MPSI Groupe 11 COLLEUR : PLOQUIN

COLLE 9

RALLIER Augustin

QdC : Enoncer les inégalités triangulaires

Ex 1 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vides et bornées et λ un réel non nul . On note $\lambda A = \{\lambda a / a \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que λA admet des bornes supérieur et inférieur et exprimer $\inf(\lambda A)$ *et* $\sup(\lambda A)$ en fonction de $inf(A)$, $sup(A)$ et λ.

Ex 2 Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Calculer la limite de f en 2.
3) Montrer que $\forall x \in Df \cap \mathbb{R}^+, \left|f(x) - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{|x-2|}{50}$.
4) Déterminer un réel $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall x \in [2-r, 2+r] \setminus \{2\}, f(x) \in [0{,}74; 0{,}76]$.

Commentaires et note :

$\frac{\square}{20}$

HOUSSAYE Arthur

QdC : Enoncer la caractérisation des bornées supérieures et inférieures.

Ex 1 Soit $A = \left\{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} / (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2\right\}$. Justifier que A admet une borne inférieure et la déterminer. A admet-il une borne supérieure finie ?

Ex 2 Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} / \ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.

En déduire que $A = \left\{\frac{q}{2^n} / (n, q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n\right\}$ est dense dans $[0,1]$ $i.e.$ entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.

Commentaires et note :

$\frac{\square}{20}$

MENGUY Matéo

QdC : Enoncer la caractérisation des intervalles

Ex 1 Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle.

Ex 2 Soit $A = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} / (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2\right\}$. Justifier que A admet une borne inférieure et une borne supérieure finies et les déterminer.

Commentaires et note :

$\frac{\square}{20}$

Ex 7 : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et λ un réel non nul .

a) On suppose que A est borné et $B\subset A$. Justifier l'existence de sup A , sup B ,infA et infB puis comparer ces réels .

b) On suppose que A et B sont bornés et on note $A+B=\{x+y \ / \ x\in A \text{ et } y\in B\}$ et $\lambda A=\{\lambda x \ / \ x\in A\}$. Montrer que A+B et λA sont bornés et $sup\ (A+B)\ = supA + supB$ et $\sup(\lambda A)=\begin{cases}\lambda \sup A & si \quad \lambda>0\\ \lambda \inf A & si \quad \lambda<0\end{cases}$.

Ex 5 Soit (a,b) deux réels . Montrer que $max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et $min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$

Ex 6 1) Déterminer inf(A) et sup(A) où $A=\{x(1-x) \ / \ x\in[0,1]\}$ et en déduire :

$\forall(a,b,c)\in[0,1]^3, \quad min\{a(1-b),b(1-c),c(1-a)\}\leq\dfrac{1}{4}$.(on pourra raisonner par l'absurde)

2) Déterminer , s'ils existent , sup(E) et inf(E) où $E=\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n},(m,n)\in N^{*2}\right\}$. (De même pour $E=\left\{\dfrac{x+2y}{x+y+1}/(x,y)\in[0,1]^2\right\}$

.