TD 1
Récurrence. Sommes et produits finis.
Premières suites. Systèmes linéaires.

EX 0

1. VRAI OU FAUX (justifier)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k \quad F$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \quad V$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad V$
- $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \quad F$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \times b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad F$
- $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} 3^k\right) = \sum_{k=1}^{n} 6^k \quad F$
- $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(a_i \times b_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad V$

2. Compléter :

- $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$
- $\displaystyle\sum_{k=P}^{N}(a_k - a_{k-1}) = a_N - a_{P-1}$
- $5^P + 5^{P+1} + 5^{P+2} + \cdots + 5^{N-1} + 5^N + 5^{N+1} = \frac{5^{N-P+1}-1}{5-1}5^P$
- $\displaystyle 9 + 16 + 25 + 36 + \cdots. +225 = \sum_{k=3}^{15} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2\right) - 1 - 4 = \frac{15\times 16\times 31}{6} - 5$
- $\displaystyle\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 2^{2n} = 4^n.$
- $1 + x^{2n+1} = 1 - (-x)^{2n+1} = \big(1-(-x)\big)\left(\sum_{k=0}^{2n}(-x)^k\right) = (1+x)(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{2n-1} + x^{2n}).$

Le logarithme transforme un produit en somme.

L'exponentielle transforme une somme en produit.

3. Rappeler les propriétés et les généraliser . Démontrer cette généralisation par récurrence.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, x^{n+m} = x^n \times x^m$. **Généralisation :** $\forall (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n, x^{\sum_{k=1}^{n} i_k} = \prod_{k=1}^{n} x^{i_k}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a e^b \;$ *et* $\; \forall n \in \mathbb{N}, (e^a)^n = e^{na}$. **Généralisation :** $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, e^{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{a_k}$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n\ln(a)$ **Généralisation** : $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$

<u>I Des récurrences</u>

Ex 1 Montrer (de deux manières : par récurrence et par télescopage)que pour tout entier naturel n non nul ,
$\sum_{k=1}^{n} k \times k\,! = (n+1)\,! - 1$.

Ex 2 Soit u la suite définie par : $u_1 = 3$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Ex 3 Soit (u_n) une suite réelle vérifiant: $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = (3n-2)(-2)^{n-1}$. Représenter la suite (u_n) .
2. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Ex 4 Soit (u_n) une suite réelle vérifiant les propriétés suivantes : $u_0 = u_1 = 1$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)(u_{n+1} + u_n)$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Ex 5 Soit u la suite définie par : $u_0 = 2$*et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n})$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^{2n-1}}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

<u>II Des calculs de sommes et produits</u>

Ex 6 Calculer les sommes et produits suivants (p et n sont des entiers naturels et x un réel) :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)$ *et* $S_n = \sum_{k=0}^{3n} 2^{k+1}$
2. $S(n) = \sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}} + \binom{n+1}{k+1}2^{1-k} - 5(k+2)^3\right)$
3. $V_n(x) = \sum_{k=0}^{3n} e^{-kx}$ et $w_n = \prod_{k=1}^{2n} e^{kx}$
4. $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$.
5. $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p}$ et $T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{p}{k}$ où $n > p$

6. $U_n = \prod_{k=0}^{n} x^k$

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k(2k+1) = \underbrace{1-3}_{=-2}\underbrace{+5-7}_{=-2} + \cdots \ldots + (-1)^n(2n+1).$

Si n est impair alors $n+1$ est pair et $S_n = \underbrace{1-3}_{=-2}\underbrace{+5-7}_{=-2} + \cdots \ldots \underbrace{+(2n-1)-(2n+1)}_{=-2} \overset{\substack{car\ il\ y\ a \\ n+1\ termes \\ dans\ la\ somme \\ et\ qu'on\ les\ regroupe \\ deux\ par\ deux}}{\triangleq} \frac{(-2)(n+1)}{2} = -(n+1).$

Si n est pair alors $n+1$ est impair et $S_n = [\underbrace{1-3}_{=-2}\underbrace{+5-7}_{=2} + \cdots \ldots \underbrace{+(2n-3)-(2n-1)}_{=-2}] + (2n+1) = -2\frac{n}{2} + (2n+1) = n+1.$

2. $S_n = \sum_{k=10}^{3n} 2^{k+1} = \sum_{k=10}^{3n} 2^{k+1} = 2\sum_{k=10}^{3n} 2^k = 2\,\frac{2^{3n-9}-1}{2-1}\,2^{10} = (2^{3n-9}-1)2^{11}$

3. $E_n(x) = \sum_{k=2n}^{n^2} e^{-kx} = \sum_{k=2n}^{n^2} (e^{-x})^k = \begin{cases} \frac{(e^{-x})^{n^2-2n+1}-1}{e^{-x}-1} = \frac{(e^{-(n-1)^2x}\ -1}{e^{-x}-1}\ si\ e^{-x} \neq 1\ i.e.\ x = 0 \\ n^2-2n+1 = (n-1)^2\ si\ e^{-x} = 1\ i.e.\ x = 0 \end{cases}$

$F_n = \prod_{k=n}^{2n} e^{kx} = e^{\sum_{k=n}^{2n} kx} = e^{x\sum_{k=n}^{2n} k} = e^{x(\sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^{n-1} k)} = e^{x\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right)} = e^{x\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right)} = e^{x\left(\frac{3(n^2+n)}{2}\right)}$

4. $A(n) = \sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}}\right) + \sum_{k=2}^{n-2}\binom{n+1}{k+1}2^{1-k} - 5\sum_{k=2}^{n-2}(k+2)^3 = \frac{3^n}{4}\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{9}{4}\right)^k + \sum_{j=3}^{n-1}\binom{n+1}{j}2^{1-(j-1)} - 5\sum_{k=2}^{n-2}(k+2)^3$

Calculons les trois sommes séparément :

■ $\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}}\right) = \frac{3^n}{4}\sum_{k=2}^{n-2}\left(\frac{9}{4}\right)^k = \frac{3^n}{4}\left(\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^{n-3}-1}{\frac{9}{4}-1}\right)\left(\frac{9}{4}\right)^2. = 3^n\,\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{9}{4}\right)^2}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{3^{3n-2}}{4^{n-1}}\right) - \frac{3^{n+4}}{80}$. (vérification : $\sum_{k=2}^{4-2}\left(\frac{3^{n+2k}}{4^{k+1}}\right) = \frac{3^{4+4}}{4^{3+1}}$ et $\frac{4}{5}\left(\frac{3^{10}}{4^4}\right) - \frac{3^8}{5\times16} = \frac{1}{5}\left(\frac{3^{10}}{4^3}\right) - \frac{3^8}{5\times4^2} = \frac{3^8}{5\times4^3}(3^2-4) = \frac{3^8}{4^3}.\ ok!$)

■ $\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n+1}{k+1}2^{1-k} \underset{\substack{j=k+1 \\ k=j-1 \\ k\in[\![2,n-2]\!]\Leftrightarrow j\in[\![3,n-1]\!]}}{\underbrace{=}} \sum_{j=3}^{n-1}\binom{n+1}{j}2^{1-(j-1)} = 4\sum_{j=3}^{n-1}\binom{n+1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j$

$= 4\left[\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right) - \binom{n+1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \binom{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n+1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \binom{n+1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \binom{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$= 4[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)n}{8}] = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 6 - \frac{5}{2}n - \frac{n^2}{2}$

$= 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} + (n+1)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 8 - 5n - n^2$ (vérification : $\sum_{k=2}^{4-2}\binom{4+1}{k+1}2^{1-k} = \frac{\binom{5}{3}}{2} = \frac{10}{2} = 5\ \ et\ \ 4\left(\frac{3}{2}\right)^{4+1} - \left(\frac{1}{2} + (4+1)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} - 6 - \frac{5}{2}\times 4 - \frac{16}{2} = \frac{243}{8} - \frac{11}{8} - 24 = 29 - 24 = 5\ ok!$)

■ $\sum_{k=2}^{n-2}(k+2)^3 = \sum_{k=4}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=0}^{3} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{9\times16}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 36.$ (vérification : $\sum_{k=2}^{4-2}(k+2)^3 = 4^3 = 64\ et\ \frac{(4)^2(5)^2}{4} - 36 = 100 - 36 = 64\ \ ok!$)

Ainsi, $A(n) = \frac{1}{5}\left(\frac{3^{3n-2}}{4^{n-1}}\right) - \frac{3^{n+4}}{80} + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2} + (n+1)\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 8 - 5n - n^2 - 5\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 36\right].$

5. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}1^k1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 4^n.$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1}(-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}(-1)^k1^{2n-k} = (-1+1)^{2n} = 0^{2n} = \begin{cases}0\ si\ n>0 \\ 1\ si\ n=0\end{cases}.$

$Si\ n = 0\ alors\ \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 1$.

$Si\ n = 0\ alors\ en\ posant\ S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\ et\ T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k+1}, on\ a\ \begin{cases}S_n + T_n = 4^n \\ S_n - T_n = 0\end{cases}$ donc $T_n = S_n = \frac{1}{2}4^n = 2^{2n-1}$.

6. Soit $n > p$. $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n+1}\underbrace{\binom{k+1}{p+1}}_{u_{k+1}} - \underbrace{\binom{k}{p+1}}_{u_k} \underset{\substack{somme \\ télescopique}}{\underbrace{=}} u_{n+2} - u_p = \binom{n+2}{p+1} - \underbrace{\binom{p}{p+1}}_{=0} = \binom{n+2}{p+1}$

$T_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p.$

7. $U_n = \prod_{k=0}^{n} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n} k} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$V_n = \prod_{j=0}^{n}\frac{2j+1}{2j-3} = \frac{\prod_{j=0}^{n}(2j+1)}{\prod_{j=0}^{n}(2j-3)} = \frac{(2n-1)(2n+1)\prod_{j=0}^{n-2}(2j+1)}{(-3)(-1)\prod_{k=0}^{n-2}(2k+1)} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{3}$

$W_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right) = \underbrace{\left[\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\right]}_{\substack{produit \\ télescopique}}\underbrace{\left[\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right]}_{\substack{produit \\ télescopique}} = \frac{1}{n}\frac{(n+1)}{2}$

$Y_n = \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}}_{\substack{produit \\ télescopique}} = \frac{\binom{n}{0}}{\binom{n}{n}} = 1.$

Ex 7 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.Ecrire avec des factorielles les produits suivants : $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(n(n+p) - k(k+p))$ et $Q_n = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(n(n+p) - k(k+p)) = \prod_{k=0}^{n-1}(n^2 + np - kp - k^2) = \prod_{k=0}^{n-1}((n-k)(n+k) + (n-k)p) = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k)(n+k+p)$$

$P_n = [\prod_{k=0}^{n-1}(n-k)][\prod_{k=0}^{n-1}(n+k+p)] = [n\times(n-1)\times\ldots\times1][(n+p)\times(n+p+1)\times\ldots\times(2n+p-1)] = n!\,\frac{(2n+p-1)!}{(n+p-1)!} = (n!)^2\binom{2n+p-1}{n+p-1}.$

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \left[\prod_{k=1}^{n} k\right]\left[\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)\right] \underset{\substack{j=n-k+1 \\ i.e.\ k=n-j+1 \\ k\in[\![1,n]\!]\Leftrightarrow j\in[\![1,n]\!]}}{\underbrace{=}} (n!) \times \left[\prod_{j=1}^{n} j\right] = (n!)^2.$$

Ex 8 Soit n un entier strictement positif. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

1. Effectuer le changement d'indice $p = 2n+1-k$.

2. En déduire la valeur de S_n .

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} \underset{\substack{p=2n+1-k \\ k=2n+1-p \\ k\in[\![0,n]\!]\Leftrightarrow p\in[\![n+1,2n]\!]}}{\underbrace{=}} \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{2n+1-p} \underset{\substack{car\ si\ 0\le P\le N, \\ \binom{N}{P}=\binom{N}{N-P}}}{\underbrace{=}} \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}.$

2. Alors $2S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} + \sum_{p=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{p} = \sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}1^p1^{2n+1-p} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1} = 2\times4^n.$

Ex 9 Télescopage

1. Calculer $V_n = \prod_{j=0}^{n} \frac{2j+1}{2j-3}$, $W_n = \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$ *et* $Y_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

2. Calculer $S_n = \sum_{k=3}^{n} ln\left(\frac{k^2-4}{k^2+k}\right)$ *où* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1;2\}$. En déduire la limite de (S_n).

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$. En déduire la limite de (S_n).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. En déduire la limite de (S_n).

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$. En déduire la limite de (S_n).

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$ .En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$ $tq\ n \in \mathbb{N}^*$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\,;2\}$.

$S_n = \sum_{k=3}^{n} ln\left(\frac{k^2-4}{k^2+k}\right) = \sum_{k=3}^{n} ln\left(\frac{(k-2)(k+2)}{k(k+1)}\right) = \sum_{k=3}^{n} \ln(k-2) + \ln(k+2) - \ln(k) - \ln(k+1)$

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=3}^{n}[\ln(k+2)-\ln(k+1)]}_{\substack{somme\\ télescopique}} + \sum_{k=3}^{n}\ln(k-2) - \sum_{k=3}^{n}\ln(k) = \ln(n+2) - \ln(4) + \sum_{k=1}^{n-2}\ln(k) - \sum_{k=3}^{n}\ln(k)$$

$= \ln(n+2) - \underbrace{\ln(4)}_{=2\ln(2)} + \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \ln(2) + [\sum_{k=3}^{n-2}\ln(k)] - \ln(n-1) - \ln(n) - [\sum_{k=3}^{n-2}\ln(k)] = \ln\left[\frac{n+2}{(n-1)n}\right] - \ln(2) = \ln\left[\frac{1+\frac{2}{n}}{(n-1)}\right] - \ln(2)$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \underbrace{=}_{\substack{quantité\\ conjuguée}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}_{somme\ télescopique} = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}}_{somme\ télescopique} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \underbrace{=}_{car\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}_{somme\ télescopique} = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{2k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{1+\frac{2}{k(k+1)}+\frac{1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)^2} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$.

Donc, $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = n + 1 - \frac{1}{n+1}$.

Ex 10 « Sommes rationnelles »

1. Déterminer trois réels A , B *et* C tels que :$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,2\}$, $\frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k-2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3}$.

2. Déterminer deux réels a *et* b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{4x^4+1} = \frac{a}{2x^2+2x+1} + \frac{b}{2x^2-2x+1}$. En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $F(x) = \frac{5x+8}{16x+8x^2-8x^3} = \frac{5x+8}{8x(2+x-x^2)} = \frac{5x+8}{-8x(x+1)(x-2)}$.

Le cours assurera qu' il existe A , B *et* C *réels tels que* $\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x+1)(x-2))} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, xF(x) = \frac{5x+8}{-8(x+1)(x-2))} = A + \frac{Bx}{x+1} + \frac{Cx}{x-2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to0} xF(x) = \frac{8}{(-8)\times(-2)} = A. Ainsi, A = \frac{1}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, (x+1)F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x-2))} = A\frac{x+1}{x} + B + \frac{C(x+1)}{x-2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-1} (x+1)F(x) = \frac{-5+8}{8\times(-3)} = B. Ainsi, B = \frac{-1}{8}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, (x-2)F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x+1)} = A\frac{x-2}{x} + B\frac{x-2}{x+1} + C$. Donc, $\lim\limits_{x\to2}(x-2)F(x) = \frac{10+8}{-16\times(3)} = C. Ainsi, C = \frac{-3}{8}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\{0,-1,2\}, F(x) = \frac{5x+8}{-8x(x+1)(x-2))} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{x+1} + \left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{x-2}$.

Alors $\sum_{k=3}^{n} \frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3} = \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k} + \left(-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{k+1} + \left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}\right)$

$= \left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\sum_{k=4}^{n+1}\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right)$.

$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}\right)}_{=0}\left(\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{-25}{48} + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{5k+8}{16k+8k^2-8k^3} = \left(-\frac{25}{8}\right)$.

Ex 11 Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{1-p}\left((n+1)u_n - 1\right)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

Ex 12 1) Montrer que pour tous entiers naturels k *et* n supérieurs à 1, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire $\sum_{k=0}^{n}, k\binom{n}{k}$.

2) Montrer que$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}\backslash\{0,1\})^2$ $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$

3)*Soit* $(n,p,i) \in \mathbb{N}^3$*tel que* $k \leq i \leq n$. Montrer que $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$. En déduire $S_n = \sum_{0\leq k\leq i\leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.

Ex 13 Soit a un réel et $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} ka^k$.

1) Exprimer aS_n en fonction de S_{n+1} et d'une somme géométrique.
2) En déduire S_n .

1) $aS_n = a\sum_{k=0}^{n} ka^k = \sum_{k=0}^{n} ka^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(j-1)a^j = \sum_{k=1}^{n+1} ja^j - \sum_{k=1}^{n+1} a^j = \sum_{k=0}^{n+1} ja^j - \sum_{k=1}^{n+1} a^j = S_{n+1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1}a$.

