# COLLE 1

**QDC : Enoncer et démontrer les formules de somme des carrés des entiers consécutifs compris entre 1 et n**

**Ex 1** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n}[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1]$ de deux manières et en déduire $V_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

**Ex 2** Résoudre le système $\begin{cases} PPCM(x,y) = 540 \\ PGCD(x,y) = 18 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{N}^2$.

**Ex 3** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(n) = \prod_{k=0}^{n} 3^{\binom{n}{k}}$.

**QDC : : Enoncer et démontrer le théorème de la division euclidienne.**

**Ex 1** Montrer que $\forall(k,n) \in (\mathbb{N}\backslash\{0,1\})^2\ k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$

**Ex 2** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer, avec la méthode d'Euclide, $PGCD(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13)$

**Ex 3** On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\, 2^k$.

1) Montrer que $S_{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2$.
2) En déduire $S_n$.

**QDC : Enoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal.**

**Ex 1** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}$.
2. Retrouver, grâce à $S_n$, la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.

**Ex 2** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Trouver deux entiers relatifs $a$ et $b$ (qui peuvent dépendre de $n$) tels que $a(n^2+n) + b(2n+1) = 1$.
2. En déduire $PGCD(n^2+n, 2n+1)$.

**Ex 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k+1} - 2(k+1)^2 + 2^{2k-1}3^{n-k}$.

**Ex 1** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n}[5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1]$ de deux manières pour en déduire $V_n = \sum_{k=0}^{n} k^4$.

**Ex 2** Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$.

**Ex 3** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 9^k$ *et* $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 9^k$. Calculer $X_n + 3Y_n$ et $X_n - 3Y_n$. En déduire $X_n$ *et* $Y_n$.

**Ex 4** $Soit\ (n,p,i) \in \mathbb{N}^3 tel\ que\ k \leq i \leq n$. Montrer que $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$. En déduire $S_n = \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

**Ex 5** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(n) = \prod_{k=0}^{n} 3^k$.

**Ex 6** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S(n) = \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}$.

**Ex 7** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 9^k$ *et* $Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 9^k$. Calculer $X_n + 3Y_n$ et $X_n - 3Y_n$. En déduire $X_n$ *et* $Y_n$.

**Ex 8** Résoudre $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$ d'inconnue $n$ entier naturel.

**Ex 9** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq nx$.

**Ex 10** Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$.

**Ex 11** Calculer $S_n = \sum_{k=2}^{n} ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ puis donner sa limite quand $n \to +\infty$.

**Ex 12** Soit $n \in \mathbb{N}$.

3. Trouver deux entiers relatifs $a$ et $b$ (qui peuvent dépendre de $n$) tels que $a(n^2+n) + b(2n+1) = 1$.
4. En déduire $PGCD(n^2+n, 2n+1)$