

Programme de colle 6

CHAP 4 Nombres complexes

I Forme algébrique

- Ensemble $\mathbb{C}$:
 - définition, **forme algébrique (existence et unicité)**, partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur
 - règles de calculs : égalité de deux complexes, parties réelle et imaginaire d'une somme de nombres complexes.
- Représentation d'un nombre complexe :
 - définition de l'affixe d'un point, d'un vecteur, images ponctuelle et vectorielle d'un complexe
 - affixe de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, affixe de $\overrightarrow{MM'}$; caractérisation par les complexes de deux points symétriques par rapport à O.
- Conjugué d'un nombre complexe :
 - définition du conjugué et son image ponctuelle
 - **propriétés** :
 - ✓ écriture des parties réelle et imaginaire de z à l'aide de z et de son conjugué
 - ✓ caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur grâce au conjugué.
 - ✓ conjugué d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes
 - ✓ le produit d'un complexe par son conjugué.

II Forme trigonométrique

- Module : **4 définitions équivalentes** : par les parties réelle et imaginaire - par le conjugué - par une distance - par une norme de vecteur .
Propriétés du module :
 - module d'un réel
 - comparaison entre $|Re(z)|$ et $|z|$, entre $|Im(z)|$ et $|z|$
 - module de l'inverse d'un complexe, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance de complexes
 - module de $\frac{z}{|z|}$
 - inégalités triangulaires, cas d'égalité dans la première inégalité triangulaire.
 - applications « géométriques » Distance entre deux points . Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
- Exponentielle imaginaire.
 - définition
 - **caractérisation (écriture) des complexes de module 1.**
 - **propriétés** :
 - ✓ égalité de deux exponentielles imaginaires
 - ✓ produit et quotient d'exponentielle imaginaire
 - ✓ formules de Moivre
 - ✓ Formule d'Euler
 - ✓ Identités du losange.
- La forme trigonométrique et les arguments d'un nombre complexe non nul :
 - définition (géométrique) d'un argument d'un complexe non nul
 - **forme trigonométrique d'un complexe non nul : existence et unicité.**
 - caractérisation de l'égalité de deux complexes non nuls.
 - forme quasi-trigonométrique : réel $\times$ exponentielle imaginaire
 - relation entre forme trigo et forme algébrique
 - propriétés des arguments : $arg(zz')$, $arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $arg\left(\frac{z'}{z}\right)$, $arg(z^n)$ où $n \in \mathbb{Z}$, $arg(\bar{z})$.
- Applications « algébriques » à savoir retrouver
 - identités du losange généralisées : $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ et $e^{i\theta} - e^{i\theta'}$.
 - quotient et puissance de complexes
 - linéarisation d'un produit de sinus et cosinus
 - calcul de $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
- Applications « géométriques »
 - **distance entre deux points** . Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
 - **angle entre deux vecteurs**. Description par les complexes de l'alignement de points, d'un cercle de diamètre connu.

- Exponentielle complexe :
 - définition de l'exponentielle complexe
 - module, arguments, parties réelle et imaginaire d'une exponentielle complexe
 - propriétés : $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \dots, e^{z+z'} = \dots, e^{z-z'} = \dots, e^{-z} = \dots, \overline{e^z} = \dots$.

III Racines carrées complexes-Equations polynomiales.

- Racines carrées complexes (racines deuxièmes) d'un complexe :
 - définition
 - théorème d'existence
 - méthodes d'obtention.
- Théorème de factorisation dans $\mathbb{C}$ d'une expression polynômiale de degré 2 à coefficients complexes. Somme et produit des racines. Cas d'une expression à coefficients réels et $\Delta < 0$.
- $\begin{cases} u + v = s \\ uv = p \end{cases} \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ sont les racines de } P(z) = z^2 - sz + p.$
- Division euclidienne et Factorisation d'une fonction polynomiale connaissant une de ces racines.

IV Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe , $n \in \mathbb{N}^*$

- Définition d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe.
- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :
 - théorème donnant les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
 - illustration : polygone régulier
 - Racines $3^{\text{ièmes}}$ de l'unité : définition et propriétés de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
 - somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ($n \geq 2$).
- Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul:
 - théorème donnant les n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul
 - méthode d'obtention.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

La question de cours demandée peut être :

A. Enoncer une définition et /ou une propriété de cours .

ET /OU

B. Enoncer et démontrer les résultats suivants:

- 1) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- 2) Formule d'Euler et identités du losange.
- 3) Le théorème de factorisation d'une expression polynomiale de degré 2 à coefficients complexes.
- 4) Le théorème explicitant les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité où $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5) Le théorème donnant les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe a non nul où $n \in \mathbb{N}^*$.
- 6) Savoir compléter et démontrer les formules : Soit A, B, C et D des points du plan

$$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$

$$(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi] \text{ si } A \neq B$$

$$(\widehat{AB, CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \text{ si } A \neq B \text{ et } C \neq D \text{ sont distincts.}$$

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.