

Nombres complexes

I Premières définitions.

1. Définition de $\mathbb{C}$

1 Théorème (admis) : Il existe un unique ensemble, noté $\mathbb{C}$, vérifiant :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
 - $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations (+) et ($\times$) prolongeant celles de $\mathbb{R}$ et possédant les mêmes propriétés (associativité, commutativité, éléments neutres, symétrique et inverse, distributivité, intégrité).
 - $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que : $i^2 = -1$.
 - Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme (dite algébrique) $z = a + ib$ où a et b sont réels.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ est appelé un nombre complexe et $\mathbb{C}$ est appelé le corps des complexes ou l'ensemble des nombres complexes.

2 NB : Soient $z = a + ib$ où a et b réels et $z' = a' + ib'$ où a' et b' réels deux complexes,

- $-z = (-a) + i(-b) = -a - ib$ est l'opposé de z .
- si z non nul, alors a ou b non nuls (car $0 = 0 + i0$ est la seule écriture de 0 sous la forme $a + ib$) alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \stackrel{z=a-ib}{=} \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2}$ est l'inverse de z .
est le conjugué de z (Cf I 4))
- $z + z' = a + a' + i(b + b')$ et $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$.
- $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.
- $z^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z^n = \underbrace{z \times z \times \dots \times z}_{n \text{ fois}} = z \times z^{n-1}$ et si $z \neq 0$, $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$. Les règles de calcul sur les puissances d'un nombre complexe sont les mêmes que celles sur les réels.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. $i^n = \begin{cases} (-1)^n i & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$.

3 Sommes et produits finis de complexes : Soit $u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ des nombres complexes.

$$\sum_{k=p}^n u_k \stackrel{\text{def}}{=} u_p + u_{p+1} + \dots + u_n \text{ et } \prod_{k=p}^n u_k \stackrel{\text{def}}{=} u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_n$$

$$\sum_{k=p}^n u_{k+1} - u_k \stackrel{\text{télésopage}}{=} u_{n+1} - u_p \text{ et } \prod_{k=p}^n \frac{u_k}{u_{k+1}} \stackrel{\text{télésopage}}{=} \frac{u_p}{u_{n+1}}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^n z^k \stackrel{\text{somme géométrique}}{=} z^p \sum_{k=0}^{n-p} z^k = \begin{cases} z^p \left(\frac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z} \right) & \text{si } z \neq 1 \\ n - p + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n \stackrel{\text{FBN}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n \stackrel{\text{Théo. de factorisation}}{=} (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

En particulier les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$.

4 Une différence essentielle entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$ est totalement ordonné ($\leq$) mais pas $\mathbb{C}$. Le signe $\leq$ entre deux complexes ne veut rien dire.

5 Exercice corrigé : Soit a un complexe. Résoudre $z^2 + a^2 = 0$ d'inconnue z complexe.

$$z^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - i^2 a^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (ia)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - ia)(z + ia) = 0 \Leftrightarrow z = ia \text{ ou } z = -ia. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \{ia; -ia\}.$$

2. Forme algébrique

6 Définition : Soit z un nombre complexe. Alors il existe deux uniques réels a et b tels que $z = a + ib$.

$z = a + ib$ est appelée la forme algébrique de z .

a est appelé la partie réelle de z et noté $a = \text{Re}(z)$ et b est appelé la partie imaginaire de z et noté $b = \text{Im}(z)$.

7 NB : $\mathbb{R}$ est l'ensemble des complexes de la forme $z = a + i0 (= a)$ tel que a réel.

8 De l'unicité de la forme algébrique, je peux énoncer :

Soit z et z' deux nombres complexes. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$



9 Définition : Le complexe z est dit **imaginaire pur** lorsque z est de la forme $0 + ib (= ib)$ tel que b réel (autrement dit, lorsque sa partie réelle est nulle). On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs. $i\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{C}$.

NB : Soit $n \in \mathbb{Z}$. i^n est réel si n est pair et i^n est imaginaire pur si n est impair.

9bis Exercices corrigés: 1) Écrire $z = \frac{(2-3i)(-5+i)^2}{4-3i}$ sous sa forme algébrique.

$$\frac{(2-3i)(-5+i)^2}{4-3i} = \frac{(2-3i)(25-10i-1)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{(2-3i)(24-10i)(4+3i)}{16+9} = \frac{(48-20i-72i-30)(4+3i)}{25} = \frac{(18-92i)(4+3i)}{25} = \frac{71+276i+54i-368i}{25} = \frac{347-314i}{25}$$

2) Soit n un entier naturel et $z = (2 - \sqrt{2}i)^n$. Montrer que $\operatorname{Re}(z)$ est un entier multiple de $2^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

$$z = (2 - \sqrt{2}i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-\sqrt{2}i)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-\sqrt{2})^k i^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-\sqrt{2})^k i^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-\sqrt{2})^k i^k$$

$$z = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^{n-2p} (-\sqrt{2})^{2p} i^{2p} + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^{n-(2p+1)} (-\sqrt{2})^{2p+1} i^{2p+1}$$

$$z = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^{n-2p} (-\sqrt{2})^{2p} (i^2)^p + i \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^{n-(2p+1)} (-\sqrt{2})^{2p+1} (i^2)^p$$

$$z = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-2p} 2^p (-1)^p + i \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} 2^{n-(2p+1)} (-\sqrt{2})^{2p+1} (-1)^p = \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-p} (-1)^p}_{\operatorname{Re}(z)} + i \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} 2^{n-(2p+1)} (-\sqrt{2})^{2p+1} (-1)^p}_{\operatorname{Im}(z)}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-p} (-1)^p = \sum_{k=n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \binom{n}{2n-2k} 2^k (-1)^{n-k} = 2^{(n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} \underbrace{\sum_{k=n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \binom{n}{2n-2k} 2^{k-(n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} (-1)^{n-k}}_{\in \mathbb{Z} \text{ car } k - (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \geq 0}. \text{ Donc } \operatorname{Re}(z) \text{ est un entier multiple de } 2^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

De l'unicité de la forme algébrique : (unicité des parties réelle et imaginaire de chaque complexe) découlent les **propriétés** suivantes :

10 propriétés : Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $z = 0$ si et ssi $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$.
2. z est réel si et ssi $\operatorname{Im}(z) = 0$ si et ssi $z = \operatorname{Re}(z)$.
3. z imaginaire pur si et ssi $\operatorname{Re}(z) = 0$ si et ssi $z = i\operatorname{Im}(z)$.

10bis Proposition : Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$.

Généralisation : Si les λ_k sont réels et les z_k sont des complexes alors

$$\operatorname{Re}(\sum_{k=1}^n \lambda_k z_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \operatorname{Re}(z_k) \text{ et } \operatorname{Im}(\sum_{k=1}^n \lambda_k z_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \operatorname{Im}(z_k).$$

Démo : Écrivons z et z' sous forme algébrique : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Alors par associativité et distributivité,

$$z + z' = \underbrace{a + a'}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{(b + b')}_{\in \mathbb{R}} \text{ et } \lambda z = \underbrace{\lambda a}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\lambda b}_{\in \mathbb{R}}. \text{ Donc, } \operatorname{Re}(z + z') = a + a' = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = b + b' = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z') \text{ et}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda a = \lambda \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda b = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

11 ATTENTION : en général, $\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(zz') \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$.

3. Interprétation géométrique

12 Désormais le plan géométrique $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors,

1. tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ où a et b réels (sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$), (a, b) est le couple des composantes (ou coordonnées) de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. tout point M de $\mathcal{P}$ est associé à un unique couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et ce couple (x, y) est appelé le couple de coordonnées de M dans le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

13 Définition

- A tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) , on associe le complexe $z = x + iy$. Ce complexe $z = x + iy$ est alors appelé **l'affixe de M** , notée $\operatorname{Aff}(M)$ et M l'**image ponctuelle de z** . On notera souvent $z_M = \operatorname{Aff}(M)$.
- De même, à tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$ de composantes (a, b) , on associe le complexe $z = a + ib$. Ce complexe $z = a + ib$ est alors appelé **l'affixe de $\vec{u}$** , notée $\operatorname{Aff}(\vec{u})$ et $\vec{u}$ l'**image vectorielle de z** . On note souvent $z_{\vec{u}} = \operatorname{Aff}(\vec{u})$.
- Réciproquement, à tout complexe $z = x + iy$, on associe le point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) et le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

14 NB : Pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\operatorname{Aff}(M) = \operatorname{Aff}(\overrightarrow{OM})$.

15 Propriétés : Soit M et M' deux points de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ et α et β réels .

1. M est sur l'axe des abscisses appelé l'axe réel **sietssi** z_M est réel.

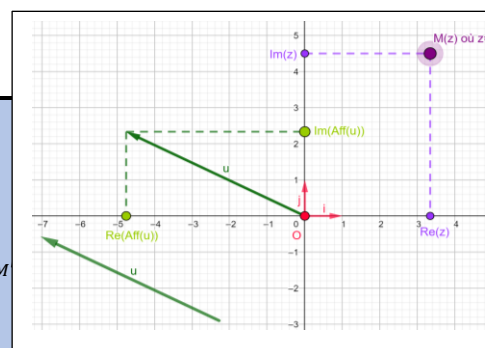
2. M est sur l'axe des ordonnées **sietssi** z_M est imaginaire pur.

Cet axe des ordonnées est d'ailleurs appelé **axe imaginaire**.

3. M et M' sont symétriques par rapport à O **sietssi** $Aff(M) = -Aff(M')$ **sietssi** $z_M = -z_{M'}$

4. $Aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha Aff(\vec{u}) + \beta Aff(\vec{v})$ i.e. $z_{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}} = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}}$.

5. $Aff(\overline{MM'}) = Aff(M') - Aff(M)$ i.e. $z_{\overline{MM'}} = z_{M'} - z_M$.



Démo : 1. M est sur l'axe des abscisses appelé l'axe réel **sietssi** l'ordonnée de M est nulle **sietssi** z_M réelle.

2. M est sur l'axe imaginaire **sietssi** l'abscisse de M est nulle **sietssi** $Re(z_M) = 0$ **sietssi** z_M est imaginaire pur.

3. M et M' sont symétriques par rapport à O **sietssi** les abscisses de M et M' sont opposées et leurs ordonnées aussi **sietssi** $z_{M'} = -z_M$.

4. Soit $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$.

Alors $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(a\vec{i} + b\vec{j}) + \beta(a'\vec{i} + b'\vec{j}) \stackrel{\text{règles de calcul sur les vecteurs}}{=} \alpha a\vec{i} + \alpha b\vec{j} + \beta a'\vec{i} + \beta b'\vec{j} \stackrel{\text{règles de calcul sur les vecteurs}}{=} (\alpha a + \beta a')\vec{i} + (\alpha b + \beta b')\vec{j}$.

Donc, $Aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha a + \beta a' + i(\alpha b + \beta b') = \alpha(a + ib) + \beta(a' + ib') = \alpha Aff(\vec{u}) + \beta Aff(\vec{v})$.

5. $Aff(\overline{MM'}) \stackrel{\text{Chasles sur les vecteurs}}{=} Aff(\overline{M\vec{0}} + \overline{\vec{0}M'}) = Aff(\overline{0M'} - \overline{0M}) \stackrel{\text{prop. précédente}}{=} Aff(\overline{0M'}) - Aff(\overline{0M}) \stackrel{\text{NB 9}}{=} Aff(M') - Aff(M)$.

4. Conjugué

16 Définition : Soit $z = a + ib$ où a et b réels. $\bar{z} = a - ib$ est le complexe appelé le **conjugué de z** !



17 Remarques : 1) en physique $\bar{z}$ est noté z^*

2) Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point d'affixe z . Par conséquent,

18 Prop A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses **sietssi** $z_B = \bar{z}_A$.

19 Propriétés Soit z et z' deux complexes.

1. $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

2. $z \in \mathbb{R}$ **sietssi** $z = \bar{z}$.

3. $z \in i\mathbb{R}$ **sietssi** $z = -\bar{z}$.

4. $\bar{\bar{z}} = z$.

5. $z \times \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 \in \mathbb{R}^+$

6. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ si $z' \neq 0$.

7. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}$

8. Généralisation : $\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k$ et $\overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \bar{\bar{z}^n} = z^n$.



19bis Exercice corrigé : Trouver tous les complexes z tels que $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.

$$z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = \overline{z^2 + z + 1} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = \bar{z}^2 + \bar{z} + 1 \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + z - \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})[(z + \bar{z}) + 1] = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ou } (z + \bar{z}) = -1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2Re(z) = -1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } Re(z) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $Sol = \{x; -\frac{1}{2} + ix/x \in \mathbb{R}\}$.

II Forme trigonométrique.

1. Module

20 Définition : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le module de z , noté $|z|$, est le réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = OM = \|\vec{u}\| \text{ où } z = Aff(M) = Aff(\vec{u}) = Aff(\overline{OM}).$$



21 Théorème Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B . Alors, $|z_A - z_B| = |z_B - z_A| = AB$.



Ainsi, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_A - z_B|$

22 Description de lieux géométriques Soit A et B deux points d'affixe z_A et z_B Ω le point d'affixe $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ et r un réel strictement positif. On note $C(\Omega, r)$, le cercle de centre Ω et de rayon r et $med[A, B]$ la médiatrice du segment $[AB]$.

- $C(\Omega, r) = \{M \in \mathcal{P} / OM = r\} = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z - \omega| = r\} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} / (x - \omega_1)^2 + (y - \omega_2)^2 = r^2\}$
- $med[A, B] = \{M \in \mathcal{P} / AM = BM\} = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z - z_A| = |z - z_B|\}$.

23 Exercice corrigé : Décrire géométriquement $C = \{M(x, y) / x^2 + y^2 - x = 4\}$ et $D = \{M(z) / |z| = 1 = |1 - z|\}$.

1. $x^2 + y^2 - x = 4 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 4 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow M \in C\left(\Omega, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$. Ainsi, $Sol = C\left(\Omega, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$.

2. $|z| = 1 = |1 - z| \Leftrightarrow OM = 1 = AM \Leftrightarrow \begin{cases} OM^2 = 1 \\ M \in med[O, A] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$. Ainsi, $Sol = \left\{M_1\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); M_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

24 Propriétés Soient deux complexes z et z' d'images respectives M et M' .

1) Si z est un réel alors le module de z est égal à la valeur absolue de z .

2) $|z|$ est un réel positif et $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.

3) $z = 0$ si et ssi $|z| = 0$.

4) $|\bar{z}| = |-z| = |z|$.

5) si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (formule permettant d'obtenir la forme algébrique de $\frac{1}{z}$).

7) $|zz'| = |z||z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

8) Première inégalité triangulaire : $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$

et son cas d'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et ssi $z' = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / z = \lambda z'$

si et ssi M et M' sont sur une même demi-droite d'origine O .

9) Deuxième inégalité triangulaire : $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'|$.

Généralisation : $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ et $|\prod_{k=1}^n z_k| = \prod_{k=1}^n |z_k|$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

24bis Conséquences : • si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $|\lambda z| = \lambda |z|$

• si $z \neq 0$, alors $\frac{z}{|z|}$ est de module 1.

24ter Exercice corrigé : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^n - z - 1$. Montrer que si z est racine de P alors $0 \leq |z| \leq 2$.

Supposons que z soit une racine de P . Alors $z^n - z - 1 = 0$ donc $z^n = z + 1$. Par suite, en appliquant la 1^{ère} Inégalité triangulaire,

$$|z|^n = |z^n| = |z + 1| \leq |z| + |1| = |z| + 1. \text{ Donc, } |z|^n - |z| - 1 \leq 0.$$

Posons $\varphi: \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n - t - 1 \end{smallmatrix}\right)$. Etudions φ pour savoir où elle est négative. φ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Et $\varphi'(t) = nt^{n-1} - 1$. Donc

$$\varphi'(t) > 0 \Leftrightarrow nt^{n-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow t^{n-1} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow t > \frac{1}{n-1\sqrt[n-1]{n}}. \text{ D'où le tableau des variations de } \varphi \text{ suivant :}$$

t	0	$\frac{1}{n-1\sqrt[n-1]{n}}$	2	$+\infty$
$\varphi'(t)$		-	0	+
$\varphi(t)$				

Comme φ est croissante sur $[2, +\infty[$ et $\varphi(2) = 2^n - 2 > 0$, φ est strictement positive sur $[2, +\infty[$. Par suite, $\varphi(t) \leq 0 \Rightarrow t \in [0, 2]$. Alors, comme $\varphi(|z|) < 0$, je peux conclure que $0 \leq |z| \leq 2$.

2. Complexes de module 1

25 Introduction – Définition : Soit M un point du cercle trigonométrique et θ un réel tel que : $\theta \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

D'après le cours de trigonométrie, $(\cos\theta, \sin\theta)$ est le couple des coordonnées de M dans le repère R .

Donc, $z_M = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Alors θ est alors appelé un **argument** de z_M .

26 Définition : Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. $e^{i\theta}$ est appelée **l'exponentielle imaginaire** d'argument θ .

27 Valeurs particulières : $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, $e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

28 Caractérisation : Les complexes de la forme $e^{i\theta}$ où θ réel sont les affixes des points du cercle trigonométrique. Les complexes de module 1 sont les complexes de la forme $e^{i\theta}$ tq θ réel. On note $\mathbb{U}$ **l'ensemble des complexes de module 1**.

29 Propriétés Soient θ et θ' deux réels.

1. $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et ssi $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ (deux arguments d'une même exponentielle imaginaire sont égaux modulo 2π).

2. $e^{i(-\theta)} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} \stackrel{\text{notation}}{=} e^{-i\theta}$.

3. $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

4. **Formules d'Euler :** $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

5. **Identités du Losange :** $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

6. **Formule de Moivre :** $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ie $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Conséquences : toute puissance, tout produit fini et tout inverse et tout conjugué de complexes de module 1 est un complexe de module 1. On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse et par passage au conjugué.

30



$(\cos\theta)^n \neq \cos(n\theta)$ et $(\sin\theta)^n \neq \sin(n\theta)$

30bis Exercice corrigé : Soit $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que : $\left|u - \frac{1}{z}\right| = \frac{|u-z|}{|z|}$.

Comme $u \in \mathbb{U}$, posons $u = e^{i\theta}$. Alors, $\left|u - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}z - 1}{z}\right| = \frac{|e^{i\theta}z - 1|}{|z|} = \frac{|e^{i\theta}(z - e^{-i\theta})|}{|z|} = \frac{|e^{i\theta}| |z - e^{-i\theta}|}{|z|} = \frac{|z - e^{-i\theta}|}{|z|} = \frac{|\bar{z} - e^{-i\theta}|}{|z|} = \frac{|z - e^{i\theta}|}{|z|} = \frac{|u - z|}{|z|}$.

3. Arguments et forme trigonométrique d'un complexe non nul

31 Définition : Soit z un nombre complexe non nul affine du point M et du vecteur $\vec{u}$. Tout réel θ tel que :

$\theta \equiv (\vec{i}, \vec{OM})[2\pi] \equiv (\vec{i}, \vec{u})[2\pi]$ est appelé **un argument de z** . On note $\arg(z)$ un argument quelconque de z .

32 Conséquences immédiates :

Soient z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et M' . Soit θ un argument de z .

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. α est un argument de z **sietssi** $\alpha \equiv \theta[2\pi]$.

Autrement dit, **les arguments de z sont tous les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$** .

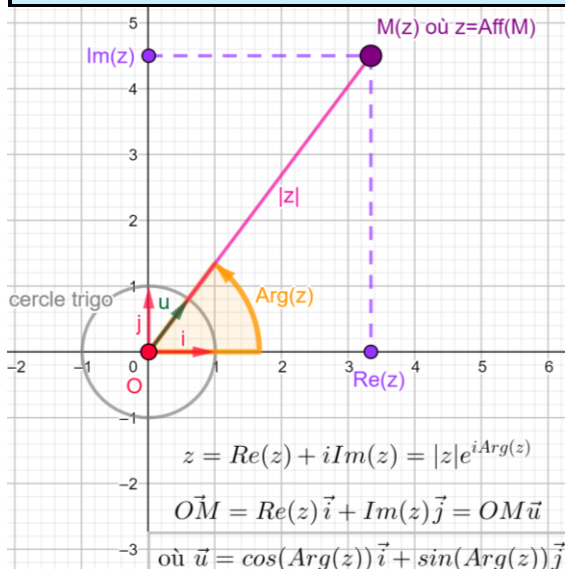
2) $\arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi]$ **sietssi** M et M' sont sur une même demi-droite d'origine O .

3) $z \in \mathbb{R}^*$ **sietssi** $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$. De même, $z \in \mathbb{R}^{+*}$ **sietssi** $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$.

4) $z \in i\mathbb{R}^*$ **sietssi** $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. Et, $z \in i\mathbb{R}^{-*}$ **sietssi** $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

33 Théorème et définition : Tout complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Cette écriture de z est **la forme trigonométrique ou forme exponentielle de z** .



