

Résoudre les deux inéquations a. (i): $\frac{1}{3-x} > x$ b. (i): $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} > \frac{1}{2}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1^{er} cas : $x \leq 0$; alors $\frac{1}{3-x} > 0 \geq x$, donc x est solution de (i).

2^{ème} cas : $3 > x > 0$.

x solution de (i) $\Leftrightarrow \frac{1}{3-x} > x \Leftrightarrow 1 > x(3-x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

Or, $4 < 5 < 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$. Ainsi, $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$. Donc, Sur $]0,3[$, les solutions sont $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

3^{ème} cas : $3 < x$. Alors $\frac{1}{3-x} < 0 < x$. Donc x n'est pas solution.

Ainsi, $Sol(i) =]-\infty, 0] \cup \left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

2. $\sqrt{x}$ et $\sqrt{1-x}$ existent si et seulement si $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$ si et seulement si $x \in [0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$.

x solution de (i) $\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{1-x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \geq 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{1-x})^2 > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1-x \\ x + (1-x) - 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \sqrt{x}\sqrt{1-x} < \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x(1-x) < \frac{9}{64} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - x + \frac{9}{64} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \in \left]-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{8}\right[\cup \left]\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{8}, +\infty\right[\end{cases}$ Or, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{8} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{8}$. Par conséquent, $Sol(i) = \left]\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{8}, +\infty\right[$.

Déterminer les réels a qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, -3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$.

Posons $N(x) = x^2 - x + 1$. Alors, $\Delta_N < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

Par conséquent, $-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2 \Leftrightarrow -3(x^2-x+1) < x^2+ax-2 < 2(x^2-x+1) \Leftrightarrow 0 < 4x^2 + (a-3)x + 1$ et $0 < x^2 + (-2-a)x + 4$.

Les réels a recherchés sont donc les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < 4x^2 + (a-3)x + 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x^2 + (-2-a)x + 4$.

Or, un polynôme du second degré ne s'annule pas et garde strictement le signe de son coefficient de x^2 si et seulement si son discriminant est strictement négatif.

Ainsi, $(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < 4x^2 + (a-3)x + 1) \Leftrightarrow \Delta_1 = (a-3)^2 - 16 < 0$. Et $(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x^2 + (-2-a)x + 4) \Leftrightarrow \Delta_2 = (-a-2)^2 - 16 < 0$.

Les réels a recherchés sont donc les réels vérifiant : $\begin{cases} (a-3)^2 - 16 < 0 \\ (-a-2)^2 - 16 < 0 \end{cases}$

D'une part, $(a-3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (a-3-4)(a-3+4) < 0 \Leftrightarrow a \in]-1,7[$

D'autre part, $(-a-2)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (a+2-4)(a+2+4) < 0 \Leftrightarrow a \in]-6,2[$.

Ainsi les réels a recherchés sont tous les éléments de $] -1,7[\cap] -6,2[=] -1,2[$.

Soit $A = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$. Montrer que : $A^3 - 7A - 36 = 0$. En déduire que $A = 4$.

Posons $\begin{cases} a = \sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}} \\ b = \sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}} \end{cases}$. Alors, $a + b = A\sqrt{3}$.

Puis, $A^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(a+b)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(54\sqrt{3} + 41\sqrt{5} + 54\sqrt{3} - 41\sqrt{5} + (a+b)3ab)$
 $= \frac{1}{3\sqrt{3}}(108\sqrt{3} + 3\sqrt{3}Aab) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(108\sqrt{3} + 3\sqrt{3}Aab)$.

Or, $ab = \sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(54\sqrt{3}+41\sqrt{5})(54\sqrt{3}-41\sqrt{5})} = \sqrt[3]{(54\sqrt{3})^2 - (41\sqrt{5})^2}$; donc,

$ab = \sqrt[3]{3 \times 54^2 - 5 \times 41^2} = 7$.

Ainsi, $A^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(108\sqrt{3} + 3 \times 7 \times \sqrt{3}A) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(108\sqrt{3} + 3 \times 7 \times \sqrt{3}A) = 36 + 7A$. Autrement dit $A^3 - 7A - 36 = 0$. Le réel A est donc une racine réelle de la fonction polynomiale $P(t) = t^3 - 7t - 36$.

Or, je remarque que $P(4) = 0$. Donc 4 est aussi une racine réelle de P . Je peux donc factoriser $P(t)$ par $t - 4$. J'obtiens :

$P(t) = t^3 - 7t - 36 = (t-4)\left(\frac{t^2+4t+9}{Q(t)}\right)$. Comme $\Delta_Q < 0$, Q n'a pas de racines réelles et ainsi, 4 est l'unique racine réelle de P . J'en déduis que $A = 4$.

Trouver deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$.

En déduire la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{4k^4+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1) = 4x^4 + (a+b)x^3 + (ab+4)x^2 + (a+b)x + 1$. Donc pour que : $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 =$

$(2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$, il suffit que a et b vérifient : $\begin{cases} ab+4=0 \\ a+b=0 \end{cases}$. Or, $\begin{cases} ab+4=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=-4 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

a et b sont les racines de $P(t) = t^2 - 4 = (t-2)(t+2)$. Donc $a = 2$ et $b = -2$ conviennent.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$.

Posons $F(x) = \frac{x}{4x^4+1} = \frac{x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)}$. F est une fonction rationnelle. Comme $\forall x, 4x^4 + 1 > 0$, $D_F = \mathbb{R}$. De plus, le degré de numérateur étant strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de F est nulle. Alors le cours assure qu'il existe a, b, c , et d réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{x}{4x^4+1} = \frac{x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} = \frac{ax+b}{(2x^2+2x+1)} + \frac{cx+d}{(2x^2-2x+1)}$.

Or, $\frac{ax+b}{(2x^2+2x+1)} + \frac{cx+d}{(2x^2-2x+1)} = \frac{(ax+b)(2x^2-2x+1) + (cx+d)(2x^2+2x+1)}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} = \frac{(2a+2c)x^3 + (2b-2a+2c+2d)x^2 + (a-2b+c+2d)x + b+d}{4x^4+1}$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) =$
 $\frac{x}{4x^4+1} = \frac{(2a+2c)x^3 + (2b-2a+2c+2d)x^2 + (a-2b+c+2d)x + b+d}{4x^4+1}$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, (2a + 2c)x^3 + (2b - 2a + 2c + 2d)x^2 + (a - 2b + c + 2d)x + b + d = x$. Alors par unicité des coefficients d'une

fonction polynomiale, $\begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ 2b - 2a + 2c + 2d = 0 \\ a - 2b + c + 2d = 1 \\ b + d = 0 \end{cases}$. Donc, $\begin{cases} c = -a \\ -4a = 0 \\ -4b = 1 \\ d = -b \end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{4} \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{x}{4x^4 + 1} = \frac{1}{4} \left[\frac{-1}{2x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{(2x^2 - 2x + 1)} \right]$.

Alors, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{4k^4 + 1} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2k^2 + 2k + 1} + \frac{1}{2k^2 - 2k + 1} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2k(k+1)+1} + \frac{1}{\underbrace{2k(k-1)+1}_{u_k}}$

$\stackrel{\text{en posant}}{=} \frac{1}{u_k = \frac{1}{2k(k-1)+1}}$
 alors
 $u_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(k+1-1)+1} = \frac{1}{2k(k+1)+1}$

$= \frac{1}{4}(-u_{n+1} + u_0) = \frac{1}{4}(-u_{n+1} + u_0) = \frac{1}{4} \left[\frac{-1}{2n(n+1)+1} + 1 \right]$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}$.