2) De plus, $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} ka^k = \sum_{k=0}^{n} ka^k + (n+1)a^{n+1} = S_n + (n+1)a^{n+1}$.Donc $aS_n = S_n + (n+1)a^{n+1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1}a$. Et par suite ,

$$(a-1)S_n = (n+1)a^{n+1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1}a.$$

Donc si $a \neq 1$ alors $S_n = \frac{1}{a-1}\left[(n+1)a^{n+1} - \frac{a^{n+1}-1}{a-1}a\right] = \frac{1}{a-1}\left[\frac{(n+1)a^{n+2}-(n+1)a^{n+1}-a^{n+2}+a}{a-1}\right]$.

$Ainsi$, si $a \neq 1$ alors $S_n = \left[\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}\right]$.

Par contre $si\ a = 1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ex 14 Calcul des sommes $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k\ et\ \sum_{k=0}^{n} k\,x^k$ par dérivation

En bleuté : des méthodes à connaitre.

1. On pose $f(x) = (1+x)^n$. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Donner une autre expression de $f(x)$.

b. En déduire deux expressions de $f'(x)$.

c. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$ puis retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ déterminer à l'ex 12.

d. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n}(k-1)\binom{2n}{k}$

2. On pose $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Donner une autre expression de $f(x)$.

b. En déduire deux expressions de $f'(x)$.

c. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k\,x^k$ puis retrouver le résultat trouvé à l'ex 13.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k \overset{\substack{car\ le\ terme \\ \text{"k=0"}\ est\ nul}}{=} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k = x\left(\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}\right) = xf'(x) = nx(1+x)^{n-1}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \sum_{k=0}^{n} k\,x^k \overset{\substack{car\ le\ terme \\ \text{"k=0"}\ est\ nul}}{=} \sum_{k=1}^{n} k\,x^k = x(\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}) = xf'(x) = x\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$.

Ex 15 Calcul des sommes $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$ par intégration

On pose $f(x) = (1+x)^n$. f est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$.

1. Donner une autre expression de $f(x)$.

2. En déduire deux expressions de la primitive F de f qui s'annule en 0.

3. En déduire $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{n+1}[(1+x)^{n+1}-1] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Alors, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = F(1) = \frac{1}{n+1}[(1+1)^{n+1}-1] = \frac{1}{n+1}[2^{n+1}-1]$

Ex 16 On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^k$et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}4^k$ .Calculer $S_n + 2T_n\ puis\ S_n - 2T_n$ .En déduire $S_n\ et\ T_n$.

$S_n + 2T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^k + 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}4^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}2^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}2^p = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}2^p\,1^{2n-p} = (1+2)^{2n} = 3^{2n} = 9^n$.

$S_n - 2T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^k - 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}4^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-2)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-2)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}(-2)^p = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{p}(-2)^p\,1^{2n-p} =$
$(1-2)^{2n} = (-1)^{2n} = 1$.

Ainsi, $\begin{cases} S_n + 2T_n = 9^n \\ S_n - 2T_n = 1 \end{cases}$. Donc, $\begin{cases} 2S_n = 1 + 9^n \\ 4T_n = 9^n - 1 \end{cases}$ et finalement, $\begin{cases} S_n = \frac{1}{2}(1+9^n) \\ T_n = \frac{1}{4}(9^n-1) \end{cases}$.

Ex 17 En appliquant une méthode analogue à celle employée pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^3$, calculer $\sum_{k=0}^{n} k^4$.

$\underbrace{\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^5 - k^5]}_{somme\ télescopique} = \sum_{k=0}^{n}[1 + 5k + 10k^2 + 10k^3 + 5k^4]$. Alors $(n+1)^5 - 0^5 = 5\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + 10\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 10\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^3}_{=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} + 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{=(n+1)}$. Ainsi,

$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - \frac{5n(n+1)}{2} - \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{5n^2(n+1)^2}{2} - (n+1)\right] = \frac{(n+1)}{5}\left[(n+1)^4 - \frac{5n}{2} - \frac{5}{3}n(2n+1) - \frac{5}{2}n^2(n+1) - 1\right]$

$= \frac{(n+1)}{30}[6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n - 20n^2 - 10n - 15n^3 - 15n^2 - 6]$

$= \frac{(n+1)}{30}[6n^4 + 9n^3 + n^2 - n]$

$= \frac{(n+1)n}{30}[6n^3 + 9n^2 + n - 1]$.

Ex 18 Calculer les sommes doubles suivantes ($n\ et\ p$ désignent deux entiers naturels tels que $n \geq 2\ et\ p \geq 3$)

1. $S_n = \sum_{\substack{0\leq k\leq n-2 \\ 1\leq m\leq p-3}} \alpha$

2. $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij}$

3. $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2$

4. $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)$

5. $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} 2i + 3j$

6. $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$

7. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$

2. $S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)(2^i)^j\right]$;

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)(2^i)^j = (1-2^i)\underbrace{\sum_{j=0}^{n}(2^i)^j}_{\substack{somme\ géomatrique \\ de\ raison\ 2^i}} = (1-2^i)\frac{1-(2^i)^{n+1}}{1-2^i} = 1-(2^i)^{n+1}$.

$$Donc, S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}(1-2^i)2^{ij} = \sum_{i=1}^{n}[1-(2^i)^{n+1}] = \sum_{i=1}^{n}1 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2^{n+1})^i}_{\substack{somme\ géomatrique \\ de\ raison\ 2^{n+1}}} = n - \frac{1-(2^{n+1})^{n+1}}{1-2^{n+1}}.$$

4. $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}\min(i,j))$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2} + i(n-(i+1)+1) = \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{i^2}{2}$.

$$Alors,\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)i-\frac{i^2}{2}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^{2}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. $S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{i}_{a_i}\underbrace{2^j}_{b_j}\overset{\text{théo.du produit de deux sommes}}{\cong}(\sum_{i=1}^{n} i)(\sum_{j=1}^{n} 2^j)=\frac{n(n+1)}{2}\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=\frac{n(n+1)}{2}(2^{n+1}-1).$

Ex 19 Soit $\in \mathbb{N}^*$. Calculer $P_n=\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij$. En déduire $T_n=\prod_{1\le i<j\le n} ij$.

