COLLE 3 PCSI

QDC : Enoncer et démontrer les inégalités triangulaires.

Ex 1 Démontrer que pour tous les réels x et y , $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$ (poser $t = x-1$ et $s = y-1$) .

Ex 2 Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} > \frac{1}{2x^2-1}$ d'inconnue x réelle.

Ex 3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rfloor = 0$.

QDC : Démontrer : Soit x un réel et n un entier. Démontrer que : $(\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n)\ \ et\ \ (n \leq x \Rightarrow n \leq \lfloor x \rfloor)$.

Ex 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Calculer $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{2k+3\sqrt{k}}{k} \right\rfloor$.

Ex 2 Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

Ex 3 Résoudre l'inéquation $|2x| - |1-x| > 1$ d' inconnue x réelle.

QDC : Enoncer et démontrer la formule de Cauchy-Schwarz

Ex 1 Soit a et b des entiers distincts et P la fonction telle que : $P(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b)$.

a. Factoriser $P(x)$ sans calculer Δ.

b. En déduire que pour tout entier c , $P(c)$ est un entier multiple de $(a-b)$, de $(b-c)$ et de $(c-a)$.

Ex 2 Soient $a_1, .., a_n, b_1, .., b_n$ des réels tq $b_1, .., b_n$ non nuls et $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{a_k}{b_k} \in [m, M]$.

On pose $m = \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} .., \frac{a_n}{b_n}\right\}$ et $M = \text{miax}\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} .., \frac{a_n}{b_n}\right\}$

1. En étudiant le signe de $S_n = \sum_{k=1}^{n}(Mb_k - a_k)(a_k - mb_k)$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + mM \sum_{k=1}^{n} b^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
2. On pose $I = \frac{m+M}{2}$ et $G = \sqrt{mM}$. Déduire de 1) que : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b^2} \leq \frac{I}{G} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Ex 3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Ex 4 Calculer $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+x^2+2x+8}{1-(x+1)^4}$

Ex 4 Soit $h(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$.

1. Soit x un réel non nul. Posons $Z = x + \frac{1}{x}$.

Montre que : x est racine de $h \Leftrightarrow$ Z est racine d'une fonction polynomiale de degré 2 à déterminer.

2. En déduire les racines réelles de h.

Ex 4 Soit x et y deux rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrons que : $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

MAUD :

QDC : Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton

Ex 1 : Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Ex 2 : Soit a, b , c réels et (S) : $\begin{cases} x+2y-z=a \\ -2x-3y+3z=b. \\ x+y-2z=c \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de a, b et c, le système (S) admet -il des solutions ?
2. Résoudre (S) lorsque $(a;b;c)=(1;-2;1)$.

Ex 3 Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.