

COLLE 2 Pcsi

QDC : Enoncer et démontrer la formule de Pascal.

Ex 1 Soit u et v les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2u_n-1}{u_n+1}$.

1. Montrer que les suites u et v sont bien définies.
2. Supposons ici que la suite u converge vers un réel L . Quel est alors la valeur de L ?
3. Montrer que v est géométrique.
4. En déduire une expression explicite de u_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}\{0,1\}$. Calculer $S_n = \sum_{k=2}^n k \times k!$

Ex 3 Résoudre le système linéaire : $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$

QDC : Enoncer et démontrer la formule de factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$ et celle des sommes géométriques

Ex 1 Soit $S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

- 1) Montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. En déduire S_n .
- 2) En transformant de même $k(k-1) \binom{n}{k}$, déterminer T_n .

Ex 2 Résoudre le système linéaire : $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$

Ex 3 Résoudre le système $\begin{cases} PPCM(x, y) = 540 \\ PGCD(x, y) = 18 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

QDC : Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton

Ex 1 : Soit p un entier naturel tel que $p \geq 3$. Montrer que : $\left(1 + \frac{2}{p}\right)^p > 3$.

Ex 2 pour tout n un entier naturel non nul, on note $D(n)$ le nombre de ses diviseurs entiers naturels.

1. Soit n un entier naturel tel que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, la décomposition primaire de n . Déterminer $D(n)$ en fonction des $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.
2. Soit a et b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Montrer que $D(ab) = D(a)D(b)$.
3. Montrer que n est le carré d'un entier si et seulement si $D(n)$ est impair.
4. Que dire de n si $D(n) = 3$?

Ex 3 Résoudre le système linéaire : $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = a \\ 3x - 4y + 3z = b \\ 2x + 3y - 4z = a \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a et b sont des paramètres réels.

Ex 4: Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout p entier naturel non nul, $(1 - x)^p \leq 1 - x^p$.

Ex 4 Soit $n \in \mathbb{N}\{0,1\}$. Calculer $S_n = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$