DL 1.1 A rendre lundi 22 septembre 2025

Ex 1 Résoudre le système linéaire (S): $\begin{cases} ax + y - a^3 z = 1 \\ ax - a^2 y + az = 1 \\ x - ay + a^2 z = a \end{cases}$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en discutant selon les valeurs du paramètre réel a. Vous indiquerez toutes les opérations que vous effectuerez**.**

DL 1.2 A rendre mardi 23 septembre 2025

Ex 2 Soit $S_n = \sum_{1 \leq i,k \leq n} \frac{i}{i+k}$. Montrer que $S_n = \sum_{1 \leq i,k \leq n} \frac{k}{i+k}$. En déduire S_n.

DL 1.3 A rendre lundi 29 septembre 2025

Ex 3 Soit n un entier naturel fixé et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^4$.

1. Rappeler sans démonstration $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$ *et* $\sum_{k=0}^{n} k^3$.
2. Déterminer (avec preuve) la valeur de T_n.
3. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Calculer $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p}$.
4. Retrouver $\sum_{k=0}^{n} k$, grâce à la somme calculer au 3.
5. Déterminer des entiers a , b, c et d tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \backslash \{0,1,2,3\}, k^4 = a\binom{k}{4} + b\binom{k}{3} + c\binom{k}{2} + d\binom{k}{1}$.
6. Retrouver alors la valeur de T_n donnée au 1.

Ex 4 Supposons qu'il existe a et b réels tels que $b - 1 - a \neq 0$ *et* pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. Montrons que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n + b)u_{n+1} - (n + b - 1)u_n = (a - b + 1)u_n$.
2. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{a+1-b} [(n + b)u_{n+1} - (b - 1)u_0]$.
3. Application : Soit $p \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.
   - 3.1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (k + p + 1)u_{k+1} = (k + 1)u_k$.
   - 3.2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{1-p}\big((n + 1)u_n - 1\big)$.
   - 3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.