]$

$= n!\left[\frac{k+1}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{n+1}{(k+1)!(n-k)!}\right] = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$.

Donc la formule de Pascal est vérifiée si $k < n$.

Ainsi, $\forall (N,K) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{K+1}{K+1}$.

6) Enoncé : Formule du binôme de Newton Pour tout entier naturel n et tous réels a et b , $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Soit a et b deux réels. Effectuons une preuve par récurrence sur n. Posons $H(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ".

<u>Initialisation</u> : $(a+b)^0 = 1\ et\ \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Donc $H(0)$ est vraie.

<u>Propagation</u> : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ est vraie et sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)a + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)b$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

Changement d'indice dans la première somme uniquement : $j = k+1\ \ i.e.\ k = j-1$. $k \in [\![0,n]\!] \Leftrightarrow j \in [\![1,n+1]\!]$. Je remplace tous les k et que les k par $j-1$.

$$= \left(\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

J'isole le terme correspondant à « $k = n+1$» dans la première somme.

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

J'isole le terme correspondant à « $k = 0$» dans la deuxième somme.

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k}\right) + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + a^{n+1}b^0 + a^0 b^{n+1}$$

Formule de Pascal

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k}\right) + 1a^{n+1}b^0 + 1a^0 b^{n+1}$$

Car $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.\quad OK\ !!!$$

<u>Conclusion</u> : Le théorème de récurrence simple permet alors de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) est\ vraie.$