TD 4

x et y désignent des réels, z un complexe, n un entier naturel et $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct du plan.

I Forme algébrique, forme trigonométrique d'un nombre complexe. Géométrie avec les nombres complexes.

EX 1 Soit z un nombre complexe et x un réel. Expliquer pourquoi ces nombres complexes sont réels ou imaginaires purs :

$B = \frac{z-\bar{z}}{z^3+\bar{z}^3}$ $\quad C = \frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+2}$ $\quad D = \left(e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}\right)^2$ $\quad et \quad E = \frac{i}{e^{-ix}-e^{ix}}$

EX 2 Calculer les parties réelle et imaginaire, le module et un argument de chacun des complexes suivants et placer l'image ponctuelle de ce complexe dans le plan (x et y désignent des paramètres réels) :

1. $\frac{(4i-3)}{(2i-1)^3}$
2. $\left(\frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}\right)^8$
3. $(1-i)^2$
4. $(1+i)^{1999}$
5. $\frac{1}{1+i\tan(x)}$
6. $\frac{1+ix}{1-ix}$
7. $\frac{1+\cos x+i\sin x}{1-\cos x+i\sin x}$
8. $e^{ix} - e^{iy}$
9. $i + 1 + \sqrt{2}e^{ix}$
10. $1 + e^{ix} + e^{2ix}$
11. $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}$
12. $\left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016}$.

EX 3 Déterminer tous les complexes z tels que :

1) $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0.$

2) $z^2 = 3\bar{z}.$

3) $z^5\bar{z} = 1$

4) $Im\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0.$

5) $|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|.$

Ex 3 bis Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que : $ad - bc > 0$ et $cz + d \neq 0$. Montrer que : $Im(z) > 0 \Longrightarrow Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0.$

EX 4 Soient $(u, v, w) \in \mathbb{U}^3$.

1. Montrer que : $|u + v + w| = |uv + vw + wu|$.
2. Montrer que : pour tout complexe z non nul, $\left|u - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{|u-z|}{|z|}$.
3. On suppose, ici, que: $1 + uv \neq 0$. Montrer que : $\frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.
4. On suppose, ici, que: $u \neq 1$.
   a. Montrer que $Re\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$.
   b. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le complexe $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n$ est-il réel ?

Ex 5 Montrer que $f: (z \mapsto |1 + iz|^2 + |z + i|^2)$ est constante sur $\mathbb{U}$.

EX 6 Montrer que pour tous complexes z et w ,

1. $1 \leq |1 + z| + |z|$.
2. $|z| + |z + w| + |w| \leq |2z| + |2w|$.
3. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
4. $1 + |zw - 1| \leq (1 + |z - 1|) + (1 + |w - 1|)$.

Ex 7 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Ex 8 Soit a et b deux complexes de module strictement inférieur à 1. Montrer que : $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$

Ex 9 Soit u un nombre complexe distinct de 1 et z un complexe non réel. Montrer que : $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1.$

EX 10 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que les racines complexes de $P(z) = z^n - z - 1$ sont de module strictement compris entre 0 et 2.

EX 11 Déterminer les entiers n tels que : $\left(\sqrt{3} - i\right)^n$ soit réel. Représenter les points d'affixe $z_k = \left(\sqrt{3} - i\right)^k$ tq $k \in [\![0,5]\!]$.

EX 12 Déterminer une fonction polynômiale P tel que **:** pour tout réel x, $\sin(7x) = P(\sin(x))$.

EX 13 Retrouver la relation entre $\cos(3t), \cos^3(t) et \cos(t)$.

EX 14 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^2(5t)dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t)\, sin^3(3t)dt$.

EX 15 Soit x et y des réels, n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

1. $D_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n}$.
2. $R_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx+y)$ et $S = cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$.
3. $S_n = \sum_{k=0}^{n} sin^2(kx)$, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} cos^3(kx)$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{cos^k(x)}$ et $X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.
4. $V_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(2kx)$, $W_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} sin^2(kx)$.

EX 16 1) Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire : $S_n = \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k} (-1)^k$ et $T_n = \sum_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k$.

2) On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

a. Calculer j^p suivant les valeurs de l'entier naturel p et placer les points M_p d'affixe j^p dans le plan complexe.

b. En déduire les valeurs des sommes : $U_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{3n}{3k}$, $V_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{3n}{3k+1}$ et $W_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{3n}{3k+2}$.

