

TD 3

Caractérisation d'une fonction bornée par la valeur absolue :
 f est bornée sur D_f lorsque :

Ex 0 Soit f et g deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et a et b deux réels.

1. Montrer que si f et g sont bornées alors $af + bg$ et fg sont bornées... qu'en est-il de $\frac{f}{g}$?
2. Montrer que si f et g sont croissantes et a et b sont positifs alors $af + bg$ est croissante, $-f$ est décroissante ... qu'en est-il de fg ?
3. Montrer que si f et g sont impaires alors $af + bg$ est impaire et fg et $\frac{f}{g}$ sont paires.
4. Montrer que si f et g sont T -périodiques alors $af + bg$ et fg et $\frac{f}{g}$ sont T -périodiques.
5. Montrer que si f est croissante et périodique alors f est constante.
6. Montrer que si $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante et $f \circ f$ est croissante alors f est strictement monotone.
7. Prenons $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ et $g(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$. Montrer que $\sqrt{2}f - \pi g$ est périodique et bornée.
8. Prenons $f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Tracer la courbe de f .

Ex 1 Calculons $\tan\left(\frac{35\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{103\pi}{8}\right)$.

Ex 2 Résoudre les deux équations 1) $\sin(x) - \cos(x) > 1$ 2) $\sqrt{6}\sin(2x) - \sqrt{2}\cos(2x) = 2$.

Ex 3 Résoudre les deux équations : 1) $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right] \\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases}$ 2) $4\cos(3x) - 3\sin(3x) = 5$

Faire un cercle trigo. pour placer $\text{Arccos}(a)$, $\text{Arcsin}(b)$ ou $\text{Arctan}(c)$, pour résoudre $\cos(x) = a$..., $\sin(x) < b$...

Ex 4 Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle :

- | | |
|--|---|
| 1. $4\cos^2(x) + 2(1 + \sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$ | 6. $\cos^2(x) > \frac{3}{4}$ |
| 2. $2\cos^3(x) - \sin^2(x) \geq 5\cos(x) - 3$ | 7. $\tan(3x) < 1$ |
| 3. $ \sin(x) = 1$ | 8. $\cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$ |
| 4. $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2(2x) = 1$ | 9. $\cos(2x) - \tan(x) > 1$ |
| 5. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$ | 10. $\cos(x) - \sin(x) \geq 1$. |

Bien connaître les formules de trigo.

- $\cos^2(x) = \dots \dots \dots \stackrel{\text{si } x \dots \dots \dots}{=} \dots \dots \dots$
- $\cos(2x) = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots$
- $\sin(2x) = \dots \dots \dots$
- Si $x \dots \dots \dots$ alors $\tan(2x) = \dots \dots \dots$
- $\cos(x + y) = \dots \dots \dots$
- $\sin(x + y) = \dots \dots \dots$
- Si x et $y \dots \dots \dots$ alors $\tan(x + y) = \dots \dots \dots$

Ex 5 Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ existe. Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t .

En déduire les solutions de l'équation : $(1 - \sqrt{3})\cos(x) = (1 + \sqrt{3})(1 - \sin(x))$ d'inconnue x réelle.

Ex 6 Justifier que pour tout réel x élément de D , $\frac{\sin x + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$ où D est le domaine de « définition » de cette formule que l'on déterminera.

Ex 7 Soit $a = \frac{\pi}{20}$ et $S = \tan(a) - \tan(3a) - \tan(7a) + \tan(9a)$.

1. Montrer que $\tan(9a) = \frac{1}{\tan(a)}$ et $\tan(7a) = \frac{1}{\tan(3a)}$. En déduire que : $S = 2\left(\frac{1}{\sin(2a)} - \frac{1}{\sin(6a)}\right)$.
2. En déduire que : $S = 4$.

Ex 8 Montrer que : $\forall n \geq 2, \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sqrt[n-1]{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$.
 $n-1$ radicaux superposés

Ex 9 Montrer que pour tout réel x de $[0, \pi]$ et tout entier naturel n , $|\sin(nx)| \leq n\sin(x)$.

Ex 10 Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

- 1) Calculer $S_n(x)$ pour $x \equiv 0[2\pi]$.
- 2) Soit $x \not\equiv 0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$.

Ex 11 Justifier que : l'égalité $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)}$ est vraie pour tout réel x du domaine D de définition.

En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^n 2^k \tan(2^k x)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{p \frac{\pi}{2^k} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\}$.

Ex 12 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(a) = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. Calculer $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n(a)$. En déduire la limite de $P_n(a)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Ex 13 1. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α dans $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ tel que : $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Exprimer α en fonction de $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

3. Montrer que : $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$. En déduire la valeur de α .

Ex 14 Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$ et $g(x) = \frac{1}{\cos(x)\cos(7x) - \cos(3x)\cos(5x)}$

Ex 15 Pour tout réel x de $[0, \pi]$, $\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$ et pour tout x de $]0, \pi/2[$, $\sin(x) > \frac{2}{\pi} x$.

Ex 16 Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

2. En déduire la limite de S_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Ex 17 1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(3t) = 4 \cos^3(t) - 3 \cos(t)$. En déduire $I = \int_0^\pi \cos^3\left(\frac{x}{2}\right) dx$

2. Calculer $J = \int_0^\pi \sin(mx) \sin(px) dx$ où $(m, p) \in \mathbb{N}^2$.

Ex 18 a. Rappeler $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ en fonction du paramètre réel a et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$.

b. Montrer que $\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)}$.