Programme de colle 4

CHAP 2 : Inégalités et premières fonctions réelles.

I Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.

- Règles de calcul sur les inégalités dans $\mathbb{R}$. Extension aux $\sum$ et $\prod$.
- Somme nulle de réels positifs.
- Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$. Formes indéterminées.
- Définition d'une suite (strictement) croissante ou décroissante. Définition d'une fonction (strictement) croissante ou décroissante.
- Méthodes

Méthodes pour comparer deux nombres :
  - Démarrer d'une inégalité connue et utiliser les règles de calcul sur les inégalités
  - Etudier le signe de leur différence
  - Comparer leur quotient avec 1
  - Comparer leurs images par une fonction strictement monotone
  - Comparer avec un réel intermédiaire (transitivité de la relation d'ordre)

Méthodes pour démontrer : $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.
  - Fixer $x \in I$. Comparer les réels $f(x)$ et $g(x)$ avec les méthodes précédentes.
  - Etudier la fonction h telle que : $h(x) = f(x) - g(x)$, dans le but de connaitre son signe.

Méthodes pour démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
  - Fixer $n \in \mathbb{N}$. Comparer les réels u_n et $v_n$avec les méthodes précédentes.
  - Faire une récurrence sur n.
  - S'il existe deux fonctions f et g telles que : $\forall n,\ u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$, étudier la fonction h telle que : $h(x) = f(x) - g(x)$, dans le but de connaitre son signe.

II Intervalles de $\mathbb{R}$. Parties bornée.

- Définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{R}$ sans trou.
- Liste des 10 intervalles de $\mathbb{R}$. Paramétrage de $[a, b]$.
- Définition d'une partie majorée, minorée bornée. Définition d'une suite (resp. d'une fonction) majorée, minorée et bornée.
- Définition du minimum (plus petit élément) d'une partie de $\mathbb{R}$. Maximum (plus grand élément). Notation max, min.

III Valeur absolue

- Définition de la valeur absolue d'un réel . Tracé de la fonction valeur absolue.
- Inégalité importante : Soit a et x deux réels. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
- Règles de calcul sur les valeurs absolues : pour touts réels a et b, $|ab| = |a||b|$ et si b non nul, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ et généralisations.
- Inégalités triangulaires et généralisation.
- Caractérisation d'une partie (d'une suite ou d'une fonction) bornée par les valeurs absolues.

IV Racine carrée et racine $n$ième.

- Définition de la racine carrée d'un réel positif.
- Règles de calcul sur les racines carrées : $\sqrt{x^2} = |x|, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et si b non nul, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Inégalités classiques : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Croissance, dérivabilité et tracé de la fonction racine carrée.
- Quantité conjuguée d'une expression de la forme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (ou $A - \sqrt{b}$).
- Définition de la racine $n$ième d'un réel suivant la parité de n. Tracé des fonctions racines $n$ièmes.
- Définition de $x^{\frac{p}{q}}$ où $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Règles de calcul sur les fonctions puissances rationnelles.

V Partie entière

- Définition de la partie entière d'un réel.
- Caractérisation : Soit p et X deux réels. $p = \lfloor X \rfloor \Leftrightarrow \begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ p \leq X < p + 1 \end{cases}$.

- Règles de calcul :
  - $Si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \lfloor n \rfloor = n$
  - $Si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ pour\ tout\ réel\ X, (n \leq X \Longrightarrow x \leq \lfloor X \rfloor)\ et\ (n > X \Longrightarrow x \geq \lfloor X \rfloor + 1)$
  - $Si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ pour\ tout\ réel\ X, \lfloor X + n \rfloor = \lfloor X \rfloor + n.$
- Croissance, discontinuité et tracé de la fonction partie entière.
- Représentation de la fonction partie entière.

VI Fonctions polynomiales réelles.

