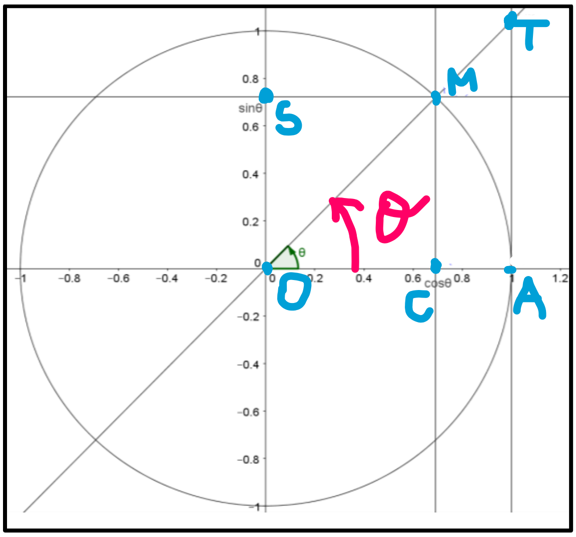
♥TRIGONOMETRIE♥



Définition : Soit θ un réel.

$cos\theta = \cos(\theta)$
$= abscisse\ de\ M(\theta) = \overline{OC(\theta)}$

$sin\theta = \sin(\theta)$
$= ordonnée\ de\ M(\theta) = \overline{OS(\theta)}$

Si θ distinct des réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$,
$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \overline{AT}(\theta)$.

Si θ distinct des réels $k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$, $\cot an(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

θ	$cos\theta$	$sin\theta$	$tan\theta$	$cotan\theta$
0	1	0	0	N'existe pas
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	N'existe pas	0

FORMULES DE TRIGONOMETRIE Soit θ, a et b, p et q des réels.

1. $|sin\theta| \leq 1$ et $|cos\theta| \leq 1$
2. $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$
3. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$
4. $\cos(-\theta) = cos\theta$ *et* $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
5. $\cos(\pi + \theta) = -cos\theta$ *et* $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
6. $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin(\theta)$
7. $\cos(\pi - \theta) = -cos\theta$ *et* $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
8. $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$ *et* $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$
9. $cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -sin\theta$ *et* $sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = cos\theta$
10. $cosb = cosa \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \ b = a + 2k\pi\ ou\ b = -a + 2k\pi$
11. $sinb = sina \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \ b = a + 2k\pi\ ou\ b = \pi - a + 2k\pi$
12. Si $a \in [-1; 1]$, alors $Arccos(a)$ est le seul réel de $[0; \pi]$ *dont le cosinus vaut* a.
13. Si $b \in [-1; 1]$,alors $Arcsin(b)$ est le seul réel de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *dont le sinus vaut* b.
14. $cosx = sina \Leftrightarrow cosx = cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \Leftrightarrow$
15. $\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a + b) = \sin(a)cos(b) + \sin(b)cos(a) \end{cases}$
16. $\begin{cases} \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{cases}$
17. $\begin{cases} \cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta \\ \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$

Si, pour chaque égalité, toutes les tangentes qui apparaissent dans la formule existent, on a la relation :

18. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$ valable dès que $\tan(\theta)$ existe.
19. $\tan(-\theta) = -tan\theta$ valable dès que $\tan(\theta)$ existe.
20. $1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$ valable dès que $\tan(\theta)$ existe.
21. $tan(b) = tan(a) \Leftrightarrow il\ existe\ k \in \mathbb{Z}\ tq : \ b = a + k\pi$.
22. $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ valable dès que $\tan(a)$, $\tan(b)$ *et* $\tan(a + b)$ existent.
23. $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$ valable dès que $\tan(a)$, $\tan(b)$ *et* $\tan(a - b)$ existent.
24. $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$ valable dès que $\tan(a)$ *et* $\tan(2a)$ existent.
25. $tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{tan\theta}$ valable dès que $\tan(\theta)$ *et* $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ existent.
26. $tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{tan\theta}$ valable dès que $\tan(\theta)$ *et* $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ existent.
27. Si $c \in \mathbb{R}$, alors $Arctan(c)$ est le seul réel de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ *dont la tangente vaut* c.

A SAVOIR RETROUVER PAR LE CALCUL OU SUR LE CERCLE TRIGONOMATRIQUE

28. $\begin{cases} cosacosb = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)] \\ sinasinb = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \\ sinacosb = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)] \end{cases}$

29. $\begin{cases} cos(p)+cos(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ cos(p)-cos(q) = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ sin(p)+sin(q) = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$

30. $\cos(b) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}/b \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$

31. $\sin(b) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}/b \in]2k\pi, \pi+2k\pi[$

32. $\tan(b) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}/b \in \left]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

33. $\cos(b) = a \iff \begin{cases} impossible\ si\ a \notin [-1;1] \\ b = Arccos(a) + 2k\pi\ \ ou\ b = -Arccos(a) + 2k\pi\ \ si\ a \in [-1;1] \\ tq\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

34. $\sin(b) = a \iff \begin{cases} impossible\ si\ a \notin [-1;1] \\ b = Arcsin(a) + 2k\pi\ \ ou\ b = \pi - Arcsin(a) + 2k\pi\ \ si\ a \in [-1;1] \\ tq\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

35. $\tan(b) = a \iff \exists k \in \mathbb{Z}/b = Arctan(a) + k\pi$

36. Pour tous réels a et b non tous nuls, il existe toujours un réel θ tel que : $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+b^2}}$.

Si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ , \frac{\pi}{2}+2k\pi\ [\ alors\ \ \theta \equiv arctan\frac{b}{a}\ [2\pi]$.

Si $\theta \in]\ \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\ [\ alors\ \theta \equiv \pi + arctan\frac{b}{a}\ [2\pi]$.