Préparation du DC 2

Nouveau format de DC 2:

- **un « petit » devoir par jour la semaine prochaine**
- **une ou deux formules de trigo par jour + un exercice à faire dans la liste proposée (à préparer)**

FORMULES DE TRIGONOMETRIE Tous les jours

$\forall(x,y)\in\cdots\ldots,\cos(x+y)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\forall(x,y)\in\cdots\ldots,\sin(x+y)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\forall(x,y)\in\cdots\ldots,\cos(x-y)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\forall(x,y)\in\cdots\ldots,\tan(x+y)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\forall(x,y)\in\cdots\ldots,\sin(x-y)=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\forall(x,y)\in\cdots\ldots,\tan(x-y)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

Formules d'addition

$\forall x\in\cdots\ldots,\cos(2x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\forall x\in\cdots\ldots,\sin(2x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\forall x\in\cdots\ldots,\tan(2x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Formules d'angle double

Exprimer $\cos^2(x)$ en fonction de $\tan^2(x)$.
Exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos^2(x)$.
Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\sin(x+\cdots)$.
Exprimer $\sin(x)$ en fonction de $\cos(\ldots-x)$.
$\forall m\in[-1;1], Arccos(m)$ est ....
$\forall m\in[-1;1], Arcsin(m)$ est ....
$\forall m\in\mathbb{R}, Arctan(m)$ est ....

I Inégalités Lundi 6 octobre

Ex 15 Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\leq\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)_{n>0}$.

Ex 22 Soit $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des réels positifs.

1. Montrer que : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, ij\geq i+j-1$.
2. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

Ex 25 1. Montrer que : $\forall x\geq 0,\ x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$.

2. En déduire la limite de la suite u définie par : $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ tq $n>0$.

1. Posons $f(x)=x-\ln(1+x)$ et $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.

Alors $Df=Dg=]-1;+\infty[$. f et g sont dérivables sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x\in]-1;+\infty[$, $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ et $g'(x)=-f'(x)+x=\frac{-x}{1+x}+\frac{x(1+x)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$. Donc $\forall x\in[0;+\infty[$, $f'(x)\geq 0$ et $g'(x)\geq 0$. Les fonctions f et g sont donc croissantes sur l'intervalle $[0;+\infty[$.Comme $f(0)=0=g(0)$, j'en déduis que f et g sont positives sur $[0;+\infty[$. Ainsi, $\forall x\geq 0, x-\frac{x^2}{2}\underbrace{\leq}_{\substack{car\ g\\ positive}}\ln(1+x)\underbrace{\leq}_{\substack{car\ f\\ positive}}x$.

2. $\forall n>0,\forall k\in[\![1,n]\!], 1+\frac{k}{n^2}>1$ donc $u_n>1>0$. Posons $\forall n>0, v_n=\ln(u_n)$.

Soit $n>0$. Alors, $v_n=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

D'après 1., $\forall k\in[\![1,n]\!]\ \frac{k}{n^2}\geq 0$ donc $\frac{k}{n^2}-\frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2}\leq\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leq\frac{k}{n^2}$. Par conséquent, $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}-\frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2}\right]\leq\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$.

Donc, $\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-\frac{1}{2n^4}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\leq v_n\leq\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)$. Or, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Donc, $\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\frac{1}{2n^4}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\leq v_n\leq\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ i.e. $\frac{(n+1)}{2n}-\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}\leq v_n\leq\frac{(n+1)}{2n}$.
Or, $\frac{(n+1)}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{2n}=\frac{1}{2}$. Et, $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}=0$.Par conséquent, les deux suites qui encadrent v_n tendant vefrs $\frac{1}{2}$. J'en déduis que $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}$. Or, $\forall n>0, u_n=e^{v_n}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}u_n=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

+ une décomposition en éléments simples

Ex 61 Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

1. $F(x)=\frac{1-x^4}{x^3+1}$

2. $F(x)=\frac{1-3x}{x^3-4x^2+4x}$

II Fonctions polynomiales Mardi 7 octobre

COURS

Théorème sur la factorisation et le signe d'une fonction polynomiale de degré 2.
Théorème de division euclidienne polynomiale
Théorème et méthode de factorisation d'une fonction polynomiale connaissant une racine.

Ex 2 Résoudre les deux inéquations $a.\ \frac{1}{3-x} > x$ $b.\ \sqrt{x} - \sqrt{1-x} > \frac{1}{2}$.

Ex 7 Déterminer les réels a qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$.

Ex 10 Soit $A = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$. Montrer que : $A^3 - 7A - 36 = 0$. En déduire que $A = 4$.

+ une décomposition en éléments simples

Ex 62 Trouver deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$. En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$.

III Racines carrées-Racines nièmes **Mercredi 8 octobre**

COURS

Définition de la racine $nième$ d'un réel ......

Inégalité de Cauchy Schwarz

$\forall (x,y) \in \cdots \ldots, \sqrt{xy} \leq$ .... Et $\sqrt{x+y} \leq$...........

$\forall (r,r') \in \cdots \ldots \ldots, \forall (x,y) \in \cdots \ldots \ldots, x^r x^{r'} = \cdots, \quad \frac{x^r}{x^{r'}} = \cdots, \quad (x^r)^{r'} = \cdots, \quad x^r y^r = \cdots \quad , \frac{x^r}{y^r} = \cdots$

Ex 31 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle : (E_1): $\sqrt[5]{x^4} = 1$. (E_2): $4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x} = 7$ (E_3): $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} \geq 2\sqrt{x}$.

Ex 33 Démontrer que pour tous réels x et y , pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\sqrt[n]{|x \pm y|} \leq \sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}$.

Ex 41 Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$. Déterminer le domaine de définition Df de f. Puis calculer la limite de f en 2.

Ex 46 1. Montrer que : pour tous réels $a,\ b,\ c\ et\ d,\ |ac + bd| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.

2. Montrer que : $|ac + bd| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ sietssi $((a,b) = (0,0)\ ou\ \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $c = ka\ et\ d = kb)$
3. Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ et $A = \{x + 2y / (x,y) \in C\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum.

IV Valeurs absolues **jeudi 8 octobre**

COURS

Définition de la valeur absolue d'un réel.

Inégalités triangulaires

Valeur absolue d'un produit ou quotient de réels.

$\forall (x,a) \in \cdots \ldots \ldots, .\ (|x| \leq a \Leftrightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots).$

$\forall (x,y,a) \in \cdots \ldots.\ (|x-y| \leq a \Leftrightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots)$

Ex 39 Montrer que : pour tous réels a et b, $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.

Corrigé : Soit a et b deux réels .

$2a = (a+b) + (a-b)$; donc, $2|a| = |2a| = |(a+b) + (a-b)| \overset{1ère\ I.T}{\leq} |a+b| + |a-b|$.

De même, $2b = (a+b) - (a-b)$; donc, $2|b| = |2b| = |(a+b) - (a-b)| \leq |a+b| + |a-b|$.

Par conséquent, $2|a| + 2|b| \leq 2|a+b| + 2|a-b|$. Et ainsi, $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.

Ex 40 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\left|\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right| \leq 1 - \frac{1}{n}$.

V Partie entière réelle **jeudi 8 octobre**

COURS

Définition de la partie entière.

Caractérisation : soit X un réel. $p = \lfloor X \rfloor \Leftrightarrow \begin{cases} p \in \cdots \\ \ldots. \leq x \ldots \ldots \end{cases}$.

Propriétés de la partie entière : $\forall X \in \cdots.., \forall Y \in \cdots.., \forall p \in \cdots.., \begin{cases} \lfloor X+n \rfloor = \cdots \ldots \\ X < n \Longrightarrow \cdots \ldots \ldots \\ X \leq Y \Longrightarrow \end{cases}$.

Ex 54 Soit x réel et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{(n+1)x}{2n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Ex 52 Soit n un entier naturel. Déterminer $\left\lfloor \sqrt{n^2 + 3n + 4} \right\rfloor$.

Ex 57 Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.