TD 2

Inégalités et premières fonctions réelles.

I Fonctions polynômiales.

Y-a-t-il une factorisation évidente ?
Y-a-t-il une racine évidente ?

Utiliser la somme et le produit des racines d'un polynôme de degré 2.

Penser à poser $X = \cdots$ de sorte que l' expression en X soit polynomiale.

Bien connaitre ses identités remarquables

Ex 1 Soit m, a et b des réels tels que $a < b$. Déterminer le signe de $u(x)$ en fonction de x.

a. $u(x) = 8x^3 + x^2 - 7x$
b. $u(x) = x^2 - 11x + 28$
c. $u(x) = 7x^2 + 23x + 6$ sachant que (-3) est racine de u
d. $u(x) = 2x^3 - x^2 + 3$
e. $u(x) = x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 13x + 6$
f. $u(x) = (x+a)(x+b) - (m+a)(m+b)$
g. $u(x) = (m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2$
h. $u(x) = x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)x - \sqrt{6}$
i. $u(x) = x^4 + 2x^2 - 48$
j. $u(x) = -2x^2 - 6|x| + 5$
k. $u(x) = e^{6x} - 2e^{3x} + 3$
l. $u(x) = 2x - \sqrt{x} - 3$
m. $u(x) = x^9 + 2x^5 - 35x$
n. $u(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
o. $u(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
p. $u(x) = (x+3)(2x-1) - 27 - x^3$
q. $u(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Ex 2 Résoudre

a. $4 - 7x^2 > 0$
b. $x^4 < (\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{2}$
c. $(x^4-1)^2 > 2$
d. $x^2 + 1 > 0$
e. $x^4 + 2 \leq 0$
f. $(x+2)^4 \geq 1$
g. $8 + x^3 \geq 0$
h. $|x|^3 - 2x^2 \geq 0$
i. $(\ln(x))^2 + 4 \leq 4\ln(x)$
j. $-2e^x + 3e^{-x} + 1 < 0$
k. $(\ln(x))^3 \geq 12(\ln(x))^2$-$35\ln(x))$
l. $\frac{\sqrt{x}}{1+x} = m$
m. $\frac{1}{x} > -2$
n. $\frac{1}{3-x} > x$
o. $\frac{7x+9}{x^2+3x+2} \geq \frac{1-5x}{x^3+1}$
p. $\frac{1}{1-x} < \frac{x}{x+2}$
q. $\sqrt{|x|-1} > 2$
r. $\sqrt{x^2+1} > x$
s. $\sqrt{-x-1} > x - 2.$
t. $\sqrt{-x-1} > 2 + x$
u. $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} > \frac{1}{2}$
v. $\ln(x-1) - \ln(x+2) < \ln(x)$

Si f est strictement croissante sur l'intervalle I alors $\forall(x,y) \in I^2, (x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y))$.
Donc je dois m' assurer que X et Y sont positifs avant d'affirmer que : $(X < Y \Leftrightarrow X^2 < Y^2)$ Et je dois m' assurer que X et Y sont de même signe avant d'affirmer que $\left(X < Y \Leftrightarrow \frac{1}{X} > \frac{1}{Y}\right)$.
De la même façon, si je sais que $X < Y$ alors avant de dire que $\frac{1}{X} > \frac{1}{Y}$, il faut que je précise que $0 < X < Y$ ou bien $X < Y < 0$. (rédaction : Je sais que $0 < X < Y$ donc $\frac{1}{X} > \frac{1}{Y} > 0$).

Penser à étudier le domaine de définition des expressions de l'équation avant de démarrer la résolution.

Ex 3 en autonomie Les assertions suivantes sont -elles vraies ou fausses ? Les corriger le cas échéant.

a. $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2$. VRAI ou FAUX
b. Si $x \in [-1,3]$ alors $x^3 > -2$. VRAI ou FAUX
c. $x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$. VRAI ou FAUX
d. $x \in [0,16] \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 4$. VRAI ou FAUX
e. $\frac{x-1}{x+2} < 0$ *siet ssi* $x < 1$. VRAI ou FAUX
f. $\sqrt{x-1} < 1$ dès que $1 \leq x < 2$. VRAI ou FAUX
g. $(x-1)^2 > 4$ seulement si $x > 3$ VRAI ou FAUX

Réponse : $a.F - b.V - c.F - d.V - e.F - f.V - g.F.$

Lorsque l'on rencontre une FI « 0/0 » dans un calcul de limite en un REEL x_0, on peut tenter de factoriser les numérateur et dénominateur par $x - x_0$ ou $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ puis on simplifie.

Ex 4 Soit a un réel. Déterminer le domaine de définition de t. Etudier la limite de t en x_0.

1. $t(x) = \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$ et $x_0 = 2$
2. $t(x) = \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}$ et $x_0 = 4$ puis $x_0 = +\infty$
3. $t(x) = \frac{(a-1)x+x^2-a}{x^3+a^3}$ et $x_0 = -a$ puis $x_0 = +\infty$

Ex 5 Déterminer toutes les fonctions polynomiales P de degré 3 vérifiant $P(-1) = P(4) = 0$ et $P(1) = 1$.

Ex 6 Trouver tous les réels m tels que l'équation $mx^2 + 2(4+m)x + 15 + m = 0$ admette deux solutions distinctes de signes opposés.

Ex 7 Déterminer les réels a qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$.

Bien connaitre le lien entre le signe et le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré 2 et le signe de son discrimant.

Ex 8 Soit $h(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$.

a. Montrer que : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha < \beta$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$.
b. En déduire le signe de $h(x)$ en fonction de x.

Lorsque je connais le produit et la somme de deux réels, je sais déterminer ces deux réels.

Ex 9 Soit a et b des entiers distincts et P la fonction telle que

a. Factoriser $P(x)$ sans calculer Δ.
b. En déduire que pour tout entier c , $P(c)$ est un entier multiple de $(a-b)$, de $(b-c)$ et de $(c-a)$.

Ex 10 Soit $A = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$. Montrer que : $A^3 - 7A - 36 = 0$. En déduire que $A = 4$.

II Comparer

Ex 11

1. Soit a, b, c et d réels tq $a < b$ et $c < d$. Soit $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$. Encadrer, au plus près et si possible, $2x - 3y$, xy et $\frac{x}{y}$.
2. Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$. Peut -on encadrer xy ? $\frac{x}{y}$? Montrer que $4 + x + y + xy \in [3,7]$. En déduire $\min A$ et $\max A$ où $A = \{4 + x + y + xy / (x, y) \in [-1,1]^2\}$.

Ex 12 Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$. Pour quelles valeurs de a et b, y-a-t-il égalité ?
2. $\forall(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.
3. $\forall(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $(0 < a \leq b \leq c \leq d \Rightarrow \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{a}{d} + \frac{d}{a})$.
4. $\forall(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

1. Démarrer d'un encadrement connu.
2. Etudier le signe de la différence. Faire ensuite apparaitre une somme ou un produit de réels positifs.
3. Comparer les carrés ou les inverses lorsque les deux réels sont de même signe.

Ex 13 Montrer que $\forall n \geq n_0$, $n! \geq 2^n$ où n_0 est un entier naturel à déterminer, le plus petit possible.

Ex 14 Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout p entier naturel non nul, $(1 - x)^p \leq 1 - x^p$.

Ex 15 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)_{n>0}$.

Ex 16 Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $\prod_{k=0}^{n}(2k + 1)! \geq [(n + 1)!]^{n+1}$.

Ex 17 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels tels que : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = n$. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k = 1$.

Ex 18 Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$.

Ex 19 Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réel tels que $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont strictement positifs.

1. On pose $m = \min\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ et $M = \max\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Montrer que : $m \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq M$.
2. En déduire que $\min\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\right\} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\right\}$.

Ex 21 Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tq : $0 < m < M$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels tq $b_1, \dots, b_n$ non nuls et $\forall k \in [\![1, n]\!], \frac{a_k}{b_k} \in [m, M]$.

1. Qui peut-on choisir pour m et M ?
2. En étudiant le signe de $S_n = \sum_{k=1}^{n}(Mb_k - a_k)(a_k - mb_k)$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + mM \sum_{k=1}^{n} b^2 \leq (m + M) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
3. On pose $I = \frac{m+M}{2}$ et $G = \sqrt{mM}$. Déduire de 1) que : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b^2} \leq \frac{I}{G} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Ex 22 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs.

1. Montrer que : $\forall(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, ij \geq i + j - 1$.
2. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.

Pour encadrer (majorer) une somme finie $\sum_{k=1}^{n} a_k$,

- on fixe arbitrairement $k \in [\![1, n]\!]$.
- on encadre (majore) a_k en utilisant $1 \leq k \leq n$ et les inégalités usuelles .
- n somme ces n inégalités sur $k \in [\![1, n]\!]$.

Ex 23 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Montrer qu'il existe une suite v telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}, u_n = 2 + \frac{2}{n} + v_n$ et $0 < v_n < \frac{2}{n}$.
Qu'en déduit-on sur la suite u ?

Ex 24 Encadrer, minorer ou majorer de u_n par de bonnes suites et en appliquant le théorème des gendarmes, calculer la limite de chacune des suites u dont le terme général est le suivant :

a. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ tq $n > 0$ **b.** $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ tq $n \geq 0$ **c.** $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$ tq $n > 0$

Ex 25 1. Montrer que : $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.

2. En déduire la limite de la suite u définie par : $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ tq $n > 0$.

Pour prouver que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$, on doit montrer que $\forall x \in I, g(x) - f(x) \geq 0$.
Lorsqu'on ne parvient pas à le démontrer algébriquement , on peut :

- Poser $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Etudier h pour connaitre son signe.

Ex 26 Soit a un réel et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + a^{2^k}\right)$.

1. Montrer que u est croissante et même strictement croissante si $|a| \neq 1$.
2. Montrer que si $|a| > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. Montrer que si $|a| < 1$ alors (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

III. Racine carrée et quantité conjuguée- Racines $n^{\text{ièmes}}$ réelles.

Ex 27 1) Soit a et x deux réels. Quel est le signe de $x-\sqrt{x^2+a^2}$ *et de* $x+\sqrt{x^2+a^2}$? (justifier)
2) Ecrire $u(x)=2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+2x+1$ sous la forme d'un carré.
3) Soit $a\in[1,+\infty[$. Simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

Ex 28 Déterminer le domaine de définition de $f(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}}$.

Ex 29 Soit x et y deux rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrons que : $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

Ex 30 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Ex 31 Résoudre les équations suivantes d'inconnues x réelles : (E_1): $\sqrt[5]{x^4}=1$. (E_2): $4\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}=7$. (E_3): $\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\geq 2\sqrt{x}$.

Ex 32 Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$, $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$. Est-elle vraie pour $n=2$?

Ex 33 Démontrer que pour tous réels x et y , pour tout entier naturel $n\geq 2$, $\sqrt[n]{|x\pm y|}\leq\sqrt[n]{|x|}+\sqrt[n]{|y|}$.

Ex 34 **1.** Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, \ln(x)\leq x-1$.
2. Soit $a_1,a_2,\dots,a_n$ des réels strictement positifs. On pose $m=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$, $g=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$ et $h=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$.

a. En appliquant l'inégalité obtenue au 1. à chaque réel $\frac{a_k}{m}$, montrer que $g\leq m$.
b. En appliquant l'inégalité obtenue au 2. a. aux réels $\frac{1}{a_k}$, montrer que $h\leq g$.

Pour faire disparaitre les valeurs absolues, j'utilise :

$|X|=\begin{cases}X \text{ si } X\geq 0\\ -X \text{ si } X<0\end{cases}$ ou $|X|^2=X^2$

Ex 35 Calculer $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{x^n-a^n}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}$ où $a\in\mathbb{R}^+$ *et* $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

Ex 36 Application de la quantité conjuguée :
1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.Calculer $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$. En déduire la limite de (S_n).
2. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

IV. Valeur absolue.

Ex 36 Résoudre $|2x^2-x-1|=|1-x^3|$.

Si a est un réel positif et X un réel alors

$|X|\leq a\Leftrightarrow -a\leq X\leq a\Leftrightarrow X^2\leq a^2$.

Ex 37 Soit x un réel. Montrer que : $|x-1|\leq\frac{1}{3}\Longrightarrow|x^2-1|\leq 1$.

Ex 38 Démontrer que pour tous réels x et y , $\sqrt{|x\pm y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$.

Connaitre la première et la deuxième inégalité triangulaire.

Ex 39 Montrer que : pour tous réels a et b, $|a|+|b|\leq|a+b|+|a-b|$.

Ex 40 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|\leq 1-\frac{1}{n}$.

Ex 41 1. Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.Déterminer le domaine de définition Df de f. Puis calculer la limite de f en 2.
2. Montrer que $\forall x\in Df\cap\mathbb{R}^+$, $\left|f(x)-\frac{3}{4}\right|\leq\frac{|x-2|}{80}$.
3. En déduire un réel $r\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall x\in[2-r,2+r]\backslash\{2\}, f(x)\in[\frac{74}{100};\frac{76}{100}]$.

$\boldsymbol{Df=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\text{existe}\}}$

Ex 41 bis Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$ *et* $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right|\leq\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$.

V. Partie bornée - max et min.

Ex 42 Soit $x\in[0,1]$.Prouver que pour tout entier naturel n , $0\leq\frac{x^n}{1+x}\leq\min\left(\frac{1}{1+x},x^n,1\right)$.

$M=\max(A)$ lorsque M majore A et $M\in A$.

Ex 43 Soit $A=\left\{\frac{x+2y}{x+y+1}/(x,y)\in[0,1]^2\right\}$. Montrer que A est bornée et admet un minimum et un maximum à déterminer.

Idem avec $A=\left\{\frac{4\sin(e^y)-5\cos(x+y)-6}{3-2\cos(xy-1)}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Ex 44 Soit $A=\{x(1-x)/x\in[0,1]\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum que l'on déterminera.

Ex 45 1) Montrer que la suite $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend en décroissant vers 0.

2) Comparer $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$. En déduire que $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n \in \mathbb{N} / 0 < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \varepsilon$.
4) Soit $A = \{\sqrt{n+1}-\sqrt{n} / n \in \mathbb{N}\}$. Justifier que A est bornée et admet un maximum.
5) Montrer que A n'a pas de minimum et l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément à déterminer.

Ex 46 1. Montrer que : pour tous réels $a,\ b,\ c\ et\ d,\ |ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.
2. Montrer que : $|ac+bd| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ sietssi $((a,b)=(0,0)\ ou\ \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $c = ka\ et\ d = kb)$
3. Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$ et $A = \{x+2y / (x,y) \in C\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum.

VI. Partie entière.

Ex 47 Soit $x\ et\ y$ deux réels. Montrer que : $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$.
- $p = \lfloor x\rfloor \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq x < p+1 \\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$.

Ex 48 Soit n un entier naturel.
1) Montrer que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$est un entier pair.
2) Montrer que $\lfloor(3+\sqrt{5})^n\rfloor$ est un entier impair.

Ex 49 Résoudre $\lfloor 2x+3\rfloor = \lfloor -x+5\rfloor$, d'inconnue x réelle.

Ex 50 Montrer que pour tous entiers relatifs n et m, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor = n$.

Ex 51 Montrons que : pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

Ex 52 Soit n un entier naturel. Déterminer $\left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor$.

Ex 53 ** On souhaite montrer que $\forall n \in \mathbb{N}*,\ \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$
1. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Montrer que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
2. Imaginons un instant qu'il existe un entier n non nul tel que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
a) Montrer alors que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
b) En déduire que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2$.
c) Expliquer pourquoi cette égalité est impossible et conclure.

Ex 54 Soit x réel et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx\rfloor}{n^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{(n+1)x}{2n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Ex 55 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{k+3\sqrt{k}}{k}\right\rfloor$.

Ex 56 Soit $A = \left\{\frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n\right\}$.
1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} /\ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.
2. En déduire qu'entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.

Ex 57 1. Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor$. (disjonction de cas : $x \in \left[\lfloor x\rfloor; \lfloor x\rfloor + \frac{1}{2}\right[$ ou $x \in [\lfloor x\rfloor; \lfloor x\rfloor + 1[$).
2. Donner une méthode pour prouver que : pour tout réel x, $\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+2}{3}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.
3. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor$.
a. Montrer que $g: (x \mapsto f(x) - \lfloor x\rfloor)$ est 1-périodique (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x+1) = g(x)$).
b. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x\rfloor$.

Ex 58 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} -\lfloor x\rfloor - 1\ si\ x \notin \mathbb{Z} \\ -x\ si\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x\rfloor)\ et\ g: (x \mapsto |2x-1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer, si elle existe, la limite de f en k^+. Faire de même en k^-. Qu'en déduit-on sur f ? Tracer Cf.

Ex 59 Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to p\\x>p}} \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to p\\x<p}} \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ où $p \in \mathbb{Z}$ puis $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$.

Ex 60 Représenter la courbe de f: $\left(x \mapsto \frac{1}{\lfloor x - \lfloor -x\rfloor\rfloor}\right)$.

VII. Fonctions rationnelles.

Ex 61 Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

1. $F(x) = \frac{1-x^4}{x^3+1}$
2. $F(x) = \frac{1-3x}{x^3-4x}$
3. $F(x) = \frac{x}{x^4-1}$
4. $F(x) = \frac{x^4-3x^2+1}{x^4+2x^2+1}$

Ex 62

1. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k+1}{k^3-k^2-4k+4}$.
2. Trouver deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$. En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$.