Corrigé TD Trigonométrie

1) Résoudre $cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$
2) Résoudre $-4cos(x) + 3\sin(x) = 5$
3) Résoudre $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases}$.

1) $cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$.

$$Sol = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) $-4cos(x) + 3\sin(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{16+9}\left(-\frac{4}{\sqrt{16+9}}cos(x) + \frac{3}{\sqrt{16+9}}\sin(x)\right) = 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}cos(x) + \frac{3}{5}\sin(x) = 1$. Comme $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$, il existe un réel θ tel que : $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{4}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{3}{5} \end{cases}$. On peut choisir le réel de $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = -\frac{4}{5}$ $i.e.$ $\theta = Arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ convient.

Alors, $-4cos(x) + 3\sin(x) = 5 \Leftrightarrow \cos(\theta)\,cos(x) + \sin(\theta)\sin(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x - \theta) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x - \theta = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \theta + 2k\pi$.

$$Sol = \{\theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \in [-3\pi, -2\pi[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \in [-3\pi, -2\pi[\\ \exists k \in \mathbb{Z} / 2x = \pm \text{Arrcos}\left(-\frac{47}{49}\right) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow 2x = -\text{Arrcos}\left(-\frac{47}{49}\right) - 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\text{Arrcos}\left(-\frac{47}{49}\right) - \pi$.

$$Ainsi, Sol = \left\{-\frac{1}{2}\text{Arrcos}\left(-\frac{47}{49}\right) - \pi\right\}.$$

Pour tout réel x de $[0, \pi]$, $sin^2 x \leq \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$ et pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

1) Soit $f : (x \mapsto \frac{2}{\pi}x - \sin(x))$;

f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos(x)$.

f' est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) = \sin(x) \geq 0$. Alors f'' est positive et ne s'annule qu'en un point isolé 0 . Par conséquent, f' est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f'(0) < 0 < f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Comme f' est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que f' s'annule sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	a	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	<0 $-$	0	$+$ >0
$f(x)$	0 $-$		$-$ 0

Comme f' est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f' ne s'annule qu'une seule fois sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en un réel a. Alors d'après les variations de f', on peut en déduire le signe de f' et par suite les variations de f indiquées dans le tableau de variations. D'après les valeurs $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et les variations de f, je peux conclure que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq 0$ et par conséquent, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.

2) Soit $f : (x \mapsto sin^2(x) - \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x))$.

$\forall x \in [0, \pi], \pi - x \in [0, \pi]$ et $f(\pi - x) = f(x)$. Donc, les points $M(x, f(x))$ et $M'(\pi - x, f(x))$ sont deux points de Cf et sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$. La courbe Cf est donc symétrique par rapport à cette droite. En étudiant f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis en complétant l'étude en utilisant cette symétrie, on aura le signe de f que $[0, \pi]$.

Etudions donc f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - \frac{4}{\pi^2}[(\pi - x) - x] = \sin(2x) + \frac{4}{\pi^2}[2x - \pi]$.

f' est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) = 2\cos(2x) + \frac{8}{\pi^2}$.

f'' est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'''(x) = -4\sin(2x)$. . Alors f'' est positive et ne s'annule qu'en un point isolé 0 . Par conséquent, f' est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	b	a	$\frac{\pi}{2}$
$f'''(x)$			$-$	
$f''(x)$	>0	$+$	0 $-$	<0
$f'(x)$	<0 $-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$-$		0

Des variations strictes , valeurs et continuité de f'', j'en déduis que f'' s'annule une seule fois sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en un réel a. On en déduit le signe de f'' puis les variations de f' . Des variations strictes , valeurs et continuité de f', j'en déduis que f' s'annule une seule fois sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en un réel b. On en déduit le signe de f' puis les variations de f.Des valeurs et variations de f, on en déduit le signe de f: $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq 0$ et par symétrie, $\forall x \in [0, \pi], f(x) \leq 0$. Ainsi, $\forall x \in [0, \pi]$ $sin^2(x) - \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$).

Montrer que $f : \left(x \mapsto \cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \tan\left(\frac{3x}{5}\right)\right)$ est périodique et déterminer une période (la plus petite possible).

Je cherche $T > 0$ tel que : $\forall x, f(x + T) = f(x)$. Or, $f(x + T) = \cos\left(\frac{2x+2T}{3}\right) + \tan\left(\frac{3x+3T}{5}\right) = \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{2}{3}T\right) + \tan\left(\frac{3x}{5} + \frac{3}{5}T\right)$.

Cherchons T telle que $\frac{2}{3}T = 2k\pi$ et $\frac{3}{5}T = m\pi$ avec k et m entiers i.e. $T = 3k\pi$ et $T = \frac{5m}{3}\pi$. Or, $3k\pi = \frac{5m}{3}\pi \Leftrightarrow 9k = 5m$. Prenons $k = 5$ et $m = 9$. Alors, $T = 15\pi$ convient. Ainsi, f est $15 - \pi$ périodique.

Représenter $f : \left(x \mapsto 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x)\right)$.

f est définie, dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{4\pi}{2}\right) - \cos(x + 4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) - \cos(x + 4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x) = f(x)$. f est donc $4\pi - périodique$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = 2\cos\left(-\frac{x}{2}\right) - \cos(-x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x) = f(x)$. f est donc paire.

Etudions f sur $[0,2\pi]$. On complètera ensuite l'étude par symétrie et périodicité.

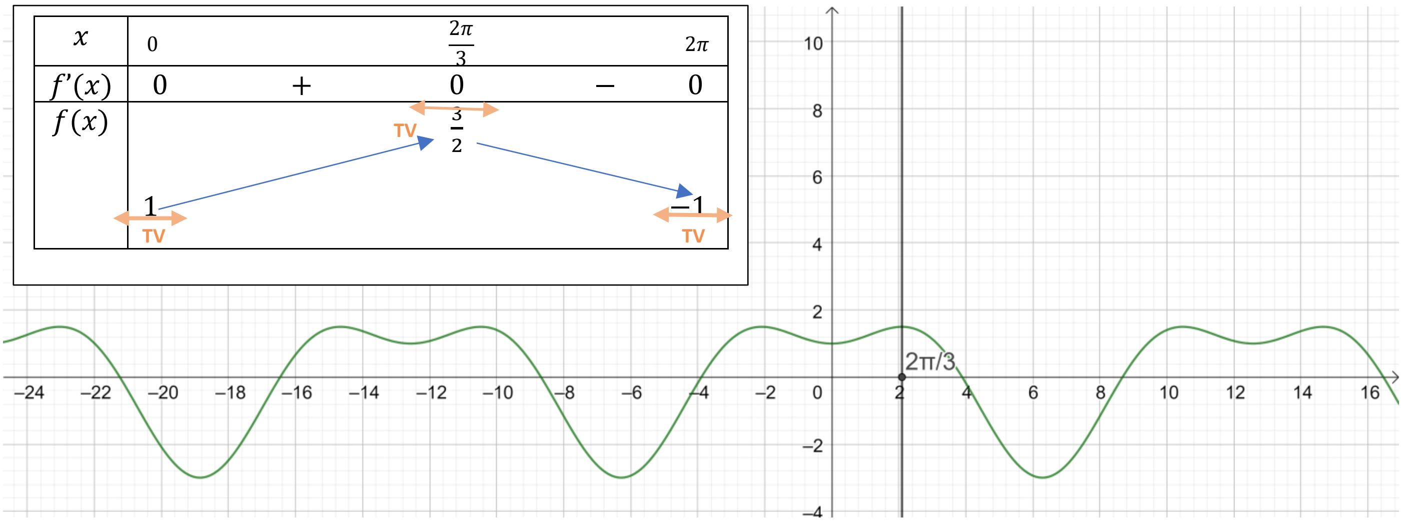
$\forall x \in [0,2\pi], f'(x) = \frac{2}{2}\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin(x) = \sin(x) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x-\frac{x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{x}{2}}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)$.

Etudions le signe de $f'(x)$; pour cela, il faut étudier le signe de $\sin\left(\frac{3x}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{x}{4}\right)$ puisque $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ $sont\ de\ même\ signe$.

$\forall x \in [0,2\pi], \frac{3x}{4} \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\frac{x}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0. \\ \cos\left(\frac{3x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$.

Et par suite, $\forall x \in [0,2\pi],\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x = 2\pi\ ou\ x \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\right)$ et f' s'annule uniquement en 0 , en 2π et en $\frac{2\pi}{3}$. J'en déduis que f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]$. D'où le tableau des variations, valeurs de f et tangentes de Cf :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1 TV	$\nearrow$	TV $\frac{3}{2}$	$\searrow$	-1 TV



a. Rappeler $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}$ en fonction du paramètre réel a et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$.

b. Montrer que $\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Puis calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)}$.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Alors $\forall x \neq 0, \frac{\sin(ax)}{x} = a\frac{\sin(ax)}{ax}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} ax = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$.

$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) \overset{continuité}{=} 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{T.A}{=} 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$.

Autre méthode : $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x)-0}{x-0} = taux\ d'accroissement de \tan en\ 0$.

Comme tan est dérivable en 0 , $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = tan'(0) = 1 + tan^2(0) = 1$.

b. $\forall x \neq 0, \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1-2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-1}{x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

$\frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)} = \frac{\cos(x)-1}{x^2} \times \frac{x^2}{tan^2(x)} = \left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right) \times \left(\frac{x}{tan(x)}\right)^2$.

$Comme$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan(x)} = \frac{1}{1} = 1$. $Donc$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)} = -\frac{1}{2} \times 1^2 = -\frac{1}{2}$.

Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $4cos^2(x) + 2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$
2. $2cos^3(x) - sin^2(x) \geq 5\cos(x) - 3$
3. $\|\sin(x)\| = 1$
4. $cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1$
5. $\sqrt{6}\sin(2x) - \sqrt{2}\cos(2x) = 2$
6. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$
7. $cos^2(x) > \frac{3}{4}$
8. $tan(3x) < 1$
9. $\cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$
10. $cos(2x) - tan(x) > 1$
11. $\cos(x) - \sin(x) \geq 1$.

1. Soit x un réel. On pose $X = \sin(x)$.

$4cos^2(x) + 2(1+\sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 4(1 - sin^2(x)) + 2(1+\sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$

$\overset{X=\sin(x)}{\Leftrightarrow} 4X^2 - 2(1+\sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X^2 - \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)X + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \overset{\begin{cases} ab=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \\ a+b=\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} \end{cases}}{\Leftrightarrow} \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ou $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$.

$Donc, Sol = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

2. $2cos^3(x) - sin^2(x) \geq 5\cos(x) - 3$

3. $|\lfloor\sin(x)\rfloor| = 1 \Leftrightarrow \lfloor\sin(x)\rfloor = \pm 1 \Leftrightarrow \sin(x) \in [1,2[\ ou \sin(x) \in [-1,0[\Leftrightarrow \sin(x) = 1 \ ou \sin(x) < 0$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \ ou\ x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[.$

$Donc, Sol = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}.$

4. $cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow 1 - sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = sin^2(2x)$
$\Leftrightarrow sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = sin(2x)\ ou\ sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -sin(2x)$
$\Leftrightarrow sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = sin(2x)\ ou\ sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = sin(-2x)$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x + \frac{\pi}{3} = 2x + 2k\pi\ ou\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + 2k\pi\ ou\ x + \frac{\pi}{3} = -2x + 2k\pi\ ou\ x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\ ou\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\ ou\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$Donc, Sol = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\}$

5. $\sqrt{6}\sin(2x) - \sqrt{2}\cos(2x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{6+2}\left[\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\sin(2x) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cos(2x)\right] = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right] = 2$
$\Leftrightarrow \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(2x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ou\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{5\pi}{24} + k\pi\ ou\ x = \frac{11\pi}{24} + k\pi$. Ainsi, $Sol = \left\{\frac{5\pi}{24} + k\pi, \frac{11\pi}{24} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$
$\Leftrightarrow \sin(2x) + \sin(10x) + \sin(4x) + \sin(8x) + \sin(6x) = 0$
$\Leftrightarrow 2\sin(6x)\cos(4x) + 2\sin(6x)\cos(2x) + \sin(6x) = 0$
$\Leftrightarrow [2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1]\sin(6x) = 0$
$\Leftrightarrow [2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1] = 0\ ou\ \sin(6x) = 0$
$\Leftrightarrow 2(2cos^2(2x) - 1) + 2\cos(2x) + 1 = 0\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ 6x = k\pi$.
$\overset{X=\cos(2x)}{\Leftrightarrow}\ 4X^2 + 2X - 1 = 0\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$
$\Leftrightarrow X = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ou\ X = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$
$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ou\ \cos(2x) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$
$\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ou\ 2\cos^2(x) - 1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$
$\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{3+\sqrt{5}}{8}\ ou\ \cos^2(x) = \frac{3-\sqrt{5}}{8}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$
$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\ ou\ \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi$
$ou\ x = Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi\ \ ou\ \ x = \frac{k}{6}\pi$.

$Sol = \left\{\pm Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi, \pm Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi, \frac{k}{6}\pi\ /k \in \mathbb{Z}\right\}$.

12. $cos^2(x) > \frac{3}{4} \Leftrightarrow c > 0 \Leftrightarrow \left(cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0.$
Comme $(x \mapsto cos^2(x))$ est π –périodique, cherchons les solutions sur $[0, \pi]$.
Or, $cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$. Et $cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$		+	0	−		−	
$cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$		+		+	0	−	
$cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$		+	0	−	0	+	

Ainsi,

$Sol = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi[\cup]\frac{5\pi}{6} + k\pi, k\pi]$

13. $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} /k \in \mathbb{Z}\right\}$. Comme $(x \mapsto tan(3x))$ est $\frac{\pi}{3}$ –périodique, je peux résoudre l'inéquation sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.
Soit $x \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$. Alors $3x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc, $tan(3x) < 1 \Leftrightarrow 3x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}[$.
Ainsi, $Sol = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}[$.

14. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.
$\cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2\cos(x)} \Leftrightarrow 2cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1$
$\Leftrightarrow \cos(2x) - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x)$
$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi\ ou\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\ ou\ impossible$. Ainsi, $Sol = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} /k \in \mathbb{Z}\right\}$.

15. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.
La fonction $(x \mapsto cos(2x) - tan(x))$ étant π –périodique, résolvons cette équation sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
$cos(2x) - tan(x) > 1 \Leftrightarrow 2cos^2(x) - 1 - tan(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1+tan^2(x)} - tan(x) > 2$
$\Leftrightarrow 2 - tan(x)(1 + tan^2(x)) > 2(1 + tan^2(x))$

$\Leftrightarrow tan^3(x) + 2tan^2(x) + \tan(x) < 0 \Leftrightarrow (tan^2(x) + 2tan(x) + 1)\tan(x) < 0$
$\Leftrightarrow (\tan(x) + 1)^2 \tan(x) < 0 \Leftrightarrow (\tan(x) + 1)^2 \tan(x) < 0$
$\Leftrightarrow \tan(x) \neq -1 \; et \; \tan(x) < 0$
$\Leftrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$
$Ainsi, Sol = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + p\pi, +p\pi\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + p\pi\right\}$

16. $\cos(x) - \sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/ -\frac{\pi}{4} + p\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + p\pi \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/ -\frac{\pi}{2} + p\pi \leq x \leq p\pi$$

$Ainsi, Sol = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + p\pi, +p\pi\right]$

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$ et $g(x) = \frac{1}{cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x)}$

- $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \; existe \\ tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases}$.

$u: \left(x \mapsto \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ est $\frac{\pi}{2} - périodique$ (car $D_u = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}, \forall x \in D_u, x + \frac{\pi}{2} \in D_u \; et \; u\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = tan\left(2x + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = u(x)$) .
Cherchons le signe de u sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{3\pi}{8}\right\}$.
$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{3\pi}{8}\right\}, 2x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{3\pi}{4}\right\} \; et \; 2x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; et par conséquent,
$tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$.
Par suite $u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[$. Ainsi, $Df = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[$.

- $g(x)$ existe $\Leftrightarrow cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(6x)] - \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(2x)] \neq 0$

Or, $cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(6x)] - \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(2x)] = 0 \Leftrightarrow \cos(6x) = \cos(2x)$
$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/6x = \pm 2x + 2p\pi \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/x = \frac{2p\pi}{8} \; ou \; x = \frac{2p\pi}{4} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/x = \frac{p\pi}{4}$.

Donc, $g(x)$ existe $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{Z}/x \neq \frac{p\pi}{4}$. Ainsi, $Dg = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{p\pi}{4} / p \in \mathbb{Z}\right\}$

Ex 22 Calculer :

1. $I = \int_0^{\pi} sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$
2. $J = \int_0^{\pi} sin(mx)\sin(px)\, dx$ où $(m, p) \in \mathbb{N}^2$.

Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \; 4cos^3(t) - 3cost = \cos(3t)$.
En déduire les solutions de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$ d'inconnue x réelle.
$cos(3t) = cos(2t + t) = cos(2t)\cos(t) - \sin(2t)\sin(t) = [2cos^2(t) - 1]\cos(t) - 2\cos(t)\, sin^2(t)$
$= 2cos^3(t) - \cos(t) - 2\cos(t)\,[1 - cos^2(t)] = 4cos^3(t) - 3cost.$
Soit $x \in [-1,1]$. Posons $t = Arccos(x)$. Alors $t \in [0, \pi] \; et \cos(t) = x$.

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow 8cos^3(t) - 6\cos(t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4cos^3(t) - 3\cos(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/ \quad 3t = \frac{\pi}{3} + 2p\pi \; ou \; 3t = -\frac{\pi}{3} + 2p\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/ \quad t = \frac{\pi}{9} + \frac{2p\pi}{3} \; ou \; t = -\frac{\pi}{9} + \frac{2p\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/ \quad t = \frac{\pi}{9} \; ou \; t = \frac{7\pi}{9} \; ou \; t = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9}$$
$$\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \; ou \; x = \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) \; ou \; x = \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right).$$

Ex 24 Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ existe. Exprimer $\cos(x) \; et \; \sin(x)$ en fonction de t.
En déduire les solutions de l'équation : $(1 - \sqrt{3})\cos(x) = (1 + \sqrt{3})(1 - \sin(x))$ d'inconnue x réelle.

Ex 25 Justifier que pour tout réel x élément de D , $\frac{sinx + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$ où D est le domaine de « définition » de cette formule que l'on déterminera.

- $\frac{sinx + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)} \; existe \Leftrightarrow \cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) \neq 0.$

Or, $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) = \cos(x) + \cos(5x) + \cos(3x) = 2\cos(3x)\cos(2x) + \cos(3x) = \cos(3x)\,[2\cos(2x) + 1]$.
Donc,
$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos(3x) = 0 \; ou \; [2\cos(2x) + 1] = 0$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ou \; cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ou \; 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; ou \; 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \; ou \; x = \frac{\pi}{3} + k\pi \; ou \; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$
De plus, $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(3x) \neq 0 \; ou \; [2\cos(2x) + 1] \neq 0 \Rightarrow tan(3x)$ existe .
Ainsi, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- $\forall x \in D, \sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) = [\sin(x) + \sin(5x)] + \sin(3x) = 2\sin(3x)\cos(2x) + \sin(3x) = \sin(3x)\,[2\cos(2x) + 1]$

Alors $\forall x \in D, \frac{\sin x+\sin(3x)+\sin(5x)}{\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)} = \frac{\sin(3x)[2\cos(2x)+1]}{\cos(3x)[2\cos(2x)+1]} = \tan(3x)$.

