Corrigé DL 0

Ex 0 Les phrases suivantes sont-elles VRAIES ou FAUSSES ? justifier votre réponse (n'hésitez pas à faire un dessin pour certaine réponse).

1. $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, (x < A \Longrightarrow x^3 < -1000000)$. **VRAI** $A = -10$ *convient* puisque la fonction « cube » est strictement croissante
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^4 > 16 \Leftrightarrow x > 2)$. **FAUX** car $x = -4$ vérifie $x^4 > 16$ mais ne vérifie pas $x > 2$.
3. $\exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p \Longrightarrow \ln(n^2+1) \geq 1000)$. **VRAI**. Car $\ln(n^2+1) \geq 1000) \Leftrightarrow \mathrm{n}^2 + 1 \geq \mathrm{e}^{1000} \Longleftarrow n \geq \sqrt{\mathrm{e}^{1000} - 1}$. Or, $\sqrt{\mathrm{e}^{1000} - 1} \leq 15 \times 10^{217}$. Donc p=15×10^{217} convient.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} /\ e^n \leq p.)$. **VRAI** *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* p *le plus proche et strictement au dessus de* e^n convient (cet entier p *le plus proche et strictement au dessus de* e^n est $p = \lfloor e^n \rfloor + 1$)
5. $\exists A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, e^n \leq A$. **FAUX** car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$. Donc la suite (e^n) n'est pas majorée.

Ex 1 Soit n un entier naturel. Montrer par contraposée que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair. Indication : on écrira n modulo 4.

Supposons que n n'est pas pair i.e. n est impair. Et montrons que $n^2 - 1$ est divisible par 8.
On sait qu'il existe un entier k tel que : $n = 4k$ ou $n = 4k+1$ ou $n = 2+4k$ ou $n = 3+4k$. Comme n est impair, seuls deux cas sont possibles : $n = 4k+1$ ou $n = 3+4k$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
1 er cas $n = 4k+1$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 - 1 = (4k+1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + k)$. Donc 8 divise $n^2 - 1$.
2 ème cas $n = 4k+3$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 - 1 = (4k+3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1)$. Donc 8 divise $n^2 - 1$.
Ainsi, si n est impair alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8. Et par contraposée, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.

Ex 2 Soit u la suite définie par : $u_0 = 2 et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n})$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ , u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}$.
2) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3) On rappelle que si $x \neq 1\ et\ n \in \mathbb{N}$ alors $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

1) Posons $v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}$Montrons par récurrence sur n que la propriété $H(n)$: "$u_n = v_n$" est toujours vraie.
c

Je sais que $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}\ et\ \ u_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n})$.Par conséquent,

$$u_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}\right) + \sqrt{1 + 24(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}})}\right) = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}\right) + \frac{1}{16}\sqrt{1 + 3 \times 2^3 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^4}\sqrt{9 + 3 \times \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{2n-4}}} = \frac{1}{2^4}\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^4}\sqrt{3^2 + 2 \times 3 \times \frac{1}{2^{n-2}} + \left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^4}\sqrt{\left(3 + \frac{1}{2^{n-2}}\right)^2} = \frac{1}{2^4}\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^4}\left(3 + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{2^4}\left(\frac{7+9}{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2(n+1)-1}}$$

$= v_{n+1}$. **C'est gagné !!**

Conclusion : J'en conclus par le théorème de récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4^n}$.

2) Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1\ et\ \left|\frac{1}{4}\right| < 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n}$. J'en déduis que ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.
3) De plus, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^k} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4^k}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}(n+1) + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + \frac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{2}{3} \times \frac{1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.