Programme de révision du DC 1 du mardi 16 septembre

I Connaitre son cours.

Définition d'une factorielle et d'un coefficient binomial :

- $0\,! = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, $n\,! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1)\,!$

$n\,! = produit\ de\ tous\ les\ entiers\ compris\ entre\ 1\ et\ n.$

- pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & si\ 0 \leq k \leq n \\ 0 & si\ k > n \end{cases}$.

Théorème des sommes et produits télescopiques Soit (u_n) une suite réelle et N et P deux entiers tels que $0 \leq P \leq N$.
Somme télescopique $\sum_{k=P}^{N}(u_k - u_{k+1}) = u_P - u_{N+1}$. Produit télescopique $si\ \forall k, u_k \neq 0\ alors\ \prod_{k=P}^{N} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{N+1}}{u_P}$.

Théorème d'interversion des sommes finies doubles Soit n et p des entiers naturels. Soit $n \times p$ nombres réels notés a_{ij} tels que $i \in \{1,..,n\}$ et $j \in \{1,..,p\}$.

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \qquad et \qquad \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right).$$

Théorème de calcul de sommes d' entiers naturels consécutifs à différentes puissances :
Pour tout entier naturel N, $\sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$ $\quad et \quad$ $\sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Théorème de somme géométrique . $\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \forall P \in [\![0;n]\!], \sum_{k=P}^{N} x^k = \begin{cases} x^P\left(\frac{1-x^{N-P+1}}{1-x}\right) & si\ x \neq 1. \\ N-P+1\ si\ x=1 \end{cases}$

Formule de Pascal et plus Pour tous entiers naturels N et K, $\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{N+1}{K+1}$ et si $K \leq N\ alors\ \binom{N}{K} = \binom{N}{N-K}$.

Théorème de factorisation de $a^n - b^n$. Soit $a\ et\ b$ deux réels et N un entier naturel <u>non nul</u> .

$$a^N - b^N = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{N-1} a^k b^{N-1-k}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{N-1} a^{N-1-k} b^k\,.$$

Cas particulier : pour tout réel x et tout entier naturel N <u>non nul</u>, $1 - x^N = (1-x)\left(\sum_{k=0}^{N-1} x^k\right)$.

Théorème : Formule du binôme de Newton ($\boldsymbol{FBN}$) .

Pour tous $a\ et\ b$ nombres réels et tout N un entier naturel, $(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} a^k b^{N-k} = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} a^{N-k} b^k$.

Corollaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

II Savoir refaire les exemples du cours suivants.

17ter Exercice : Calculons $D_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k})$.

14.Exercice $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

18bis Des exercices corrigés classiques :

1. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Calculons $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ Calculons $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}$.
3. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\,;-1\,;2\}, \frac{1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$. En déduire $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k-2)}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

21bis. Calcul de $\sum_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} j2^i$.

22 bis Exemples :

1) Calculons la somme des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$
2) Calculons $T(n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}$.

24bisExemples : 1) Calculons $S = \sum_{k=2}^{n+2}(nk + 2^{k+1} - 1)$

27ter Exercice corrigé classique: Ecrire les expressions $A = \prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $B = \prod_{k=1}^{n}(2k+1)$ et $\frac{A}{B}$ avec des factorielles et coeff. binomiaux

31. Calculons $W_n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{n}$.

38. Exemples classiques :

1) Développons :$(a+b)^4\ et (a-b)^7$
2) Calculons $T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $X_n = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\ pair}}\binom{n}{k}$ et $Y_n = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\ impair}}\binom{n}{k}$.

38bis Exercices corrigés: 1) Calculons $H_n = \sum_{k=0}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.
2)Calculons $R_n = \sum_{k=1}^{n-3}\binom{n-1}{k+1}3^{k-1}$.

39Calculer $M_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ où x réel et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

40Calculer $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} kx^k$ où x réel et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

III S'exercer !!!!

1. $1+3+9+27+\cdots..+2187 \underbrace{=}_{calculer} ?$
2. $9+16+25+\cdots..+169 \underbrace{=}_{calculer} ?$
3. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(2k+1) \underbrace{=}_{calculer} ?$
4. $\sum_{k=4}^{149} e^{\frac{k+1}{2}} - e^{\frac{k}{2}} \underbrace{=}_{calculer} ?$
5. $\prod_{k=1}^{98} \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} \underbrace{=}_{calculer} ?$
6. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} \underbrace{=}_{calculer} ?$
7. $\sum_{i=3}^{N+2} 5(i-1)^2 - 2^{i-1} \underbrace{=}_{calculer} ?$
8. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} 3^k 5^{n-k} \underbrace{=}_{calculer} ?$
9. $\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n+1}{k+2} \underbrace{=}_{calculer} ?$
10. $\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k-1} 2^{-k} \underbrace{=}_{calculer} ?$
11. $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \underbrace{=}_{calculer} ?$
12. $(1+k)^6 \underbrace{=}_{développer} ?$
13. $(1-k)^5 \underbrace{=}_{développer} ?$
14. $1-x^8 \underbrace{=}_{factoriser} ?$
15. $1+x^7 \underbrace{=}_{factoriser} ?$
16. $x^5-y^5 \underbrace{=}_{factoriser} ?$
17. $x^5+y^5 \underbrace{=}_{factoriser} ?$

Corrigé de « s'exercer »

Somme géométrique **somme des carrées d'entiers consécutifs** **binôme de newton** **corollaire du binôme** **somme telescopique**

A chaque fois que vous appliquez une de ces formules, il faut bien choisir les valeurs de x, N, P ....

1. $1+3+9+27+\cdots..+2187 = 3^0+3^1+3^2+3^3+\cdots.+3^7 = \sum_0^7 3^k = \frac{3^8-1}{3-1} = 3280.$
2. $9+16+25+\cdots..+169 = 3^2+4^2+5^2+\cdots+13^2 = \sum_3^{13} k^2 = (\sum_1^{13} k^2) - 1 - 4 = \frac{13\times14\times27}{6} - 5 = 13\times7\times9-5 = 814.$
3. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(2k+1) = \underbrace{-3+5}_{=2}\underbrace{-7+9}_{=2}\underbrace{-11+13}_{=2}+\cdots..+(-1)^n(2n+1).$

   *si n est pair*alors

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(2k+1) = \overbrace{\underbrace{-3+5}_{=2}\underbrace{-7+9}_{=2}\underbrace{-11+13}_{=2}+\cdots..\underbrace{-(2n-1)+(2n+1)}_{=2}}^{n\ termes} = 2\times\frac{n}{2} = n$$

   si n est impair alors

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(2k+1) = \overbrace{\underbrace{-3+5}_{=2}\underbrace{-7+9}_{=2}\underbrace{-11+13}_{=2}+\cdots..\underbrace{-(2n-3)+(2n-1)}_{=2}}^{n-1\ termes} - (2n+1) = 2\times\frac{n-1}{2} - (2n+1)$$
$$= n-1-2n-1 = -(n+1)$$

4. $\sum_{k=4}^{149} e^{\frac{k+1}{2}} - e^{\frac{k}{2}} \underbrace{=}_{\substack{en\ posant \\ u_k=e^{\frac{k}{2}}}} \sum_{k=4}^{149} u_{k+1}-u_k \underbrace{=}_{telescopage} u_{150}-u_4 = e^{75}-e^2.$

5. $\prod_{k=1}^{98}\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} \underbrace{=}_{\substack{en\ posant\\ u_k=\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}} \prod_{k=1}^{98}\frac{u_k}{u_{k+1}} \underbrace{=}_{telescopage} \frac{u_1}{u_{99}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}-\sqrt{98}} = \frac{\sqrt{2}}{10-7\sqrt{2}} == \frac{\sqrt{2}(10+7\sqrt{2})}{(10-7\sqrt{2})(10+7\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(10+7\sqrt{2})}{100-98} = \frac{\sqrt{2}}{2}(10+7\sqrt{2})$