Ex 26 Soit $a = \frac{\pi}{20}$ et $S = \tan(a) - \tan(3a) - \tan(7a) + \tan(9a)$.

1. Montrer que $tan(9a) = \frac{1}{tan(a)}$ $et\ tan(7a) = \frac{1}{tan(3a)}$. En déduire que : $S = 2\left(\frac{1}{sin(2a)} - \frac{1}{sin(6a)}\right)$.
2. En déduire que : $S = 4$.

1. $\frac{\pi}{2} - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} = \frac{9\pi}{20} = 9$a ; et par conséquent, comme $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan(a)}$, $tan(9a) = \frac{1}{tan(a)}$. De même, $\frac{\pi}{2} - 3a = 7$a donc $tan(7a) = \frac{1}{tan(3a)}$.

Alors, $S = \tan(a) - \tan(3a) - \frac{1}{\tan(3a)} + \frac{1}{\tan(a)} = \frac{\tan^2(a)+1}{\tan(a)} - \frac{\tan^2(3a)+1}{\tan(3a)} \underbrace{=}_{1+tan^2(X)=\frac{1}{cos^2(X)}} \frac{1}{cos^2(a)\tan(a)} - \frac{1}{cos^2(3a)\tan(3a)}$

$= \frac{1}{cos(a)\sin(a)} - \frac{1}{\cos(3a)\sin(3a)} \underbrace{=}_{\sin(2X)=2\sin(X)\cos(X)} \left(\frac{2}{sin(2a)} - \frac{2}{sin(6a)}\right) = 2\left(\frac{1}{sin(2a)} - \frac{1}{sin(6a)}\right)$.

2. $S = 2\left(\frac{1}{sin(2a)} - \frac{1}{sin(6a)}\right) = 2\left(\frac{\sin(6a)-\sin(2a)}{sin(2a)\sin(6a)}\right) \underbrace{=}_{\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)} 2\left(\frac{2\sin(2a)cos(4a)}{sin(2a)\sin(6a)}\right) = 4\left(\frac{cos(4a)}{\sin(6a)}\right) = 4\left(\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-4a\right)}{\sin(6a)}\right) \overset{car\ \frac{\pi}{2}-4a=6a}{\widehat{=}} 4\left(\frac{sin(6a)}{\sin(6a)}\right) = 4$.

Ex 27 Montrer que pour tout réel x de $[0,\pi]$ et tout entier naturel n, $|\sin(nx)| \le nsin(x)$.

Ex 28 Montrer que : $\forall n \ge 2, cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés}$.

Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$.

1) Calculer $S_n(x)\ pour\ x \equiv 0[2\pi]$.
2) Soit $x \not\equiv 0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$.

Justifier que : l'égalité $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)}$ est vraie pour tout réel x du domaine D de définition.

En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k\tan(2^kx)$ où $n \in \mathbb{N}\ et\ x \in \mathbb{R}\backslash\{p\frac{\pi}{2^k}/p \in \mathbb{Z}\ et\ k \in \mathbb{N}\}$.

Soit a un réel. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(a) = \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. Calculer $sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a)$.

En déduire la limite de $P_n(a)$ quand $n \to +\infty$.

$$sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a) = sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = sin\left(\frac{a}{2^n}\right)cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n-1} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \overset{\substack{\frac{1}{2}\sin(2X)=\sin(X)\cos(X) \\ avec\ X=\frac{a}{2^n} \\ donc\ 2X=\frac{a}{2^{n-1}}}}{\widehat{=}} \frac{1}{2^1}sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\prod_{k=0}^{n-1} cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\prod_{k=0}^{n-2} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \overset{\substack{\frac{1}{2}\sin(2X)=\sin(X)\cos(X) \\ avec\ X=\frac{a}{2^{n-1}} \\ donc\ 2X=\frac{a}{2^{n-2}}}}{\widehat{=}} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\ sin\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right)\prod_{k=0}^{n-2} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{1}{2^2}sin\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right)\prod_{k=0}^{n-2} cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\dots$$

J'itère ce procédé et j'obtiens : $sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^n sin\left(\frac{a}{2^0}\right)\prod_{k=0}^{0} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n sin(a)cos(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} sin(2a)$.

Ainsi, $sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} sin(2a)$.

<u>**Ou bien $a = 0$**</u> alors $P_n(0) = \prod_{k=0}^{n} cos(0) = 1$.

<u>**Ou bien $a \neq 0$.**</u> Alors, comme $\forall n, \frac{a}{,2^n} \neq 0\ et\ \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{2^n} = 0$, pour n assez grand, $\frac{a}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc pour n assez grand, $sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \neq 0$ et par suite,

pour n assez grand, $P_n(a) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} sin(2a)}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\frac{a}{2^n}}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \underbrace{\frac{sin(2a)}{2a}}_{\substack{facteur \\ inépendant\ de\ n \\ donc\ constant\ quand \\ n\to+\infty.}}$.

Or, $\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{2^n} = 0$ et $\lim_{X\to0}\frac{\sin(X)}{X} = 1$ donc $\lim_{X\to0}\underbrace{\frac{X}{\sin(X)}}_{\substack{inverse\ de \\ \frac{sinX}{X}}} = \frac{1}{1} = 1$ et par composition, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a}{2^n}}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = 1$.

J'en conclus qie $\lim_{n\to+\infty} P_n(a) = \frac{\sin(2a)}{2a}$.

<u>**Ainsi,**</u> $\lim_{n\to+\infty} P_n(a) = \begin{cases} \frac{\sin(2a)}{2a}\ si\ a \neq 0 \\ 1\ si\ a = 0 \end{cases}$.

1. Exprimer $cos(4x)$ en fonction de $sin(x)$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que : $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Exprimer α en fonction de $Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

3. Montrer que : $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$ En déduire la valeur de α.

1. $\cos(4x) \underbrace{=}_{\substack{Angle\ double \\ du\ cosinus \\ cos(2X)=2cos^2(X)-1 \\ avec\ X=2x}} 2cos^2(2x) - 1 \underbrace{=}_{\substack{Angle\ double \\ du\ cosinus \\ cos(2X)=1-2sin^2(X) \\ avec\ X=x}} 2\left(1-2sin^2(x)\right)^2 - 1 = 8sin^4(x) - 8sin^2(x) + 1$.

2. Il existe un seul pout M du cercle trigonométrique dont l'ordonnée vaut $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et qui se trouve dans le quart NORD-OUEST du cercle. Par conséquent, il existe un unique réel α dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ tel que : $M = M(\alpha)\ et\ par\ suite\ tel\ que\ \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. $\beta = Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ est l' unique réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Alors $\pi-\beta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et $sin(\pi-\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donc $\alpha = \pi - \beta = \pi - Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$.

3. $\cos(4\alpha) = 8sin^4(\alpha) - 8sin^2(\alpha) + 1 = 8\left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right)^2 - 8\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{8}{4^4}\left(6-2\sqrt{5}\right)^2 - \frac{8}{4^2}\left(6-2\sqrt{5}\right) + 1$
$= \frac{1}{2\times 4^2}\left(56-24\sqrt{5}\right) - \left(3-\sqrt{5}\right) + 1 = \frac{1}{4}\left(7-3\sqrt{5}\right) - \left(3-\sqrt{5}\right) + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin(\alpha)$.

Alors, $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ donc $4\alpha \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha[2\pi]\ ou\ \ 4\alpha \equiv -\frac{\pi}{2} + \alpha[2\pi]$ i.e. $5\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $3\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Donc, $\alpha \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$ ou $\alpha \equiv -\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. Or, si $x \equiv -\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ alors $\sin(x) \in \left\{-\frac{1}{2}, 1, -1\right\}$. Donc, $\alpha \not\equiv -\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ et $\alpha \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$. De plus, parmi les réels x qui vérifient $x \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{2\pi}{5}\right]$, seul $\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5}$ se trouve dans dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Ainsi, $\alpha = \frac{9\pi}{10}$.