PROGRAMME DE COLLE 3

CHAPITRE 1 : Sommes et Produits finis-Suites particulières-Systèmes linéaires.FIN

- Calcul de sommes par dérivation , par intégration
  - Calcul de $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2x^k$ par dérivation de $f:(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k)$. (une autre méthode par système linéaire)
  - Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{k+1}x^k$ par dérivation ou intégration de $f:\left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k\right)$ ou par transformation de $k\binom{n}{k}$ ou $\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$.

III. Suites particulières

- Définition, expression explicite d'une suite arithmétique, géométrique
- Définition et expression explicite d'une suite arithmético-géométrique.

IV. Systèmes linéaires

- Reconnaitre un système linéaire. Solution d'un système, résoudre un système.
- Opérations élémentaires réversibles, système échelonné, systèmes équivalents, système (in-)compatible, équation de compatibilité, système de Cramer.
- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.
- Méthode générale de Gauss pour la résolution d'un système linéaire.

CHAPITRE 2 : Inégalités et premières fonctions réelles.

I Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.

- Règles de calcul sur les inégalités dans $\mathbb{R}$. Extension aux $\sum$ et $\prod$.
- Somme nulle de réels positifs.
- Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$. Formes indéterminées.
- Définition d'une suite (strictement) croissante ou décroissante. Définition d'une fonction (strictement) croissante ou décroissante.
- Méthodes

Méthodes pour comparer deux nombres :

- Démarrer d'une inégalité connue et utiliser les règles de calcul sur les inégalités
- Etudier le signe de leur différence
- Comparer leur quotient avec 1
- Comparer leurs images par une fonction strictement monotone
- Comparer avec un réel intermédiaire (transitivité de la relation d'ordre)

Méthodes pour démontrer : $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.

- Fixer $x \in I$. Comparer les réels $f(x)$ et $g(x)$ avec les méthodes précédentes.
- Etudier la fonction h telle que : $h(x) = f(x) - g(x)$, dans le but de connaitre son signe.

Méthodes pour démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

- Fixer $n \in \mathbb{N}$. Comparer les réels u_n et $v_n$avec les méthodes précédentes.
- Faire une récurrence sur n.
- S'il existe deux fonctions f et g telles que : $\forall n,\ u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$, étudier la fonction h telle que : $h(x) = f(x) - g(x)$, dans le but de connaitre son signe.

II Valeur absolue

- Définition de la valeur absolue d'un réel . Tracé de la fonction valeur absolue.
- Inégalité importante : Soit a et x deux réels. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
- Règles de calcul sur les valeurs absolues : pour tous réels a et b, $|ab| = |a||b|$ et si b non nul, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ et généralisations.
- Inégalités triangulaires et généralisation.

III Racine carrée et racine $n$ième.

- Définition de la racine carrée d'un réel positif.
- Règles de calcul sur les racines carrées : $\sqrt{x^2} = |x|, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si b non nul, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Inégalités classiques : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Courbe de la fonction racine carrée.

- Quantité conjuguée d'une expression de la forme $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (ou $A-\sqrt{b}$).
- Définition de la racine $n$ième d'un réel suivant la parité de n. Tracé des fonctions racines $n$ièmes.
- Définition de $x^{\frac{p}{q}}$ où $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Règles de calcul sur les fonctions puissances rationnelles.

IV Partie entière

- Définition de la partie entière d'un réel.
- Caractérisation : Soit p et X deux réels. $p=\lfloor X\rfloor \Leftrightarrow \begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ p \leq X < p+1 \end{cases}$.
- Règles de calcul :
  - $Si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \lfloor n\rfloor = n$
  - $Si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ pour\ tout\ réel\ X, (n \leq X \Longrightarrow x \leq \lfloor X\rfloor)\ et\ (n > X \Longrightarrow x \geq \lfloor X\rfloor + 1)$
  - $Si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ pour\ tout\ réel\ X, \lfloor X+n\rfloor = \lfloor X\rfloor + n.$
- Croissance, discontinuité et tracé de la fonction partie entière.
- Représentation de la fonction partie entière.

V Fonctions polynomiales réelles.

- Fonction polynomiale de degré 2 : $P(x)=ax^2+bx+c$ où a, b,et c réels et $a \neq 0$.
  - Factorisation dans $\mathbb{R}$, racine(s) réelle(s) et signe. Allure de la courbe.
  - Somme et produit des racines réelles.
  - Résolution d'un système NON linéaire de la forme $\begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta \end{cases}$.
  - Méthodes de factorisation :
    - ✓ Factorisation évidente (exemples : $c=0$ ou identité remarquable) .
    - ✓ Recherche d'une racine x_1 évidente parmi les réels $-2,-1,0,1,2$ puis de l'autre racine x_2 en utilisant $x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ ou\ x_1x_2=\frac{c}{a}$.
    - ✓ Recherche de deux réels x_1 et x_2 (souvent entiers) tels que $x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ ou\ x_1x_2=\frac{c}{a}$.
    - ✓ Utilisation de Δ ....
- Fonction polynomiale de degré n
  - Définition (forme développée) , coefficients, degré, racines
  - Théorème de division euclidienne polynomiale (admis).
  - Théorème de factorisation connaissant une racine (admis).

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

1) Enoncer et démontrer les deux inégalités triangulaires.
2) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}$.
3) Enoncer et démontrer que : $Si\ n \in \mathbb{Z}\ et\ X \in \mathbb{R}, alors\ \lfloor X+n\rfloor = \lfloor X\rfloor + n.$
4) Enoncer et démontrer le théorème donnant la forme canonique et la factorisation dans $\mathbb{R}$ d'une fonction polynomiale de degré 2.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer