

CORRIGE JOUR 2

Ex 1 Sommes trigonométriques. Soit n un entier naturel non nul et x un réel.

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$, $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}$ et $V_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kx)$.

Résolution

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) \stackrel{\substack{\text{je linéarise} \\ \sin^2(kx) \\ \text{avec } **}}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} [1 - \cos(2kx)] = \frac{1}{2} [\sum_{k=0}^n 1] - \frac{1}{2} [\sum_{k=0}^n \cos(2kx)]$$

$$S_n \stackrel{\substack{\text{en notant} \\ R_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)}}{=} \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} R_n.$$

Calculons $R_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$.

$$R_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{2ikx}) \stackrel{\text{car } n \text{ réel}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}).$$

$$\text{Or, } \sum_{k=0}^n e^{2ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{2ix})^k = \begin{cases} \frac{(e^{2ix})^{n+1} - 1}{e^{2ix} - 1} & \text{si } e^{2ix} \neq 1 \\ n+1 & \text{si } e^{2ix} = 1 \end{cases}$$

De plus, $e^{2ix} = 1 = e^{i0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/2x = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = k\pi$.

1^{er} cas $x \equiv 0[\pi]$. Alors $\operatorname{Re}(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}) = n+1$ et $S_n \equiv 0$.

2^{ème} cas : $x \not\equiv 0[\pi]$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{2ikx} &= \frac{(e^{2ix})^{n+1} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{2i \sin((n+1)x) e^{i(n+1)x}}{2i \sin(x) e^{ix}} \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{i((n+1)x-x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{inx} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} [\cos(nx) + i \sin(nx)] \\ \sum_{k=0}^n e^{2ikx} &= \underbrace{\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \sin(nx)}_{\in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \operatorname{Re}(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx). \text{ Alors } S_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx).$$

Ici x est un réel tel que $\cos(x) \neq 0$ i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)} \stackrel{\substack{\text{car } \frac{1}{\cos^k(x)} \in \mathbb{R}}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Im}(e^{ikx})}{\cos^k(x)} = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} \right). \text{ Or, } \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \right)^k = \begin{cases} \frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} & \text{si } \frac{e^{ix}}{\cos(x)} \neq 1 \\ n & \text{si } \frac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1 \Leftrightarrow e^{ix} = \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x) + i \sin(x) = \cos(x) + i0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = k\pi.$$

1^{er} cas : $\forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi$.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} &= \frac{\frac{e^{inx}}{(\cos(x))^n} - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} = \frac{e^{inx} - (\cos(x))^n}{e^{ix} - \cos(x)} \cdot \frac{1}{(\cos(x))^{n-1}} = \frac{1}{(\cos(x))^{n-1}} \frac{\cos(nx) - (\cos(x))^n + i \sin(nx)}{\cos(x) + i \sin(x) - \cos(x)} \\ &= \frac{1}{(\cos(x))^{n-1}} \frac{\cos(nx) - (\cos(x))^n + i \sin(nx)}{i \sin(x)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} &\stackrel{\substack{\text{car } \frac{1}{\cos(x)} = -i}}{=} \frac{1}{\sin(x) (\cos(x))^{n-1}} (-i) [\cos(nx) - (\cos(x))^n + i \sin(nx)] \\ &= \frac{1}{\sin(x) (\cos(x))^{n-1}} [\sin(nx) - i \cos(nx) - (\cos(x))^n]. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } U_n = \frac{\cos(nx) - (\cos(x))^n}{\sin(x) (\cos(x))^{n-1}}.$$

$$\text{2^{ème} cas : } \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi. \text{ Alors } U_n = \operatorname{Im}(n) \stackrel{\text{car } n \text{ réel}}{=} 0.$$

$$V_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kx) \stackrel{\substack{\text{car } \binom{n}{k} \in \mathbb{R}}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Re}(e^{2ikx}) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2ikx} \right)$$

$$\text{Donc, } V_n = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2ikx} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2ikx} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2ix})^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2ix})^k 1^{n-k} \stackrel{\text{FBN}}{=} (1 + e^{2ix})^n \\ &= (2 \cos(x) e^{ix})^n = 2^n \cos(x)^n e^{inx} = 2^n \cos(x)^n \cos(nx) + i 2^n \cos(x)^n \sin(nx). \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } V_n = 2^n \cos(x)^n \cos(nx).$$

Cours

Angle double : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ (**).

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = \underbrace{\cos(\theta)}_{\operatorname{Re}(e^{i\theta})} + i \underbrace{\sin(\theta)}_{\operatorname{Im}(e^{i\theta})}$$

Pour tous complexes $z_P, \dots, z_N$,

$$\sum_{k=P}^N \operatorname{Re}(z_k) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=P}^N z_k \right).$$

$$\sum_{k=P}^N \operatorname{Im}(z_k) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=P}^N z_k \right).$$

$$\text{Moivre : } \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}.$$

Somme géométrique :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=P}^N z^k = \begin{cases} \frac{z^{N-P+1} - 1}{z - 1} \times z^P & \text{si } z \neq 1 \\ N - P + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\theta' = \theta + 2k\pi.$$

Identité du Losange :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

$$e^{i\theta} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}.$$

Forme algébrique - forme trigonométrique :

Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$.

Si $z = re^{i\theta}$ avec r et θ réels et $r > 0$ alors

$|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ et si de plus $\theta \in [0, 2\pi[$, θ est l'argument principal de z .

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

Ex 2 Dérivée d'un quotient et d'une composée simple Soit $f(x) = \frac{e^{5x} - \sin(4x)}{\sqrt{1+5x}}$. Déterminer le domaine de définition D de f . Justifier que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

$f(x)$ existe sietssi $\begin{cases} 1+5x \geq 0 \\ \sqrt{1+5x} \neq 0 \end{cases}$ sietssi $1+5x > 0$ sietssi $x > -\frac{1}{5}$. Donc $D =]-\frac{1}{5}; +\infty[$.

- Comme $\exp$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $(x \mapsto \exp(5x))$ et $(x \mapsto \sin(4x))$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur D .

- Dans l'expression de f , seule la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, ici, $\forall x \in D, 1+5x \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc la fonction $(x \mapsto \sqrt{1+5x})$ est dérivable que sur D . f s'écrit donc comme un **quotient** de fonctions dérivables sur D . Donc f est dérivable sur D .

Et $\forall x \in D, f'(x) = \frac{[5e^{5x} - 4\cos(4x)]\sqrt{1+5x} - \frac{5}{2\sqrt{1+5x}}[e^{5x} - \sin(4x)]}{1+5x}$

$$f'(x) = \frac{2[5e^{5x} - 4\cos(4x)](1+5x) - 5[e^{5x} - \sin(4x)]}{2(1+5x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{5(10x+1)e^{5x} - 8(1+5x)\cos(4x) + 5\sin(4x)}{2(1+5x)^{\frac{3}{2}}}$$

$\exp(x)$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

$\sin(x)$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

$\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+}$.

Ex 3 Calcul de limite en a par factorisation et simplification par $(x - a)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{\sqrt[3]{1-8x^3}}$.

Posons $N(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ et $D(x) = \sqrt[3]{1-8x^3}$ et $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} N(x) = N\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} D(x) = D\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc on a une $FI : \frac{0}{0}$ dans le calcul de la limite de f en $\frac{1}{2}$

N est polynomiale et s'annule en $\frac{1}{2}$ **donc** je peux factoriser $N(x)$ par $x - \frac{1}{2}$.

$$N(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2).$$

De même, $1 - 8x^3$ est polynomiale et s'annule en $\frac{1}{2}$ **donc** je peux factoriser par $x - \frac{1}{2}$.

$$1 - 8x^3 = (-8)\left(x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \stackrel{\text{factorisation de } a^n - b^n}{=} -8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$1 - 8x^3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(-8x^2 - 4x - 2).$$

$$\text{Donc, } f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{\sqrt[3]{1-8x^3}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2)}{\sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)(-8x^2 - 4x - 2)}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2)}{\sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)(-8x^2 - 4x - 2)}}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{3}} \frac{(2x^2 + 2x + 2)}{\sqrt[3]{(-8x^2 - 4x - 2)}} = \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{(2x^2 + 2x + 2)}{(-8x^2 - 4x - 2)}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x^2 + 2x + 2)}{\sqrt[3]{(-8x^2 - 4x - 2)}} = \frac{7}{2\sqrt[3]{-6}}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = 0$, il n'y a plus de FI et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$.

Si a est racine de la fonction polynomiale non nulle P alors $P(x) = (x - a)Q(x)$ où Q polynomiale, quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$.

Pour tous réels a et b et tout entier naturel n non nul,

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right)$$

$$= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^{n-2}b + b^{n-1})$$

$$X^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{X^{\frac{p}{q}}} \text{ et } \frac{X^r}{X^{r'}} = X^{r-r'}$$

$$X^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{X^{\frac{p}{q}}} \text{ et } \frac{X^r}{X^{r'}} = X^{r-r'}$$