Corrigé DS 1

Exercice 1 De la récurrence et de la formule du binôme de Newton.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, , $\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30} \in \mathbb{N}$.

Posons $H(n)$: $\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30} \in \mathbb{N}$.

Init° : $\frac{0^5}{5}+\frac{0^4}{2}+\frac{0^3}{3}-\frac{0}{30}=0 \in \mathbb{N}$. Donc $H(0)$ vraie.

Propagat° : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ vraie. Et montrons $H(n+1)$.

$\frac{(n+1)^5}{5}+\frac{(n+1)^4}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{(n+1)}{30}$

$=\frac{n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1}{5}+\frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{2}+\frac{n^3+3n^2+3n+1}{3}-\frac{n+1}{30}$

$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}+n^4+2n^3+2n^2+n+2n^3+3n^2+2n+n^2+n+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}$

$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}+n^4+2n^3+2n^2+n+2n^3+3n^2+2n+n^2+n+1.$

Or, par hypothèse $H(n)$, $\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30} \in \mathbb{N}$. Alors, comme $n^4+2n^3+2n^2+n+2n^3+3n^2+2n+n^2+n+1 \in \mathbb{N}$, on peut affirmer que $\frac{(n+1)^5}{5}+\frac{(n+1)^4}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{(n+1)}{30} \in \mathbb{N}$. $H(n+1)$ est donc vérifiée.

CCL° : le théorème de récurrence simple assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, , $\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30} \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Une suite récurrente .

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n>0$.
3. Démontrer que $\forall n \geq 2, u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right) u_{n-1}$.
4. En déduire une expression explicite de u_n pour $n \geq 2$.

1. $u_1=\sum_{k=0}^{0} \frac{u_k}{k+1}=\frac{u_0}{1}=2$ et $u_2=\sum_{k=0}^{1} \frac{u_k}{k+1}=\frac{u_0}{1}+\frac{u_1}{2}=2+1=3.$
2. Posons $H(n)$: $u_n>0$.

Init° : $u_0>0$ donc $H(0)$ est vraie.

Propag° : Soit n un entier naturel. Supposons que $H(0), H(1), \dots, H(n)$ sont vraies. Je sais que $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k+1}$. De plus, $H(0), H(1), \dots, H(n)$ sont vraies donc $u_0>0, u_1>0, \dots, u_n>0$. J'en déduis que $\frac{u_0}{1}>0, \frac{u_1}{2}>0, \dots, \frac{u_n}{n=1}>0$ et par conséquent, $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k+1}>0$. Ainsi $H(n+1)$ est vraie.
CCL° : le théorème de récurrence forte permet alors de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n>0$.

3. Soit $n \geq 2$. $u_n=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1}=\left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{u_k}{k+1}\right]+\frac{u_{n-1}}{n}=u_{n-1}+\frac{u_{n-1}}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right) u_{n-1}$.
4. Soit $n \geq 2$. $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right) u_{n-1}$ donc $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Alors pour un entier $N \geq 2$, $\frac{u_N}{u_1} \underbrace{=}_{télescopage} \prod_{n=2}^{N} \frac{u_n}{u_{n-1}}=\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{n+1}{n}\right) \underbrace{=}_{télescopage} \frac{N+1}{2}$.

Donc, pour un entier $N \geq 2$, $u_N=N+1$.

Exercice 3 Coefficients binomiaux-Pascal-Suite arithmétique.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2\binom{2n+1}{n+1}=\binom{2n+2}{n+1}$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que $S_{n+1}=\left[\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+j}{j-1}\frac{1}{2^{j-1}}\right]+\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$.
   b. Soit $j \in \mathbb{N}$.Compléter l'égalité suivante grâce à la formule de Pascal, $\binom{n+j}{j-1}=\binom{\cdots}{j}-\binom{\cdots}{j}$.
   c. Déduire des questions précédentes que $S_{n+1}=2S_{n+1}-2S_n$.
   d. En déduire alors l'expression explicite de S_n en fonction de n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$2\binom{2n+1}{n+1}=2\frac{(2n+1)!}{(n+1)!(2n+1-n-1)!}=2\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}=\frac{2(n+1)\times(2n+1)!}{(n+1)!n!\times(n+1)}=\frac{(2n+2)\times(2n+1)!}{(n+1)!n!\times(n+1)}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1!)}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-n-1!)}=\binom{2n+2}{n+1}.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k}=\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k}\right]+\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1+k}{j-1}\frac{1}{2^{j-1}}\right]+\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$
3. $\binom{n+j}{j-1}=\binom{n+1+j}{j}-\binom{n+j}{j}$.
4. Alors, $S_{n+1}=\left[\sum_{j=1}^{n+1}\left(\binom{n+1+j}{j}-\binom{n+j}{j}\right)\frac{1}{2^{j-1}}\right]+\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$

$$S_{n+1}=\left[\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1+j}{j}\frac{1}{2^{j-1}}\right]-\left[\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+j}{j}\frac{1}{2^{j-1}}\right]+\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}=2\left[\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1+j}{j}\frac{1}{2^j}\right]-2\left[\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+j}{j}\frac{1}{2^j}\right]+2\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$S_{n+1}=2\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1+j}{j}\frac{1}{2^j}\right]-2-2\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{j}\frac{1}{2^j}\right]+2-\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^n}+2\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$$

$S_{n+1}=2\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1+j}{j}\frac{1}{2^j}\right]-2\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{j}\frac{1}{2^j}\right]=2S_{n+1}-2S_n.$

Alors $S_{n+1}=2S_n$. Donc la suite (S_n) est géométrique de raison 2. Donc, $\forall n, S_n=2^nS_0 \underbrace{=}_{\substack{car\\ S_0=\binom{n}{0}\frac{1}{2^0}=1}} 2^n$.

Exercice 4 : quatre méthodes pour calculer $S_n=\sum_{k=1}^{n}ka^k$.

Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}ka^k$.

1. Calculer S_n pour $a=1$ *puis* $a=0$. Désormais $a\neq 1$ *et* $a\neq 0$.

Partie 1 : Calcul de S_n grâce à un système linéaire

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Justifier que $S_{n+1}=\left(\sum_{j=1}^{n}(j+1)a^{j+1}\right)+a$.
3. En déduire que $S_{n+1}=aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$.
4. Déterminer une autre relation entre S_{n+1} et S_n.
5. Déduire de ces deux relations, une nouvelle expression (sans $\sum$) de S_n.

Partie 2 : Calcul de S_n par dérivation

Soit $n\in\mathbb{N}^*$et notons f la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\},\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

6. Donner une autre expression de $f(x)$ et en déduire deux expressions de $f'(x)$.
7. Exprimer S_n en fonction de f' *et* a et retrouver l' expression de S_n obtenue au 4.

Partie 3 : Calcul de S_n par télescopage

8. Déterminer les réels A et B de sorte que la suite (u_n) telle que : $\forall n, u_n=(An+B)a^n$ (où A et B sont des réels indépendants de n) vérifie : $\forall k\in\mathbb{N}, u_{k+1}-u_k=ka^k$.
9. Retrouver alors l'expression de S_n obtenue aux questions 4. et 6.

1. $Si\ a=1\ alors\ S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\ \ et\ \ Si\ a=0\ alors\ S_n=\sum_{k=1}^{n}0=0$.
2. $S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}ka^k \underbrace{=}_{\substack{k=j+1\\ j=k-1\\ k\in[\![1,n+1]\!]\Leftrightarrow j\in[\![0,n]\!]}} \left(\sum_{j=0}^{n}(j+1)a^{j+1}\right)=\sum_{j=1}^{n}(j+1)a^{j+1}+a.$
3. $S_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}(j+1)a^{j+1}+a=\sum_{j=1}^{n}\left(ja^{j+1}+a^{j+1}\right)+a=\sum_{j=1}^{n}ja^{j+1}+\sum_{j=1}^{n}a^{j+1}+a$

$$=\sum_{j=1}^{n}ja^j\times a+\sum_{j=1}^{n}a^j\times a+a=a\sum_{j=1}^{n}ja^j+a\sum_{j=1}^{n}a^j+a=aS_n+a^2\frac{a^n-1}{a-1}+a=aS_n+\frac{a^{n+2}-a^2+a^2-a}{a-1}.$$

$$Ainsi, S_{n+1}=aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$$

4. $S_{n+1}=aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$. De plus, $S_{n+1}=S_n+(n+1)a^{n+1}$.

Donc, $aS_n+\frac{a^{n+2}-a}{a-1}=S_n+(n+1)a^{n+1}$. Alors, $(a-1)S_n=(n+1)a^{n+1}-\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$. Et ainsi,

$$S_n=\frac{1}{(a-1)}\left[(n+1)a^{n+1}-\frac{a^{n+2}-a}{a-1}\right]=\frac{1}{(a-1)^2}[(n+1)a^{n+1}(a-1)-(a^{n+2}-a)]$$

$$S_n=\frac{1}{(a-1)^2}[na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a].$$

5. $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$.
6. Alors, $S_n=\sum_{k=1}^{n}ka^k=a(\sum_{k=1}^{n}k\,a^{k-1})\underbrace{=}_{car\ a\neq 1} af'(a)=a\frac{(n+1)a^n(a-1)-(a^{n+1}-1)}{(a-1)^2}=\frac{na^{n+1}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$.
7. $\forall k\in\mathbb{N}, u_{k+1}-u_k=ka^k\Longrightarrow\begin{cases}(A\times 1+B)a^1-(A\times 0+B)a^0=0\ (pour\ k=0)\\ (A\times 2+B)a^2-(A\times 1+B)a^1=a\ (pour\ k=1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}aA+(a-1)B=0\\ (2a-1)A+(a-1)B=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}aA+(a-1)B=0\\ (a-1)A=1\ \ (L_2\leftarrow L_2-L_1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}B=-\frac{a}{a-1}A=-\frac{a}{(a-1)^2}\\ A=\frac{1}{a-1}\end{cases}.$

Donc pour qu'une suite de la forme $u_n = (An+B)a^n$, vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = ka^k$, il faut que $\begin{cases} B = -\frac{a}{(a-1)^2} \\ A = \frac{1}{a-1} \end{cases}$.

Posons $\forall n, u_n = \left(\frac{1}{a-1}n - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^n$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = \left(\frac{1}{a-1}(k+1) - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^{k+1} - \left(\frac{1}{a-1}k - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^k = a^k\left[\frac{a}{a-1}(k+1) - \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{1}{a-1}k + \frac{a}{(a-1)^2}\right]$

$= a^k\left[k + \left(\frac{a}{a-1} - \frac{a^2}{(a-1)^2} + \frac{a}{(a-1)^2}\right)\right] = a^k\left[k + \left(\frac{a(a-1)-a^2+a}{(a-1)^2}\right)\right] = ka^k$. Donc $\begin{cases} B = -\frac{a}{(a-1)^2} \\ A = \frac{1}{a-1} \end{cases}$ conviennent.

8. $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = ka^k$. Donc $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n} ka^k = \sum_{k=1}^{n} ka^k = S_n$.

Alors par télescopage, $S_n = u_{n+1} - u_0 = \left(\frac{1}{a-1}(n+1) - \frac{a}{(a-1)^2}\right)a^{n+1} - \left(-\frac{a}{(a-1)^2}\right) = \left(\frac{(n+1)(a-1)-a}{(a-1)^2}\right)a^{n+1} + \frac{a}{(a-1)^2}$

$S_n = \left(\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}}{(a-1)^2}\right) - \frac{a}{(a-1)^2} = \frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}-a}{(a-1)^2}$.

Exercice 5 Une démonstration d'un fameux théorème d'arithmétique

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On note $d = PGCD(a,b)$. Alors $d \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Nous allons montrer dans cet exercice que : $d = 1 \Leftrightarrow \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$. (Rappel : « $d = 1$" signifie que "a et b sont premiers entre eux ").

1. Montrons, dans cette question 1., l'implication : $\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1 \Longrightarrow d = 1$. Pour cel, nous supposons qu'il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$.

1.1. En utilisant le fait que d divise a et d divise b, montrer que d divise 1.

1.2. Conclure.

2. Montrons, dans cette question 2., l'implication : $d = 1 \Longrightarrow \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$. Pour cela, nous supposons que $d = 1$.

Posons $E = \{t \in \mathbb{N}^* / \exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2, t = au + bv\}$.

2.1. Quel type d'objet contient l'ensemble E ? Compléter, au plus précis, la phrase : $E \subset$......

2.2. Déterminer un élément de E.

E donc est non vide. Des deux réponses précédentes, nous affirmons que E contient un plus petit élément noté p. Alors, $p \in E$ et tout autre élément de E est supérieur à p. Donc, $p > 0$ et il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $p = au_0 + bv_0$. Nous allons montrer que $p = 1$.

2.3. Imaginons un instant que $p \geq 2$.

2.3.1. Justifier que p ne peut pas diviser a et b en même temps. Supposons par exemple que p ne divise pas a.

2.3.2. On note q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par p. Montrer que $r = a(1 - u_0q) - bv_0q$.

2.3.3. En déduire que $r \in E$.

2.3.4. Expliquer pourquoi cette dernière conclusion contredit la définition de p.

2.3.5. Conclure.

3. Application : montrer que pour tout entier naturel n, $n^2 + n$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

1.1. d est un diviseur commun de a et de b donc il existe k et k' deux entiers tels que $a = dk$ et $b = dk'$. Alors, $au + bv = 1$ s'écrit $dku + dkv = 1$. Donc, $d(ku + kv) = 1$. Ainsi, d divise 1.

1.2. Comme le seul diviseur entier naturel de 1 est 1, j'en déduis que $d = 1$. Ainsi, a et b sont premiers entre eux.

2.1 E contient des entiers naturels supérieurs à 1. $E \subset \mathbb{N}^*$.

2.2 En prenant $u = a$ et $v = 0$, nous avons $a \times a + b \times 0 = a^2 > 0$ donc $a^2 \in E$

2.3 On pose $p = \min(E)$. Imaginons un instant que $p \geq 2$.

2.3.1. Comme a et b sont premiers entre eux, a et b n'ont aucun diviseur commun supérieur à 2. Ainsi, p ne peut diviser et a et b en même temps. Supposons par exemple que p ne divise pas a. On écrit $a = pq + r$ tq q et r entiers naturels et $0 \leq r < p$.

2.3.2. Nous savons que $p = au_0 + bv_0$. Donc, $a - r = pq = au_0q + bv_0q$. Ainsi, $r = a(1 - u_0q) - bv_0q$.

2.3.3. Posons $u = (1 - u_0q)$ et $v = -v_0q$. Alors u et v sont deux entiers relatifs tels que $r = au + bv$. De plus, comme p ne divise pas a, $r \neq 0$. Donc $r > 0$. J'en déduis que $r \in E$.

2.3.4. r est donc un élément de E et $r < p$. Ceci est impossible puisque p est le plus petit élément de E. J'en déduis que l'hypothèse $p \geq 2$ est fausse. Et ainsi, $p \leq 1$. Comme $p \in E$, p est un entier naturel non nul. Ainsi, p ne peut qu'être égal à 1 et par conséquent, u_0 et v_0 sont deux entiers relatifs qui vérifient $au_0 + bv_0 = 1$.

3. $(2n+1)(2n+1) - 4(n^2+n) = 1$. Donc les entiers $u = 2n + 1$ et $v = -4$ vérifient $u(2n+1) + v(n^2+n) = 1$. J'en déduis que $2n + 1$ et $n^2 + n$ sont premiers entre eux.