- Fonction polynomiale de degré 2 : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b,$et c réels et $a \neq 0$.
  - Factorisation dans $\mathbb{R}$, racine(s) réelle(s) et signe. Allure de la courbe.
  - Somme et produit des racines réelles.
  - Résolution d'un système NON linéaire de la forme $\begin{cases} x + y = \alpha \\ xy = \beta \end{cases}$.
  - Méthodes de factorisation :
    - ✓ Factorisation évidente (exemples : $c = 0$ ou identité remarquable) .
    - ✓ Recherche d'une racine x_1 évidente parmi les réels $-2, -1,0,1,2$ puis de l'autre racine x_2 en utilisant $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ ou\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
    - ✓ Recherche de deux réels x_1 et x_2 (souvent entiers) tels que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ou $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
    - ✓ Utilisation de Δ ....
- Fonction polynomiale de degré n (**résultats admis**)
  - Définition (forme développée) , coefficients, degré, racines
  - Théorème de division euclidienne polynomiale.
  - Théorème de factorisation connaissant une racine.

VII Fonctions rationnelles réelles.

- Définition comme quotient $\frac{A}{B}$ de deux fonctions polynomiales A et B. Définition de la partie entière : quotient de la division euclidienne de A par B. Ecrire que $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ où $degR < degB$
- Décomposition en éléments simples de $\frac{R}{B}$ avec où $0 \leq degR < degB \leq 4$.

CHAP 3 : Trigonométrie.

I Fonctions paires, impaires et périodiques.

- Définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire et d'une fonction périodique.
- Propriétés :
  - fonctions impaires : $f(0) = 0$ si $f(0)$ existe.
  - fonctions périodiques : une fonction T-périodique, où $T \in \mathbb{R}^{+*}$, est aussi kT $-$périodique pour tout $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k \in \mathbb{Z}$ lorsque Df n'est ni minoré, ni majoré)
- Réduction du domaine d'étude des propriétés des fonctions paires , impaires ($f(0) = 0$ si $f(0)$ existe) ou périodiques.
- Produit, quotient, combinaison linéaire des deux fonctions paires (resp. impaires, resp . périodiques).
- Relation entre la courbe de f et la courbe de g dans les cas suivants (a désigne un réel non nul) :
  - $g(x) = f(x) + a$
  - $g(x) = f(a + x)$
  - $g(x) = f(-x)$
  - $g(x) = -f(x)$
  - $g(x) = |f(x)|$
  - $g(x) = f(a - x)$
  - $g(x) = af(x)$
  - $g(x) = f(ax)$

II Sinus et cosinus

- Définition du sinus et cosinus d'un réel à partie du cercle trigonométrie.
- Premières formules de trigonométrie liées aux définitions de cos, sin.
- Valeurs particulières.
- Equations et inéquations trigonométriques ; définition de $Arccos(m)$ et de $Arcsin(m)$ d'un réel $m \in [-1,1]$.
- Autres formules de trigonométrie : formules d'addition, d'angle double.
- Formules à savoir retrouver : formules de factorisation et de linéarisation.
- Si a et b sont deux réels tq $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe un réel θ (unique si $\theta \in]-\pi;\pi]$) tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = a \\ \sin(\theta) = b \end{cases}$. Savoir exprimer θ en fonction de $Arccos(a)$ ou $Arcsin(b)$ ou $Arctan\left(\frac{b}{a}\right)$)
- Méthode pour écrire $Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ sous la forme $Ccos(\omega t + \varphi)$.
- Fonctions sinus et cosinus: parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.

III Tangente

- Définition de la tangente d'un réel distinct des valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. Représentation.
- Valeurs particulières.
- Formules de trigonométrie dont formules d'addition, d'angle double.
- Equations et inéquations trigonométriques ; définition de $Arctan(m)$ d'un réel m.
- Fonction tangente : parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

1) Enoncer et démontrer les deux inégalités triangulaires.
2) Soit x et y deux réels et $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que : $(\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n) \ \ et \ \ (p \leq x \Rightarrow p \leq \lfloor x \rfloor)$.
3) Enoncer (sans démonstration) les formules d'addition de cos et sin et retrouver les formules de linéarisation et de factorisation.
4) Enoncer et démontrer les formules d'angle double de cos et sin.
5) Enoncer et démontrer la formule d'addition de tan et la formule reliant $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\tan(x)$.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer