Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)_{n>0}$.

Notons $u_n = \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$, $v_n = \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. Et Posons $H(n)$ la proposition : « $u_n \le S_n \le v_n$ ».

Initialisation : $u_1 = \left(\frac{2\times1+1}{3}\right)\sqrt{1} = 1$, $v_1 = \left(\frac{2\times1}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1} = \frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ et $S_1 = \sum_{k=1}^{1}\sqrt{k} = \sqrt{1} = 1$. Donc, $u_1 \le S_1 \le v_1$. Ainsi, $H(1)$ est vraie.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose $H(n)$ vraie et sous cette hypothèse (simple), je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.

Je sais que : $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. Par conséquent, $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \le \sqrt{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$ i.e.

$\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} \le \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

Montrons que $u_{n+1} \le \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \le v_{n+1}$.

■D'une part, $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-u_{n+1} = \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)+1}{3}\right)\sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2n}{3}+1\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$. De plus, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\ et\ \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$ sont deux réels positifs, ils sont donc ordonnés dans le même sens que leurs carrés que l'on va donc comparer.

$\left[\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\right]^2-\left[\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\right]^2 = \frac{(2n+1)^2}{9}n-\frac{4}{9}n^2(n+1) = \frac{1}{9}n > 0$. J'en déduis dans un premier temps que $\left[\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\right]^2 > \left[\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\right]^2$ et ensuite que $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} > \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$. Par conséquent, $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-u_{n+1} > 0\ et$ ainsi, $u_{n+1} \le \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$.

■D'autre part, $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-v_{n+1} = \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}$.

De plus, $\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\ et\ \left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}$. sont deux réels positifs, ils sont donc ordonnés dans le même sens que leurs carrés que l'on va donc comparer.

$\left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]^2-\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right]^2 = \frac{(4n+3)^2}{36}n-\frac{(4n+1)^2}{36}(n+1) = -\frac{1}{36} < 0$. J'en déduis dans un premier temps que $\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right]^2 > \left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]^2$ et ensuite que $\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right] > \left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]$ et enfin que $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-v_{n+1} < 0$. J'en conclus que $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \le v_{n+1}$.

Il s'en suit que : $u_{n+1} \le \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} \le v_{n+1}$.

Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs.

a. Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \ge i+j-1$.

b. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

a. Soit i et j deux entiers compris entre 1 et n. $ij-i-j+1 = i(j-1)-(j-1) = \underbrace{(j-1)}_{\ge0}\underbrace{(i-1)}_{\ge0} \ge 0$. Ainsi, $ij \ge i+j-1$.

b. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \ge i+j-1 \ge 1 > 0\ donc\ 0 < \frac{1}{ij} \le \frac{1}{i+j-1}\ ; alors, comme\ a_ia_j \ge 0\ , 0 \le \frac{a_ia_j}{ij} \le \frac{a_ia_j}{i+j-1}$. En sommant ces n^2 inégalités, j' obtiens, $0 \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_j}{ij} \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}$. Enfin, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_j}{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\frac{a_j}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2$. J'en déduis que $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

1. Montrer que : $\forall x \ge 0,\ x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.
2. En déduire la limite de la suite u définie par : $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ tq $n > 0$.

1. Posons $f(x) = x-\ln(1+x)$ et $g(x) = \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.

Alors $Df = Dg =]-1;+\infty[$. f et g sont dérivables sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x \in]-1;+\infty[, f'(x) = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ et $g'(x) = -f'(x)+x = \frac{-x}{1+x}+\frac{x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$. Donc $\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) \ge 0$ et $g'(x) \ge 0$. Les fonctions f et g sont donc croissantes sur l'intervalle $[0;+\infty[$.Comme $f(0) = 0 = g(0)$, j'en déduis que f et g sont positives sur $[0;+\infty[$. Ainsi, $\forall x \ge 0, x-\frac{x^2}{2} \underbrace{\le}_{car\ g\ positive} \ln(1+x) \underbrace{\le}_{car\ f\ positive} x$.

2. $\forall n > 0, \forall k \in [\![1,n]\!], 1+\frac{k}{n^2} > 1$ donc $u_n > 1 > 0$. Posons $\forall n > 0, v_n = \ln(u_n)$.

Soit $n > 0$. Alors, $v_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

D'après 1., $\forall k \in [\![1,n]\!]\ \frac{k}{n^2} \ge 0$ donc $\frac{k}{n^2}-\frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2} \le \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}$. Par conséquent, $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}-\frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2}\right] \le \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$.

Donc, $\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-\frac{1}{2n^4}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right) \le v_n \le \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)$. Or, $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Donc, $\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\frac{1}{2n^4}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \le v_n \le \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ i.e. $\frac{(n+1)}{2n}-\frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} \le v_n \le \frac{(n+1)}{2n}$.

Or, $\frac{(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}$. Et, $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} = 0$.Par conséquent, les deux suites qui encadrent v_n tendant vefrs $\frac{1}{2}$. J'en déduis que $\lim_{n\to+\infty}v_n = \frac{1}{2}$. Or, $\forall n > 0, u_n = e^{v_n}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty}u_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

1. $F(x) = \frac{1-x^4}{x^3+1}$

2. $F(x) = \frac{1-3x}{x^3-4x^2+4x}$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^3+1 = (x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta<0}$. Donc, $D_F = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Effectuons la division euclidienne de $1-x^4$ par x^3+1, nous obtenons $1-x^4=(-x)(1+x^3)+1+x$. Par conséquent,

$\forall x \in D_F, F(x) = -x + \frac{1+x}{x^3+1} = -x + \frac{1+x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \underbrace{-x}_{\substack{partie\ entière\\ de\ F}} + \underbrace{\frac{1}{(x^2-x+1)}}_{\substack{élément\ simple\\ de\ secon\ espèce}}$ ← **décomposit° en éléments simples de F.**

2.Posons $A(x)=1-3x\ \ et\ \ B(x)=x^3-4x^2+4x$.

$\forall x \in \mathbb{R}, B(x)=x^3-4x^2+4x=x\left(x^2-4x+4\right)=x(x-2)^2$. Donc $D_F=\mathbb{R}\backslash\{0,2\}$. Comme $\deg(A)<\deg(B)$, la partie entière de F est nulle. Le cours assure alors qu'il existe trois réels a,b,c tels que $\forall x \in D_F, F(x)=\frac{1-3x}{x(x-2)^2.}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$.
Alors, $\forall x \in D_F, xF(x)=\frac{1-3x}{(x-2)^2.}=a+\frac{bx}{x-2}+\frac{cx}{(x-2)^2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} xF(x)=\frac{1}{4}=a$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=0=a+b$. Donc, $b=-a=-\frac{1}{4}$.
De même, $\forall x \in D_F, (x-2)^2F(x)=\frac{1-3x}{x}=\frac{a}{x}(x-2)^2+b(x-2)+c$. Donc, $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2F(x)=\frac{-5}{2}=c$.
Ainsi, $\forall x \in D_F$, $F(x)=\frac{1-3x}{x(x-2)^2.}=\frac{1}{4}\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-2}-\frac{5}{2}\frac{1}{(x-2)^2}$ ← **décomposit° en éléments simples de F.**