34 Interprétation géométrique :

Si $\theta \equiv (\vec{i}, \vec{OM})[2\pi]$ alors $\vec{OM} = OM\vec{u}_\theta = |z|\vec{u}_\theta$ où $\vec{u}_\theta = (\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}$

35 NB : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\begin{array}{lcl} e^{i\theta} & = & \cos\theta + i\sin\theta \\ \text{la forme} & & \text{la forme} \\ \text{trigonométrique} & & \text{algébrique} \\ z = re^{i\theta} & = & r\cos\theta + i r\sin\theta \\ \text{la forme} & & \text{la forme} \\ \text{trigonométrique} & & \text{algébrique} \\ \text{de } z & & \text{de } z \end{array}$$

36 Théorème : Soit z un nombre complexe non nul. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. Alors,

$$z = re^{i\theta} \text{ sietssi } \theta \equiv \arg(z)[2\pi] \text{ et } r = |z|.$$

Dans ce cas, (r, θ) est un couple de coordonnées polaires du point M d'affixe z .

37 Théorème : Soient z et z' deux complexes non nuls. $z = z'$ sietssi $\begin{cases} \arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi] \\ |z| = |z'| \end{cases}$.

38 Méthode pour passer la forme algébrique à la forme trigonométrique : Soit $z \neq 0$. Comme $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 i.e. il existe un réel θ tq $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. Alors, pour obtenir la forme trigonométrique de $z = x + iy$:

1) Mettre $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ en facteur dans z . L'autre facteur est nécessairement $e^{i\theta}$ où θ est un argument de z .

2) Reconnaître θ .

39 Exemples

$$\begin{array}{lcl} z = 1 + i & \stackrel{\text{je mets } |z| \text{ en facteur}}{\hat{=}} & \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \stackrel{\text{je reconnais } \theta \text{ tel que } \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\theta}{\hat{=}} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \text{la forme} & & \text{la forme} \\ \text{algébrique} & & \text{trigonométrique} \end{array}$$

$$-3 + 3i = 3\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{3} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$-3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}. \text{ Donc, } |-3 + \sqrt{3}i| = 2\sqrt{3} \text{ et } \arg(-3 + \sqrt{3}i) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi].$$

• $-1 - 4i = \sqrt{17} \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}i \right)$. Notons θ un argument de $(-1 - 4i)$. Alors,
$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(\theta) = -\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \tan(\theta) = 4 \end{cases}$$
 Donc $\theta \equiv \text{Arctan}(4) + \pi [2\pi]$.

40 Relation forme trigonométrique et forme algébrique Soit z un complexe non nul. Alors z s'écrit sous forme algébrique ET sous forme trigonométrique : $z = x + iy = re^{i\theta} = (r \cos(\theta)) + i(r \sin(\theta))$ avec $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$ et $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z) [2\pi]$

Par unicité de la forme algébrique : $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$. De plus, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Donc, $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et si $\text{Re}(z) \neq 0$ alors $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$

si $x \neq 0$ alors $\theta \equiv \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi [2\pi] & \text{si } \text{Re}(z) < 0 \\ \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) [2\pi] & \text{si } \text{Re}(z) > 0 \end{cases}$ et si $x = 0$ alors $\theta \equiv \begin{cases} \frac{\pi}{2} [2\pi] & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} [2\pi] & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$.

41 Définition perso : j'appelle **forme quasi-trigonométrique** toute écriture de z de la forme $z = xe^{i\theta}$ avec x et θ réels. On obtient une telle forme lorsque l'on applique, par exemple, les identités du Losange. Dans ce cas, si $x \neq 0$ alors la forme trigonométrique de z est

$z = \begin{cases} |x|e^{i\theta} & \text{si } x > 0 \\ |x|e^{i(\theta+\pi)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Une forme quasi-trigo suffit bien souvent !! Elle est très utile pour obtenir sous forme (quasi-)trigo des produits, quotients ou puissances de nombres complexes. Cette forme quasi-trigonométrique permet aussi d'obtenir la forme algébrique $z = xe^{i\theta} = \underbrace{x \cos(\theta)}_{\text{Re}(z)} + i \underbrace{x \sin(\theta)}_{\text{Im}(z)}$. Il suffit pour l'obtenir d'écrire $e^{i\theta}$ sous sa forme algébrique.

42 Méthode pour passer de la forme (quasi-)trigonométrique à la forme algébrique : si $z = re^{i\theta}$, il suffit d'écrire $e^{i\theta}$ sous sa forme algébrique et de distribuer r . En effet, $z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = (r \cos(\theta)) + i(r \sin(\theta))$

43 Exemple : $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$ dc $|1 - e^{i\theta}| = |-2| \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| |i| \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right|$

$1 - e^{i\theta} = \begin{cases} 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} & \text{si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0 \\ 0 & \text{si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} & \text{si } \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \end{cases}$ ← Forme trigonométrique de $1 - e^{i\theta}$.

44 Propriétés des arguments : Soient z et z' deux complexes non nuls et n un entier relatif.

$\text{Arg}(z \times z') \equiv \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') [2\pi]$

$\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\text{Arg}(z) [2\pi]$

$\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') [2\pi]$

$\text{Arg}(z^n) \equiv n \text{Arg}(z) [2\pi]$

Même propriétés que le logarithme

4. Des applications algébriques et des méthodes à connaître (savoir-faire !!)

45 Factorisation d'une somme ou différence d'exponentielles imaginaires (méthode à retenir) :

$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\theta} (1 + e^{i(\theta' - \theta)}) = 2e^{i\theta} \cos\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta' + \theta}{2}} = 2 \cos\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta' + \theta}{2}}$

et $e^{i\theta} - e^{i\theta'} = e^{i\theta} (1 - e^{i(\theta' - \theta)}) = -2ie^{i\theta} \sin\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta' + \theta}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta' + \theta}{2}} i$.

46 Exercice corrigé : Montrons que $(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{4}})^3$ est imaginaire pur.

$e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}} (1 + e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12})}) = e^{i\frac{\pi}{12}} (1 + e^{i\frac{\pi}{6}}) = e^{i\frac{\pi}{12}} 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$. Donc,

$(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{4}})^3 = (2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{6}})^3 = 8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^3 (e^{i\frac{\pi}{6}})^3 = 8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^3 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^3 i$.

Donc $(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{4}})^3$ est imaginaire pur.

47 Puissances, produit ou quotient de nombres complexes :

Les **Identités du Losange** sont très utiles pour obtenir la **forme (quasi-)trigo** puis la forme algébrique d'une puissance ou d'un quotient de complexes. La forme quasi-trigonométrique d'un complexe est le nom que je donne à l'écriture qu'un complexe sous la forme (réel) $\times$ (exponentielle imaginaire). la forme trigonométrique d'un complexe non nul est l'écriture de ce complexe sous la forme (réel strictement positif) $\times$ (exponentielle imaginaire).

48 Exercice corrigé : Ecrivons $\frac{1 - e^{ia}}{1 + e^{ia}}$ et $(i - \sqrt{3})^n$ sous forme algébrique.

$$\frac{1 - e^{ia}}{1 + e^{ia}} = \frac{-2i \sin\left(\frac{a}{2}\right) e^{\frac{ia}{2}}}{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right) e^{\frac{ia}{2}}} = \frac{-i \sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)} = 0 - i \tan\left(\frac{a}{2}\right).$$

$$(i - \sqrt{3})^n = \left(2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\right)^n = \left(2 \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\right)^n = 2^n \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{5n\pi}{6}} = 2^n \left(\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right)\right) = 2^n \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + i 2^n \sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right).$$

49 Linéarisation (transformation d'un produit en somme) d'un produit de sin et de cos (dans le but d'intégrer par exemple).

$$\cos^n(t) \stackrel{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^n \stackrel{\text{FBN}}{=} \dots \stackrel{\text{tout développer}}{\dots} \quad \text{Et,} \quad \sin^n(t) \stackrel{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^n \stackrel{\text{FBN}}{=} \dots \stackrel{\text{Euler}}{=} \dots$$

50 Exercice : Linéarisons $f(t) = \cos^2(3t)\sin^5(t)$ et déduisons-en une primitive de f .

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos^2(3t)\sin^5(t) = \left(\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{2^2(2i)^5} (e^{3it} + e^{-3it})^2 (e^{it} - e^{-it})^5 \\ &= \frac{1}{2^7 i} ((e^{3it})^2 + 2(e^{3it})(e^{-3it}) + (e^{-3it})^2)((e^{it})^5 + 5(e^{it})^4(-e^{-it}) + 10(e^{it})^3(-e^{-it})^2 + 10(e^{it})^2(-e^{-it})^3 + 5(e^{it})(-e^{-it})^4 + (-e^{-it})^5) \\ &= \frac{1}{2^7 i} (e^{6it} + 2 + e^{-6it})(e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{-3it} - e^{-5it}) \\ &= \frac{1}{2^7 i} (e^{11it} - 5e^{9it} + 10e^{7it} - 10e^{5it} + 5e^{3it} - e^{it} + 2e^{5it} - 10e^{3it} + 20e^{it} - 20e^{-it} + 10e^{-3it} - 2e^{-5it} + e^{-it} - 5e^{-3it} + 10e^{-5it} - 10e^{-7it} + 5e^{-9it} - e^{-11it}) \\ &= \frac{1}{2^7 i} (2i \sin(11t) - 10i \sin(9t) + 20i \sin(7t) - 16i \sin(5t) - 10i \sin(3t) + 38i \sin(t)) \\ &= \frac{1}{2^6} (\sin(11t) - 5 \sin(9t) + 10 \sin(7t) - 8 \sin(5t) - 5 \sin(3t) + 19 \sin(t)) \end{aligned}$$

51 Ecriture de $\cos(n\theta)$ (resp. $\sin(n\theta)$) polynôme en $\cos(\theta)$ (resp. $\sin(\theta)$) ou presque

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) \stackrel{\text{FBN}}{=} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos\theta)^k (i\sin\theta)^{n-k}\right) \text{ et } \sin(n\theta) = \operatorname{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \dots$$

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) &= e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k + \sum_{k=k \text{ impair}} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (i\sin\theta)^{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (i\sin\theta)^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (-1)^p (\sin\theta)^{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (-1)^p (\sin\theta)^{2p+1} i \\ &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (-1)^p (\sin\theta)^{2p}}_{\text{réel}} + i \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (-1)^p (\sin\theta)^{2p+1}}_{\text{réel}}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (-1)^p (\sin\theta)^{2p} \text{ et } \sin(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (-1)^p (\sin\theta)^{2p+1}$$

$$\text{Ainsi, } \cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (-1)^p (1 - \cos^2\theta)^p \text{ et } \sin(n\theta) = \sin\theta \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (-1)^p (1 - \cos^2\theta)^p$$

52 Exercice : Montrons qu'il existe deux fonctions polynômiales P et Q tel que : $\cos(8\theta) = P(\cos(\theta))$ et $\sin(8\theta) = \cos(\theta) Q(\sin(\theta))$.

53 Calculs de $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ et d'autres sommes :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \stackrel{\text{somme géométrique de raison } e^{i\theta}}{=} \dots \quad \text{Et } \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right) = \dots$$

$$\text{De même, } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right) = \dots$$

53 bis Exercice corrigé : Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$.

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right). \text{ Or, } \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \stackrel{\text{somme géométrique de raison } e^{i\theta}}{=} \begin{cases} \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} & \text{si } e^{i\theta} \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } e^{i\theta} = 1 \end{cases}. \text{ Alors,}$$

$$\text{si } e^{i\theta} = 1 \text{ i.e. } \theta \equiv 0[2\pi] \text{ alors } \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}(n + 1) = n + 1.$$

$$\text{si } e^{i\theta} \neq 1 \text{ i.e. } \theta \not\equiv 0[2\pi] \text{ alors}$$

$$\frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \stackrel{\text{Moivre}}{=} \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \stackrel{\text{Losange}}{=} \frac{-2i\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{\frac{i\theta}{2}}} \stackrel{\text{quotient d'exponentielles}}{=} \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})e^{\frac{in\theta}{2}}}{\sin(\frac{\theta}{2})} \stackrel{\text{définition de } e^{i\alpha}}{=} \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} [\cos(\frac{n\theta}{2}) + i\sin(\frac{n\theta}{2})].$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \right) = \frac{\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos(\frac{n\theta}{2}).$

5. Application à la géométrie

54 Théorème :

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A, z_B . Alors, $(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$. Alors, $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)[2\pi] \equiv \arg(z_{\vec{v}}) - \arg(z_{\vec{u}})[2\pi]$

55 Corollaire : Soit A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D . Alors, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

56 Applications à l'alignement, l'orthogonalité et la cocyclicité : Soient A, B, C et D quatre points distincts a, b, c et d .

- A, B, C sont alignés **sietssi** $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$.
- A est sur le cercle de diamètre $[B, C]$ **sietssi** $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$.
- A, B, C et D sont cocycliques **sietssi** $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)[\pi]$ **sietssi** $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}^*$

**A SAVOIR
RETROUVER**

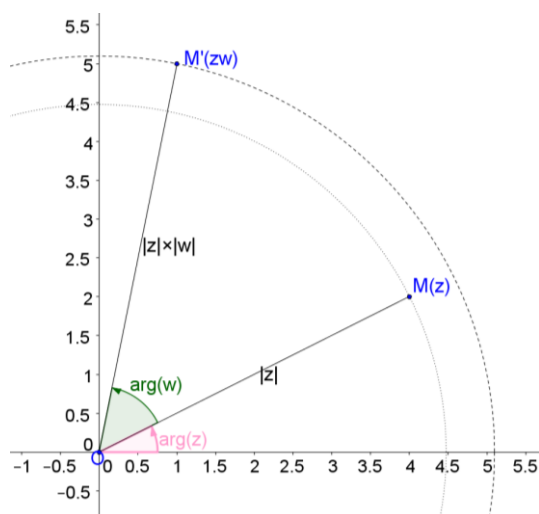
56bis Exercice corrigé : Chercher les points M d'affixe z tels que $\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^*$.

Soit z un complexe distinct de $3i$ et de $-2-5i$. Soit A et B les points d'affixe $3i$ et $-2-5i$. $\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+2+5i}{z-3i}\right) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+2+5i}{z-3i}\right) - \arg(i) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow M$ est sur le demi-cercle nord de diamètre $[AB]$ mais A et B exclus.

57 Application à différentes transformations du plan :

- La **translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe w est l'application $t_{\vec{u}}$ du plan dans lui-même qui associe, à chaque point M , le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Donc la translation de vecteur $\vec{u}$ est $t_{\vec{u}}: (M(z) \mapsto M'(z+w))$.
- L'**homothétie** de centre O et de rapport le réel x non nul est l'application h_x du plan dans lui-même qui associe, à chaque point M , le point $M' = h_x(M)$ tel que $\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{OM}$. Donc, l'homothétie de centre O et de rapport x est $h_{o,x}: (M(z) \mapsto M'(xz))$.
- La **rotation** de centre O et d'angle le réel θ est l'application r_{θ} du plan dans lui-même qui associe à chaque point M le point $M' = r_{\theta}(M)$ tel que $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$. Donc, la rotation de centre O et d'angle θ est $r_{o,\theta}: (M(z) \mapsto M'(e^{i\theta}z))$.

58 Composition : Soit a un complexe non nul. Alors $a = re^{i\theta}$ où $|a| = r$ et $\theta = \arg(a)$. Alors $f: (M(z) \mapsto M'(az))$ est la composée commutative de r_{θ} et de h_r . Autrement dit, si M un point du plan d'affixe z non nulle alors point M' d'affixe $z \times w$ est le point du plan tel que : $OM' = rOM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \theta[2\pi]$.



59 Construction géométrique : pour passer de $M(z)$ à $M'(re^{i\theta}z)$, on fait subir à M la rotation de centre O et d'angle θ , on obtient M'' , et ensuite on fait subir à M'' l'homothétie de centre O et de rapport r et on obtient ainsi M' .

6. Exponentielle complexe

On connaît désormais l'exponentielle réelle e^x tel que x réel et l'exponentielle imaginaire $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ tel que y réel. On va grâce à ces deux exponentielles définir l'exponentielle complexe de la manière suivante :

60 Définition : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. L'**exponentielle (complexe) de z** est $e^z = e^x e^{iy}$.

Autrement dit : $e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

61 Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif.