EX 17 Soit α un réel fixé . Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z telle que :

1. $|2z - iz + 1| = 3$
2. $\left|\frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z}\right| = 1$
3. $\left|\frac{z+1-i}{2i-\bar{z}}\right| = 2$
4. $arg(\bar{z} - 1) = \frac{\pi}{3}[\pi]$
5. $\arg\left((2\bar{z} - i)(iz - 1)\right) = 0[\pi]$
6. $arg\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
7. $arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$
8. $\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^{-*}$
9. $\frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}} \in i\mathbb{R}$.
10. $Re\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = 0$

EX 18 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe complexe z tels que : M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle (puis isocèle).

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^4)$ sont alignés.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $A(1)$ et $P(1+z^2)$ sont alignés.

EX 19

1) Soit $\alpha = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$. Représenter les points M_n d'affixe α^n tq $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}i$ et u_n affixe de M_n .
   a) Montrer que tous les points M_n sont alignés.
   b) Exprimer u_n $en\ fonction\ de\ n$. Déterminer la limite des suites $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$.
3) Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n+2(1-i)}{z_n-3i}$ $(**)$.
   On note M_n le point image de z_n.
   a) Calculer z_1 et z_2 .
   b) Trouver deux suites constantes égales à p et q (telles que $|p| > |q|$.)qui vérifient la même relation de récurrence $(**)$ que la suite (z_n) .
   c) Montrer que la suite $\left(\frac{z_n-p}{z_n-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   d) En déduire z_n en fonction de n et Déterminer la limite des suites $Re(z_n)$ et $Im(z_n)$.

II Exponentielle complexe-Equations polynomiales. Racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes.

Ex 20 Donner les racines *carrées* complexes des nombres complexes a suivants :

1. $a = -1$
2. $a = -3$
3. $a = 2$
4. $a = cos^2(\alpha) - 1$ où α réel.
5. $a = -2i$
6. $a = \frac{1}{4}i$
7. $a = j$
8. $a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}$
9. $a = -12 + 16i$
10. $a = -2 + i$

Ex 21 Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe ou (z, w) couple de complexes :

1. $Im\left(\frac{1}{1+z+z^2}\right) = 0$
2. $e^{\bar{z}} = -5.$
3. $e^{2z} + e^z + 1 = 0$
4. $e^{3z} + 3e^{2z} + 24e^{-z} = -8$
5. $e^{z^2} = 1$
6. $(-4-2i)z^2 + (7-i)z + 1 + 3i = 0$
7. $\begin{cases} z + \overline{w} = -1 + 2i \\ \bar{z}w = 1 + 7i \end{cases}$

8. $\begin{cases} e^z + e^w = 2 \\ e^{z+w} = 2 \end{cases}$
9. $z^4 + 119 - 120i = 0$
10. $z^4 - 14iz^2 + 32 = 0$
11. $z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i = 0$
12. $z^4\left(1 + tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)z^2 - 4 = 0 \; où \; \alpha \in]0,\pi[$
13. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$
14. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$

Ex 22 Donner les racines $n^{ièmes}$ des complexes a suivants et les représenter dans le plan complexe (i.e. le plan muni d'un repère orthonormé direct) :

1. $a = -1 \qquad n = 8$
2. $a = 7 - 24i \quad n = 4$.
3. $a = -8i \qquad n = 6$
4. $a = j \qquad n = 10$
5. $a = \frac{1+i}{3-i\sqrt{3}} \qquad n = 5$
6. $a = e^{2ix} - 1 \qquad n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,\pi[$
7. $a = \frac{1+itan\theta}{1-itan\theta} \qquad n = 6$

Ex 23 Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe (n désigne un entière naturel non nul):

1. $(z-1)^n = (z+1)^n \; où \; n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
2. $1 - i(1-z)^4 = 0$
3. $z^n = 3^n$
4. $z^8 = \bar{z}$
5. $64(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
6. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$
7. $z^8 + z^4 + 1 = 0$
8. $(z-i)^3 + (z-i)^2(z+i) + (z-i)(z+i)^2 + (z+i)^3 = 0$
9. $(1-i)\bar{z}^8 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z = 0$
10. $z^5 + z^6 + \cdots . + z^n = 0 \; où \; n \geq 5$.
11. $z^6 + z^3(1+z)^3 + (1+z)^6 = 0$
12. $z^{2n} - 2z^n\cos(\alpha) + 1 = 0$ où $\alpha \in [0,\pi]$
13. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 2\cos(\alpha)$ où $\alpha \in [0,\pi]$

Ex 24 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = z(1-z)$.
Démontrer, en utilisant la forme canonique de f, que : $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

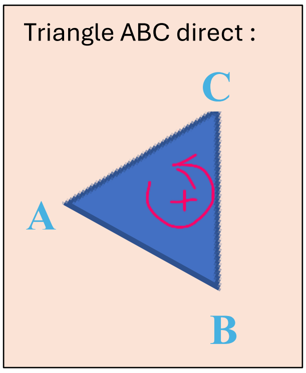
Ex 25 Soit $\alpha \in]-\pi,\pi[$. On considère l'équation $z^2 - 2^{\alpha+1}cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.

1. Résoudre cette équation ; on note $z_1 \; et \; z_2$ les solutions.
2. Soit A , B et O les points d'affixe $z_1, z_2 \; et \; 0$. Déterminer les valeurs de α pour que OAB soit équilatéral.

Ex 26 1) Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 2z^3 - (4+2i)z^2 - (34-10i)z + 56 + 72i$ sachant que P a une racine réelle.
2) Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^4 + \left(1 - \sqrt{3}\right)z^3 + \left(2 - \sqrt{3}\right)z^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)z + 1$ en utilisant $Z = z + \frac{1}{z}$.

Ex 27 Calculer de deux manières les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $cos\frac{13\pi}{12}$ et $sin\frac{13\pi}{12}$.

Ex 28 Soit $a, b \; et \; c$ trois complexes distincts et $A, B \; et \; C$ leurs images ponctuelles respectives.
Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin)si et ssi $a + bj + cj^2 = 0$



Ex 29 1. Calculer j^p suivant les valeurs de l'entier naturel p.
2.Soit n un entier naturel. On pose
$U_n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k}$, $V_n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k+1}$ et $W_n = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k+2}$.

a. Exprimer $(1+j)^{3n}$en fonction de ces trois sommes U_n, V_n et W_n.
b. En déduire deux équations linéaires vérifiées par U_n, V_n et W_n.
c. En déduire les valeurs de U_n, V_n et W_n.

Ex 30 Résoudre le système (S) $\begin{cases} x + jy + j^2z = 0 \\ j^2x + y + jz = 0 \\ jx + j^2y + z = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

Ex 31 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MQ}$ où P et Q sont les points images des racines carrées complexes de z .

Ex 32 Soit a un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $(\boldsymbol{e})$ l'équation : $(1-ia)(1+iz)^n = (1+ia)(1-iz)^n$

1. Montrer, géométriquement, que toutes les solutions de (e) sont réelles.
2. Justifier qu'il existe un et un seul réel α dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = a$. Qui est α ?
3. Résoudre (e) dans $\mathbb{C}$, donner les solutions de (e) en fonction de α et sous une forme qui permette de lire qu'elles sont réelles.

Ex 33 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout k de $\{0 \,; 1 \,; \ldots \,; n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\omega_k$

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $S(p) = \sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^p$.
5. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ \sum_{k=1}^{n} (z + \omega_k)^n = n(z^n + 1)$.

Ex 34 Soit a un complexe de module 1. n un entier strictement positif. On note $u_1, u_2, \ldots, u_n$,les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a et $z_k = (1 + u_k)^n$.Montrer que les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ d'affixes respectives $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont sur une même droite passant par O.

Ex 35 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ les images ponctuelles de ces racines $n^{\text{ièmes}}$.

1. Montrer que $\forall M \in \mathscr{P}, \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} = n\overrightarrow{MO}$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = n$.
2. Montrer que $\forall M \in \mathscr{P}, \sum_{k=0}^{n-1} {MA_k}^2 = nMO^2 + n$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\sum_{k=0}^{n-1} {MA_k}^2 = 2n$.

Ex 36 Soit a et b deux paramètres complexes distincts et $\boldsymbol{n}$ un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z - a)^n = (z - b)^n$
2. Montrer que les points images des solutions sont alignés sur la médiatrice de $[A, B]$ où A est l'image ponctuelle de $a\ et\ B$ celle de b .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a\ et\ b$ pour que toutes les solutions soient réelles. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir qu'elles sont réelles).
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a\ et\ b$ pour toutes les solutions soient imaginaires pures. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont imaginaires pures)

Ex 37 Soit l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
2. En déduire la valeur de la somme : $S = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
4. En déduire des expressions par radicaux de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
5. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$etcos$\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs au cercle (C) de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et à l'axe réel.
6. Déduire de ce qui précède une construction à la règle et au compas des sommets d'un pentagone régulier.

Ex 38 Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

1. Calculer $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$.
2. Calculer $\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}$.
3. En déduire $\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}$
4. On pose $S = u + u^2 + u^4$.
5. Exprimer $\bar{S}$ en fonction de u. En déduire $S + \bar{S}\ et\ S\bar{S}$.
6. En déduire S sous forme algébrique.
7. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.