

Corrigé DL 1

Ex 1 Résoudre le système linéaire (S): $\begin{cases} ax + y - a^3z = 1 \\ ax - a^2y + az = 1 \\ x - ay + a^2z = a \end{cases}$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en discutant selon les valeurs du paramètre réel

a. Vous indiquerez toutes les opérations que vous effectuerez.

$$\begin{aligned}
 (S): \begin{cases} ax + y - a^3z = 1 \\ ax - a^2y + az = 1 \\ x - ay + a^2z = a \end{cases} &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + aL_1]{L_2 \leftarrow L_2 + a^2L_1} \begin{cases} ax + y - a^3z = 1 \\ (a + a^3)x + (a - a^5)z = 1 + a^2 \\ (1 + a^2)x + (a^2 - a^4)z = 2a \end{cases} \\
 &\xrightarrow[\text{car } 1-a^2=(1+a^2)(1-a^2)]{=} \begin{cases} ax + y - a^3z = 1 \\ a(1 + a^2)x + a(1 - a)(1 + a)(1 + a^2)z = 1 + a^2 \\ (1 + a^2)x + a^2(1 - a)(1 + a)z = 2a \end{cases} \\
 &\xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{1+a^2}L_2]{=} \begin{cases} ax + y - a^3z = 1 \\ ax + a(1 - a)(1 + a)z = 1 \\ (1 + a^2)x + a^2(1 - a)(1 + a)z = 2a \end{cases} \\
 &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - aL_2]{=} \begin{cases} ax + y - a^3z = 1 \\ ax + a(1 - a)(1 + a)z = 1 \\ x = a \end{cases} \\
 &\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - aL_2]{=} \begin{cases} y - a^3z = 1 - a^2 \\ a(1 - a)(1 + a)z = 1 - a^2 \\ x = a \end{cases}
 \end{aligned}$$

1^{er} cas $a(1 - a)(1 + a) \neq 0$ i.e. $a \notin \{0; 1; -1\}$. Alors,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y - a^3z = 1 - a^2 \\ a(1 - a)(1 + a)z = 1 - a^2 \\ x = a \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{1-a^2}L_2]{=} \begin{cases} y - a^3z = 1 - a^2 \\ z = \frac{1}{a} \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = \frac{1}{a} \\ x = a \end{cases}. \text{ Donc } Sol(S) = \left\{ \left(1; \frac{1}{a}; a \right) \right\} \text{ si } a \notin \{0; 1; -1\}$$

2^{eme} cas $a = 0$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y - a^3z = 1 - a^2 \\ a(1 - a)(1 + a)z = 1 - a^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 0 = 1 \\ x = a \end{cases} \text{ IMPOSSIBLE ! Donc } Sol(S) = \emptyset \text{ si } a = 0.$$

3^{eme} cas $a = 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y - a^3z = 1 - a^2 \\ a(1 - a)(1 + a)z = 1 - a^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ 0 = 0 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Donc } Sol(S) = \{(1; z; z)/z \in \mathbb{R}\} \text{ si } a = 1.$$

3^{eme} cas $a = -1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y - a^3z = 1 - a^2 \\ a(1 - a)(1 + a)z = 1 - a^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ 0 = 0 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Donc } Sol(S) = \{(-1; -z; z)/z \in \mathbb{R}\} \text{ si } a = -1.$$

Ex 2 Soit $S_n = \sum_{1 \leq i, k \leq n} \frac{i}{i+k}$. Montrer que $S_n = \sum_{1 \leq i, k \leq n} \frac{k}{i+k}$. En déduire S_n .

$$S_n = \sum_{1 \leq i, k \leq n} \frac{i}{i+k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{i}{i+k} \stackrel{i \leftrightarrow k}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{k}{k+i} = \sum_{1 \leq i, k \leq n} \frac{k}{i+k}$$

$$\text{Alors, } 2S_n = \sum_{1 \leq i, k \leq n} \frac{i}{i+k} + \sum_{1 \leq i, k \leq n} \frac{k}{i+k} = \sum_{1 \leq i, k \leq n} \frac{i+k}{i+k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n n = n^2. \text{ Donc, } S_n = \frac{n^2}{2}.$$

Ex 3 Soit n un entier naturel fixé et $T_n = \sum_{k=0}^n k^4$.

- Rappeler sans démonstration $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$ et $\sum_{k=0}^n k^3$.
- Déterminer (avec preuve) la valeur de T_n .
- Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $S_n(p) = \sum_{k=0}^n \binom{k}{p}$.
- Retrouver $\sum_{k=0}^n k$, grâce à la somme calculer au 3.
- Déterminer des entiers a, b, c et d tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, k^4 = a \binom{k}{4} + b \binom{k}{3} + c \binom{k}{2} + d \binom{k}{1}$.
- Retrouver alors la valeur de T_n donnée au 1.
- $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.
- $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.

Donc, $\underbrace{\sum_{k=0}^n (k+1)^5 - k^5}_{\text{somme télescopique}} = 5 \sum_{k=0}^n k^4 + 10 \sum_{k=0}^n k^3 + 10 \sum_{k=0}^n k^2 + 5 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$.