6. $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)}-\frac{1}{k} \underbrace{=}_{\substack{en\ posant\\ u_k=\frac{1}{k}}} \sum_{k=2}^{n}u_{k-1}-u_k \underbrace{=}_{telescopage} u_1-u_n = 1-\frac{1}{n}.$

7. $\sum_{i=3}^{N+2}5(i-1)^2-2^{i-1} = 5\sum_{i=3}^{N+2}(i-1)^2-\sum_{i=3}^{N+2}2^{i-1} \underbrace{=}_{\substack{réécriture\\ de\ la\ première\\ somme}} 5\sum_{k=2}^{N+1}k^2-\sum_{i=3}^{N+2}2^i\times 2^{-1} = 5\left[\left(\sum_{k=1}^{N+1}k^2\right)-1\right]-$

$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=3}^{N+2}2^i\right] = 5\left[\frac{(N+1)(N+2)(2(N+1)+1)}{6}-1\right]-\frac{1}{2}\frac{2^{N+2-3+1}-1}{2-1}\times 2^3 = \frac{5}{6}(2N^3+9N^2+13N)-2^{N+2}+4.$

8. $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}3^k5^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}3^k5^{n-1-k}\times 5 = 5\times\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}3^k5^{n-1-k}\right]$

$$= 5\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}3^k5^{n-1-k} - \underbrace{\binom{n-1}{0}}_{=1}3^05^{n-1-0} + \underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0}3^n5^{n-1-n}\right]$$

$$= 5\times[(3+5)^{n-1}-5^{n-1}] = 5\times 8^{n-1}-5^n.$$

9. $\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k+2} \underbrace{=}_{\substack{chgt\ d'indice\\ on\ pose\ j=k+2;alors\\ k=j-2\\ k\in[\![0,n-2]\!]\Leftrightarrow j\in[\![2,n]\!]}} \sum_{j=2}^{n}\binom{n+1}{j} = \left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\right]-\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1}-1-(n+1)-1$

$$= 2^{n+1}-2-(n+1)$$

10. $\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k-1}2^{-k} \underbrace{=}_{\substack{chgt\ d'indice\\ on\ pose\ j=k-1;alors\\ k=j+1\\ k\in[\![3,n]\!]\Leftrightarrow j\in[\![2,n-1]\!]}} \sum_{j=2}^{n-1}\binom{n}{j}2^{-(j+1)} = \sum_{j=2}^{n-1}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\sum_{j=2}^{n-1}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right]$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right)-\binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0-\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1-\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j1^{n-j}\right)-1-\frac{n}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^n-1-\frac{n}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{2}-1\right].$$

11. $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} \underbrace{=}_{formule\ de\ Pascal} \sum_{k=p}^{n}\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1} \underbrace{=}_{\substack{en\ posant\\ u_k=\binom{k}{p+1}}} \sum_{k=p}^{n}u_{k+1}-u_k \underbrace{=}_{telesc} u_{n+1}-u_p = \binom{n+1}{p+1}-\underbrace{\binom{p}{p+1}}_{=0} = \binom{n+1}{p+1}$

12. $(1+k)^6 = 1+6k+15k^2+20k^3+15k^4+6k^5+k^6$

13. $(1-k)^5 = (1+(-k))^5 = 1+5(-k)+10(-k)^2+10(-k)^3+5(-k)^4+(-k)^5$

$= 1-5k+10k^2-10k^3+5k^4-k^5.$

14. $1-x^8 = (1-x)(\sum_{k=0}^{7}x^k) = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$

15. $1+x^7 = 1-(-x)^7 = (1-(-x))(\sum_{k=0}^{6}(-x)^k) = (1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6)$

16. $x^5-y^5 = (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

17. $x^5+y^5 = x^5-(-y)^5 = (x-(-y))(x^4+x^3(-y)+x^2(-y)^2+x(-y)^3+(-y)^4) = (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

Tableau de Pascal :
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1