$P_n=\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ij$.
Or, pour chaque i , $\prod_{j=1}^{n} ij=i^n\left(\prod_{i=1}^{n} j\right)=i^n n!$. Donc $P_n=\prod_{i=1}^{n} i^n n!=(n!)^n\prod_{i=1}^{n} i^n=(n!)^n\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n=(n!)^n(n!)^n=(n!)^{2n}$.
$P_n=T_n\times\prod_{1\le i=j\le n} ij\times\underbrace{\prod_{1\le j<i\le n} ij}_{=T_n\text{ puisque i et j jouent un rôle symétrique dans l'expression de }T_n}=T_n\times\prod_{i=1}^{n} i^2\times T_n=T_n^2\times\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^2=T_n^2(n!)^2$. Donc, $T_n^2=\frac{(n!)^{2n}}{(n!)^2}=\left(\frac{(n!)^n}{n!}\right)^2=\left((n!)^{n-1}\right)^2$. Alors comme $T_n>0$, je peux conclure que $T_n=(n!)^{n-1}$.

III D'autres applications de la « FBN »

Ex 20

1. Soit a,b,c,d des entiers. Justifier que : $\left(a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}\Longrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}\right)$.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\exists!\,(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^2/\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.
3. Trouver une relation entre a_n,b_n,a_{n+1},b_{n+1}.En déduire que les suites $(a_n)\ et\ (b_n)$sont strictement croissantes.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},a_n^2-2b_n^2=1$.
5. En déduire que l'équation $x^2-2y^2=1$ admet une infinité de couples d'entiers naturels (x,y) solutions.

1. Supposons que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$. Alors, $a-c\underbrace{=}_{**}\sqrt{2}(d-b)$.

   Imaginons un instant que $d-b\neq 0$. Alors, $\sqrt{2}=\frac{a-c}{d-b}$. Comme a, b, c et d sont des entiers, $\frac{a-c}{d-b}\in\ \mathbb{Q}$, autrement dit, $\sqrt{2}\in\ \mathbb{Q}$ ce qui est faux. L'hypothèse "$d-b\neq 0$" est fausse et j'en conclus que $d=b$. Et en remplaçant dans $**$, j'obtiens $a-c=0$ i.e. $a=c$.
3. Posons $H(n)$ la propriété : $\exists(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^2/\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

   Init : $\left(3+2\sqrt{2}\right)^0=1=1+0\times\sqrt{2}$. Donc $a_0=1\ et\ b_0=0$ conviennent.

   Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose qu'il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^2 tq\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

   $$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n+1}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\left(3+2\sqrt{2}\right)=\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=3a_n+4b_n+\sqrt{2}(2a_n+3b_n).$$

   Posons $a_{n+1}=3a_n+4b_n\ \ et\ b_{n+1}=2a_n+3b_n$. Comme $a_n\ et\ b_n$ sont entiers natuerels, $a_{n+1}\ et\ b_{n+1}$sont aussi entiers naturels.

   CCL : $\forall n,\exists(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^2/\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

   D'après 1. , l'écriture de $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n sous\ la\ forme\ a_n+b_n\sqrt{2}$ tq $(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^2$est unique.
4. $\forall n,a_{n+1}=3a_n+4b_n\ \ et\ b_{n+1}=2a_n+3b_n$. De plus, $\left(3+2\sqrt{2}\right)^0=1=1+0\times\sqrt{2}$ .Donc, $a_0=1\ et\ b_0=0$. Alors on montre facilement par récurrence sur n que $\forall n,a_n>0\ et\ b_n\ge 0$. Alors, $\forall n,a_{n+1}-a_n=2a_n+4b_n>0\ \ et\ b_{n+1}-b_n=2a_n+2b_n>0$. Donc, les suites $(a_n)\ et\ (b_n)$sont strictement croissantes.
5. Posons $u_n=a_n^2-2b_n^2$. Montrons que la suite (u_n) est constante égale à 1.

   $\forall n,u_{n+1}=a_{n+1}^2-2b_{n+1}^2=(3a_n+4b_n\ \ )^2-2(2a_n+3b_n\ \ )^2=a_n^2-2b_n^2=u_n$. Donc la suite (u_n) est constante. De plus, $u_0=a_0^2-2b_0^2=1$. J'en déduis que $\forall n\in\mathbb{N},a_n^2-2b_n^2=1$.
6. $\forall n\in\mathbb{N},a_n^2-2b_n^2=1$ avec $a_n$et b_n entiers naturels. Donc pour tout entier naturel n, (a_n,b_n)est solution entière de $x^2-2y^2=1$ .Comme les suites $(a_n)\ et\ (b_n)$ sont strictement croissantes, toutes les valeurs a_n sont distinctes et par conséquent, tous les couples (a_n,b_n) sont distincts…. Ainsi, l'équation $x^2-2y^2=1$ admet une infinité de solutions entières.

Ex 21 Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n>n$.

Soit $n\in\mathbb{N}\ \ \ tq\ n\ge 2$.

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n=1+n\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2+\underbrace{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k}_{n'existepas\ si\ n=2.}=1+\sqrt{2n}+(n-1)+\underbrace{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k}_{n'existepas\ si\ n=2}=n+\underbrace{\sqrt{2n}}_{>0}+\underbrace{\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^k}_{\ge 0\ ou\ n'existepas}>n.$$

De plus pour $n=1$, $\left(1+\sqrt{\frac{2}{1}}\right)^1=1+\sqrt{2}>1$.

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n>n$.

IV Suites particulières

Ex 22 Donner une expression explicite des suites récurrentes définies de la manière suivante :

1. $\begin{cases} \forall n, u_{n+1} - u_n = 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$.

u *est* arithmétique de raison 3. Donc $\forall n, u_n = 2 + 3n$.

2. $\begin{cases} \forall n, u_{n-1} = -4u_n \\ u_1 = 3 \end{cases}$

u *est* arithmétique de raison $-\frac{1}{4}$. Donc $\forall n, u_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u_0 = -\left(-\frac{1}{4}\right)^n 12 = \frac{3}{(-4)^{n-1}}$.

3. $\left\{\forall n, \begin{matrix} u_{n+1} = 1 - 3u_n \\ u_0 = 2 \end{matrix}\right.$.

u *est* arithmético-géométrique.

Je cherche un réel L tel que $L = 1 - 3L$. $L = \frac{1}{4}$ convient.

Je pose $\forall n, v_n = u_n - \frac{1}{4}$. Alors, $\forall n, v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4} = 1 - 3u_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 3u_n = (-3)v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison (-3).

Par conséquent, $\forall n, v_n = (-3)^n v_0$; et par suite, $\forall n, u_n - \frac{1}{4} = (-3)^n \left(u_0 - \frac{1}{4}\right)$. J'en conclus que $\forall n, u_n = \frac{1}{4} + (-3)^n \left(\frac{7}{4}\right)$.

4. $\begin{cases} \forall n, u_{n+1}^5 u_n^3 = 4 \\ u_0 = 2 \end{cases}$.

On montre facilement par récurrence que $\forall n, u_n > 0$. En effet $u_0 > 0$ et si n est un entier tel que $u_n > 0$ alors $u_n{}^3 \neq 0$ *et* $u_n{}^3 > 0$ *donc* $u_{n+1}^5 = \frac{4}{u_n^3} > 0$ et par suite, u_{n+1}, étant du même signe que u_{n+1}^5, est aussi strictement positif.

Alors $\forall n, \ln(u_{n+1}^5 u_n^3) = \ln(4)$ ce qui donne $\forall n, 5\ln(u_{n+1}) + 3\ln(u_n) = 2\ln(2)$.

Posons donc $v_n = \ln(u_n)$.Alors, $\forall n,\ 5v_{n+1} = -3v_n + 2\ln(2)$. La suite v est donc arithmético-géométrique.

Cherchons un réel L tel que : $5L + 3L = 2\ln(2)$. $L = \frac{\ln(2)}{4}$ convient donc.

Posons $w_n = v_n - L = v_n - \frac{\ln(2)}{4}$. Alors $\forall n, w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{\ln(2)}{4} = -\frac{3}{5}v_n + \frac{2}{5}\ln(2) - \frac{\ln(2)}{4} = -\frac{3}{5}v_n + \frac{3}{20}\ln(2) = -\frac{3}{5}\left[v_n - \frac{1}{4}\ln(2)\right] = -\frac{3}{5}w_n$.

Donc w est géométrique de raison $\left(-\frac{3}{5}\right)$.

Par conséquent, $\forall n, w_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n w_0$ et par suite, $v_n - \frac{\ln(2)}{4} = \left(-\frac{3}{5}\right)^n (v_0 - \frac{\ln(2)}{4}) = \left(-\frac{3}{5}\right)^n (\ln(2) - \frac{\ln(2)}{4})$.

Ainsi, $\forall n, v_n = \frac{\ln(2)}{4}\left(1 + 3\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$.

Enfin, comme $\forall n, v_n = \ln(u_n)$,nous pouvons affirmer que $\forall n, u_n = e^{v_n} = e^{\frac{\ln(2)}{4}\left(1+3\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)}$.

5. $\forall n, \prod_{k=0}^{n} u_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+n}$.

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{\prod_{k=0}^{n} u_k}{\prod_{k=0}^{n-1} u_k} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)^2+(n-1)}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+n-(n-1)^2-(n-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$. Egalité encore vraie pour $n = 0$ *car* $u_n = 1$.

6. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = u_n + n^2 - 3^{n+1/2}$.

Soit un entier naturel n.

$$u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3^{k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 3^{k+\frac{1}{2}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sqrt{3}\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sqrt{3}\frac{3^n - 1}{3 - 1} \times 3.$$

$u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{2}\sqrt{3}(3^n - 1)$.

7. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = (n+1)e^n u_n$.

8. $u_0 = 2$ *et* $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, (n+3)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

Ex 23

1. Soit (u_n) *et* (v_n) deux suites telles que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \text{ et } v_{n+1} = 4u_n + 5v_n \\ u_0 = 2, v_0 = 1 \end{cases}$. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire des expressions explicites de u_n *et de* v_n.

2. Soit (u_n) *et* (v_n) deux suites telles que : $\begin{cases} \forall n, u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n} \text{ et } v_n = \frac{1}{1+u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

a. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ *et* v_n existent .

b. Montrer que (v_n) est arithmétique. En déduire une expression explicite de u_n.

3. Soit (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n *et de* u_0 *et* u_1 .

2.*a*. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n *existe et* $u_n \in]-1,0]$.

Initialisation : $u_0 \in]-1,0]$.

Propagation : *Soit* $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que u_n existe et $u_n \in]-1,0]$. Alors $2 + u_n \in]1,2]$. Donc, $\frac{1}{2+u_n}$ existe et $\frac{1}{2+u_n} \in [\frac{1}{2}, 1[$. Donc u_{n+1} existe $u_{n+1} = -\frac{1}{2+u_n} \in]-1, -\frac{1}{2}]$. Donc $u_{n+1} \in]-1,0]$.

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n *existe et* $u_n \in]-1,0]$. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$ *donc* v_n *existe*.

b. $v_{n+1} = \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2+u_n}} = \frac{2+u_n}{2+u_n-1} = \frac{2+u_n}{1+u_n} = \frac{1+(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{1}{1+u_n} + 1 = v_n + 1$. Alors, (v_n) est arithmétique de raison 1. Par suite , $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 + n = 1 + n$.

Alors, $\frac{1}{1+u_n} = 1+n$ donc $1+u_n = \frac{1}{1+n}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1+n} - 1 = \frac{n}{1+n}$.

Ex 24 Soit u *et* v les suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2u_n-1}{u_n+1}$.

1. Montrer que les suites u et v sont bien définies.

2. Montrer que v est géométrique.

3. En déduire une expression explicite de u_n *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. Montrons par récurrence sur n que $\forall n, u_n$ existe et $u_n > 0$.
u_0 existe et $u_0 > 0$.
Soit n un entier naturel. Supposons que u_n existe et $u_n > 0$.
Alors $2u_n + 4 > 0$ et $3u_n + 1 > 0$. Donc, $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4}$ existe et $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} > 0$.
Le théorème de récurrence permet alors d'affirmer que $\forall n, u_n$ existe et $u_n > 0$.
Et par conséquent, $\forall n, u_n + 1 > 0$ donc $v_n = \frac{2u_n-1}{u_n+1}$ existe. Ainsi, les suites u et v sont bien définies.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{2\left(\frac{3u_n+1}{2u_n+4}\right)-1}{\left(\frac{3u_n+1}{2u_n+4}\right)+1} = \frac{2(3u_n+1)-(2u_n+4)}{(3u_n+1)+(2u_n+4)} = \frac{(4u_n-2)}{(5u_n+5)} = \frac{2}{5}\left(\frac{2u_n-1}{u_n+1}\right) = \frac{2}{5}v_n$. Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

3. Donc $\forall n, v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Or, $v_n = \frac{2u_n-1}{u_n+1}$ donc $v_n(u_n+1) = 2u_n - 1$ puis $u_n = \frac{-1-v_n}{v_n-2} = \frac{1+v_n}{2-v_n}$. Ainsi, $\forall n, u_n = \frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4-\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.
Comme $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Ex 25 Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n. \end{cases}$

1. Montrer que la suite v définie par : $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ est arithmético-géométrique.

2. En déduire une expression explicite de u_n *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n+3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}$. Donc, (v_n) est arithmético-géométrique.
Cherchons un réel L tel que $L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}$. Je remarque que $L = 1$ convient.
Alors, posons $\forall n$, $w_n = v_n - L$. Alors $w_{n+1} = v_{n+1} - L = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}L + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(v_n - L) = \frac{2}{3}w_n$. Donc w est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Alors $\forall n$, $w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n w_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n(-1)$. Donc $\forall n$, $v_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = 3^n v_n = 3^n - 2^n$.

V Systèmes linéaires

Ex 26 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues réelles $x_1, x_2, \dots, x_n, x$, y, z et/ou t et de paramètres réels a, b, c, m, p, q et/ou λ.

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + y = m^2 - 3 \\ 2x + 2y = -m \end{cases}$
5. $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ -2x - my = m \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x + 4y - 5z = -8 \\ 3x + 9y - 8z = 1 \\ 4x + 17y - 11z = 41 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 5x + y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 6 \\ x + 2y - 7z = -1 \\ 2x - 2y + 3z = 5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 5x - z = -4 \\ 2x - y - z = -3 \\ 8x + 3y + 5z = -1 \\ 6x + y + z = -3 \end{cases}$
9. (S): $\begin{cases} mx + y + (m-1)z = 3 \\ (m-1)x + y + (m-1)z = 9 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (m-1)x + y + (m-1)z = 9 \\ mx + y + (m-1)z = 3 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (m-2)x + (m-2)z = 9 \\ (m-1)x + (m-2)z = 3 \end{cases}$
$\underbrace{\Leftrightarrow}_{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (m-2)x + (m-2)z = 9 \\ x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (m-2)z = 9 + 6(m-2) \\ x = -6 \end{cases}$.
<u>1 *er cas* : $m = 2$</u>.

$Alors, (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 0=9\ \boldsymbol{IMPOSSIBLE} \\ x=-6 \end{cases}$. Donc (S) n'a pas de solution lorsque $m=2$.

$\underline{2\text{ ème } cas : m \neq 2}$.

$Alors, (S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{9}{(m-2)} \\ z=\frac{9}{(m-2)}+6 \\ x=-6 \end{cases}$. Donc $Sol(S)=\{\left(-6,\frac{-9}{(m-2)},\frac{9}{(m-2)}+6\right)\}$ et (S) est de Cramer lorsque $m \neq 2$.

10. $\begin{cases} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=-1 \end{cases}$

11. $(S): \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=1 \\ x+by+az=1 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{L_1 \leftrightarrow L_1+L_2+L_3} \begin{cases} (a+2)x+b(a+2)y+(a+2)z=3 \\ x+aby+z=1 \\ x+by+az=1 \end{cases}$.

$\underline{1\ er\ cas : a=-2}$.

Alors, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 0=3\boldsymbol{IMPOSSIBLE} \\ x-2by+z=1 \\ x+by-2z=1 \end{cases}$. . Donc (S) n'a pas de solution lorsque $a=-2$.

$\underline{2\text{ ème } cas : a \neq -2}$.

Alors, $(S) \underbrace{\Leftrightarrow}_{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{a+2}L_1} \begin{cases} x+by+z=\frac{3}{(a+2)} \\ x+aby+z=1 \\ x+by+az=1 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{a+2}L_1} \begin{cases} x+by+z=\frac{3}{(a+2)} \\ x+aby+z=1 \\ x+by+az=1 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3-L_1}} \begin{cases} x+by+z=\frac{3}{(a+2)} \\ (a-1)by=1-\frac{3}{(a+2)} \\ (a-1)z=1-\frac{3}{(a+2)} \end{cases}$.

$\underline{1\ er\ ss-cas : a=1}$.

Alors, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+by+z=1 \\ 0=0 TJS\ VRAI \\ 0=0 TJS\ VRAI \end{cases} \Leftrightarrow x=1-(by+z)$. Alors $Sol(S)=\{(1-(by+z),y,z)/y,z\ réels\}$ lorsque $a=1$.

$\underline{2\text{ ème } ss-cas : a \neq 1\ et\ a \neq -2}$.

Alors, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+by+z=1 \\ 0=0\ TJS\ VRAI \\ 0=0\ TJS\ VRAI \end{cases} \Leftrightarrow x=1-(by+z)$. Alors $Sol(S)=\{(1-(by+z),y,z)/y,z\ réels\}$ lorsque $\underline{: a \neq 1\ et\ a \neq -2}$

12. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x+y+z=\lambda x \\ x+4y+z=\lambda y \\ x+y+4z=\lambda z \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+z-4t=-1 \\ 2x-3y-8z+7t=8 \\ x+3y+5z-10t=-5 \\ 4x-y-6z-t=6 \end{cases}$

15. $(S): \begin{cases} -3x+2y+2z=\lambda x \\ -2x+y+2z=\lambda y \\ -2x-2y+z=\lambda z \\ -2x-2y+t=\lambda t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3-\lambda)x+2y+2z=0 \\ -2x+(1-\lambda)y+2z=0 \\ -2x-2y+(1-\lambda)z=0 \\ -2x-2y+(1-\lambda))t=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (-3-\lambda)x+2y+2z=0 \\ -2x+(1-\lambda)y+2z=0 \\ -2x-2y+(1-\lambda)z=0 \\ -2x-2y+(1-\lambda)t=0 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3+L_1}} \begin{cases} (-3-\lambda)x+2y+2z=0 \\ (1+\lambda)x+(-1-\lambda)y=0 \\ (-5-\lambda)x+(3-\lambda)z=0 \\ -2x-2y+(1-\lambda)t=0 \end{cases}$

$\underline{1er\ cas\ \lambda=-1.}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)x+2y+2z=0 \\ 0=0\ TJS\ VRAI \\ (-4)x+4z=0 \\ -2x-2y+2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2)z+2y+2z=0 \\ x=z \\ \\ -2z-2y+2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=z \\ \\ t=z \end{cases}$. Donc $Sol(S)=\{(z,0,z,z)/z \in \mathbb{R}\}$.

$\underline{2ème\ cas\ \lambda=-5.}$ FAUX CAS !!!!

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ -4x+4y=0 \\ 8z=0 \\ -2x-2y+6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -x+y=0 \\ z=0 \\ -2x-2y+6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=0$. Donc, $Sol(S)=\{(0,0,0,0)/t \in \mathbb{R}\}$

$\underline{3^{ème}\text{ cas } \lambda \neq -1 \text{ et } \lambda \neq -5}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (-3-\lambda)\frac{3-\lambda}{5+\lambda}z + 2\frac{3-\lambda}{5+\lambda}z + 2z = 0 \\ x = y = \frac{3-\lambda}{5+\lambda}z \\ -2\frac{3-\lambda}{5+\lambda}z - 2\frac{3-\lambda}{5+\lambda}z + (1-\lambda)t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left((-3-\lambda)\frac{3-\lambda}{5+\lambda} + 2\frac{3-\lambda}{5+\lambda} + 2\right)z = 0 \\ x = y = \frac{3-\lambda}{5+\lambda}z \\ -4\frac{3-\lambda}{5+\lambda}z + (1-\lambda)t = 0 \end{cases}.$$

$Or, (-3-\lambda)\frac{3-\lambda}{5+\lambda} + 2\frac{3-\lambda}{5+\lambda} + 2 = \frac{\lambda^2-9+6-2\lambda+10+2\lambda}{5+\lambda} = \frac{\lambda^2+7}{5+\lambda} \neq 0$. Alors, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \\ (1-\lambda)t = 0 \end{cases}$

$\underline{1er\ ss-cas\ \lambda \neq -5 \text{ et } \lambda \neq -1 \text{ et } \lambda \neq 1 .}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. Donc, $Sol(S) = \{(0,0,0,0)/t \in \mathbb{R}\}$

$\underline{2ème\ ss-cas\ \lambda = 1 .}$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \\ (1-\lambda)t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$. $Sol(S) = \{(0,0,0,t)/t \in \mathbb{R}\}$

16. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$.

$(S) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$ distinguer les cas :

$n = 3p, n = 3p+1 \text{ et } n = 3p+2.$

Ex 27 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$), déterminer les points d'intersection :

a. entre l'hyperbole d'équation $xy = 2$ et la droite passant par $A(3,4)$ et dirigée par $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

b. entre les droites d'équation $2x - 3y = 2$ et $7x - 2y = 1$.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer les points d'intersection des plans d'équation : $4x - 3y + 5z = 2$ et $7x - 2y + 3z = 1$.

Ex 28 Résoudre (S): $\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$. **Indication** : appliquer une bonne fonction qui permet de se ramener à un système linéaire.

Ex 29 Soit a b, c, d des réels .

1. On suppose ici que $c \neq 0$. Montrer qu'il existe deux réels U et V tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $\frac{ax+b}{cx+d} = U + \frac{V}{cx+d}$. En déduire une primitive de f: $\left(x \mapsto \frac{1-2x}{3x+5}\right)$.
2. On suppose ici que $c \neq d$. Montrer qu'il existe deux réels U et V tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{c,d\}$, $\frac{ax+b}{(x-d)(x-c)} = \frac{U}{x-c} + \frac{V}{x-d}$. En déduire la somme $S = \sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2+k}$.