Donc, $(n+1)^5 - 0^5 = 5T_n + 10 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 10 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc, } T_n &= \frac{1}{5} \left[(n+1)^5 - 10 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - 10 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - \frac{5}{2}(n^4 + 2n^3 + n^2) - \frac{5}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) - \frac{5}{2}(n^2 + n) - (n+1) \right] \\ &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ Soit } p \in \llbracket 0, n \rrbracket. S_n(p) = \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}}_{\text{somme télescopique}} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{0}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

4. Je cherche des entiers a, b, c et d tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, k^4 \stackrel{***}{=} a \binom{k}{4} + b \binom{k}{3} + c \binom{k}{2} + d \binom{k}{1}$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } a \binom{k}{4} + b \binom{k}{3} + c \binom{k}{2} + d \binom{k}{1} &= a \frac{k!}{4!(k-4)!} + b \frac{k!}{3!(k-3)!} + c \frac{k!}{2!(k-2)!} + dk \\ &= a \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24} + b \frac{k(k-1)(k-2)}{6} + c \frac{k(k-1)}{2} + dk \\ &= \frac{ak(k-1)(k-2)(k-3) + 4bk(k-1)(k-2) + 12ck(k-1) + 24dk}{24} \\ &= \frac{ak(k-1)(k-2)(k-3) + 4bk(k-1)(k-2) + 12ck(k-1) + 24dk}{24} \\ &= \frac{a}{24} k^4 + \left(\frac{-6a+4b}{24} \right) k^3 + \left(\frac{11a-12b+12c}{24} \right) k^2 + \left(\frac{-6a+8b-12c+24d}{24} \right) k \end{aligned}$$

Donc pour que *** soit vraie pour tout entier $k \geq 4$, il suffit de choisir a, b, c, d tels que :

$$\begin{cases} \frac{a}{24} = 1 \\ \frac{-6a+4b}{24} = 0 \\ \frac{11a-12b+12c}{24} = 0 \\ \frac{-6a+8b-12c+24d}{24} = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} a = 24 \\ b = \frac{3}{2}a = 36 \\ c = b - \frac{11}{12}a = 36 - 22 = 14 \\ d = \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}a = 7 - 12 + 6 = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, k^4 = 24 \binom{k}{4} + 36 \binom{k}{3} + 14 \binom{k}{2} + \binom{k}{1}$.

Pour $k = 0$, cette égalité est encore vraie : elle donne $0 = 0$ ce qui est vrai.

Pour $k = 1$, aussi : elle donne $1 = 0 + 0 + 0 + 1$ ce qui est vrai.

Pour $k = 2$, aussi : elle donne $16 = 0 + 0 + 14 + 2$ ce qui est vrai.

Pour $k = 3$, aussi : elle donne $81 = 0 + 36 + 14 \cdot 3 + 3$ ce qui est vrai.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, k^4 = 24 \binom{k}{4} + 36 \binom{k}{3} + 14 \binom{k}{2} + \binom{k}{1}$.

$$\begin{aligned} 5. \text{ Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^4 &= 24 \sum_{k=0}^n \binom{k}{4} + 36 \sum_{k=0}^n \binom{k}{3} + 14 \sum_{k=0}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{1} \\ &= 24 \binom{n+1}{5} + 36 \binom{n+1}{4} + 14 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= 24 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} + 36 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + 14 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5} + 3 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2} + 7 \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

Ex 4 Supposons qu'il existe a et b réels tels que $b-1-a \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. Montrons que : pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+b)u_{n+1} - (n+b-1)u_n = (a-b+1)u_n$.

2. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{a+1-b} [(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$.

3. Application : Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout entier naturel k , on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

3.1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.

3.2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{1-p} ((n+1)u_n - 1)$.

3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

1. On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ donc, $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0$ et par conséquent,

$$(n+b)u_{n+1} - (n+b-1)u_n = (n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n + (a-b+1)u_n = (a-b+1)u_n.$$

2.

$$\text{Alors, } \sum_{k=0}^n [(a-b+1)u_k] = \sum_{k=0}^n [(k+b)u_{k+1} - \underbrace{(k+b-1)u_k}_{v_k}] = [\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k)]$$

télescope

$$\text{Donc, } (b-1-a)S_n \stackrel{***}{=} v_{n+1} - v_0 = (n+b)u_{n+1} + (b-1)u_0$$

$$\text{Ainsi, comme } b-1-a \neq 0, S_n = \frac{1}{a+1-b} [(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0].$$

3.1 Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$(k+p+1)u_{k+1} - (k+1)u_k = (k+p+1) \frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1) \frac{1}{\binom{k+p}{k}} = (k+p+1) \frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1) \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$$

$$= (k+p+1) \frac{1}{\frac{(k+1+p)!}{p!(k+1)!}} - (k+1) \frac{1}{\frac{(k+p)!}{p!k!}} = (k+p+1) \frac{p!(k+1)!}{(k+1+p)!} - (k+1) \frac{p!k!}{(k+p)!} = \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} - \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} = 0.$$

Donc, $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.

3.2 on a donc $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)}{(k+p+1)}$. Ainsi, d'après ce qui précède avec $a = 1$ et $b = p+1$, on peut affirmer que : $b-1-a = p-1 \neq 0$ et donc

$$S_n = \frac{1}{1-p} ((n+1)u_n - u_0) = \frac{1}{1-p} ((n+1)u_n - 1) \text{ car } u_0 = \frac{1}{\binom{p}{0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3.2 ; Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n > 0$ et $\frac{u_n(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{1}{\binom{n+p}{n}} \frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{n!p!}{(n+p)!} \frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{(n+2)!}{(n+p)!} \leq 1$ car $p \geq 2$ donc $0 < (n+2)! \leq (n+p)!$. Par

conséquent, en multipliant l'inégalité par u_n , j'obtiens : $0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. Par suite, $0 < (n+1)u_n \leq \frac{(n+1)p!}{(n+1)(n+2)} = \frac{p!}{(n+2)}$. Comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p!}{n+2} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n = 0$. Alors en passant à la limite dans l'égalité

obtenue à la question 2., je peux conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{p-1}$.