- $e^z \neq 0$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z)[2\pi]$
- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)}(\cos(\operatorname{Im}(z)))$ et $(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)}(\sin(\operatorname{Im}(z)))$.
- $e^z = e^{z'}$ si et ssi $\exists k \in \mathbb{Z} / z - z' = 2ik\pi$.
- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $e^{z'-z} = \frac{e^{z'}}{e^z}$, $(e^z)^n = e^{nz}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

62 Conséquence : L'exponentielle complexe ($z \mapsto e^z$) n'est pas injective, l'exponentielle imaginaire ($y \mapsto e^{iy}$) non plus alors que l'exponentielle réelle ($x \mapsto e^x$) l'est.

63 Méthode : on cherche à résoudre une équation de la forme $e^z = w$ où w complexe donné (fixé) et z l'inconnue complexe.

Ou bien $w = 0$. Alors il n'y a pas de solution.

Ou bien $w \neq 0$. On va mettre w sous forme trigonométrique $w = re^{i\theta}$ et on cherche z sous forme algébrique $= x + iy$. Alors $e^z = w \Leftrightarrow e^x e^{iy} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^x = r$ et $y \equiv \theta[2\pi] \Leftrightarrow x = \ln(r)$ et $y \equiv \theta[2\pi]$.

 Car deux complexes sont égaux s'ils ont même module et argument égaux modulo 2π

64 Exercice corrigé : Résolvons $e^z = \frac{\sqrt{3}i-1}{1-i}$ d'inconnue z complexe.

Soit $z = x + iy$ un complexe (où x et y réels).

$$\frac{\sqrt{3}i-1}{1-i} = \frac{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}. \text{ Donc, } e^z = \frac{\sqrt{3}i-1}{1-i} \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y \equiv \frac{11\pi}{12}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Sol} = \left\{ \frac{1}{2}\ln(2) + i\left(\frac{11\pi}{12} + 2k\pi\right) / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

III Racines carrées ou deuxièmes et équations polynomiales

1. Racines carrées

65 Théorème . Soit Δ un nombre complexe .

Ou bien $\Delta = 0$ alors il existe un et un seul complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ qui est : $\delta = 0$.

Ou bien $\Delta \neq 0$ alors $\Delta = re^{i\theta}$ et il existe exactement deux complexes δ tels que $\delta^2 = \Delta$ qui sont distincts et opposés :

$$\delta_1 = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} \text{ et } \delta_2 = -\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$$

Ces complexes δ tels que $\delta^2 = \Delta$ sont appelés les racines carrées ou deuxièmes (complexes) de Δ .

66 Méthode pour trouver les racines deuxièmes complexes de Δ dans le cas où $\Delta \neq 0$:

a. **Lorsque Δ a une forme trigonométrique «sympa»** (ie. Δ a un argument simple) $\Delta = re^{i\theta}$ alors on donnera ses racines carrées sous forme trigonométrique comme dans le théorème $\delta_1 = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $\delta_2 = -\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$. Il est parfois utile d'avoir la forme algébrique (obtenue à partir de la forme trigo). Cf équation du second degré.

67 Exemples classiques : 1) $\Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2$. 2) $\Delta = -2i = 2e^{\frac{3\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = \left[\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 = [-1 + i]^2$.

$$3) \Delta = \cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2i^2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\sqrt{2}i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

b. **Lorsque Δ n'a pas un argument simple** alors on cherchera ses racines carrées sous forme algébrique ie. on cherche $\delta = x + iy$ tel que : $(x + iy)^2 = a + ib$ (*). En identifiant parties réelles et imaginaires et module, (*) est équivalente au système
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$
 De (1) et (3), on tire x^2 et y^2 et de (2), on sait si x et y sont de même signe ou non. On trouve deux solutions opposées : $\delta = x + iy$ ou $\delta = (-x) + i(-y)$.

68 Exemple : Cherchons les racines carrées de $\Delta = 3 - 4i$. On cherche $\delta = x + iy$ tel que : $(x + iy)^2 = 3 - 4i$.

$$(x + iy)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 3 - 4i \text{ et } |(x + iy)^2| = |3 - 4i| \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i2xy = 3 - 4i \text{ et } x^2 + y^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Donc, $-2 + i$ et $2 - i$ sont les racines carrées de $3 - 4i$. (vérification : $(-2 + i)^2 = 3 - 4i$ OK!!)

2. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$ et complément dans $\mathbb{R}$

69 Théorème Soit a, b, c des complexes tels que $a \neq 0$.

1) Soit $(E) : az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ (ie. $\Delta = \delta^2$). si $\Delta = 0$ alors (E) a une unique solution et si $\Delta \neq 0$ alors (E) a deux solutions distinctes.

Ces solutions (confondues si $\Delta = 0$) sont $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

2) Pour tous complexes z , $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.

3) $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.

4) Réciproquement, si w_1 et w_2 sont deux complexes tels que $w_1 + w_2 = -\frac{b}{a}$ et $w_1 \times w_2 = \frac{c}{a}$ alors w_1 et w_2 sont les racines de $az^2 + bz + c$.

69bis Exercice à compléter Résoudre $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$ d'inconnue z réelle.

$$\Delta = (7 - i)^2 - 4(-4 - 2i)(1 + 3i) = \dots \dots \dots \stackrel{\text{trouver deux entiers } a \text{ et } b}{=} (a + ib)^2.$$

$$\text{Alors } z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \dots \dots \dots \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \dots \dots \dots$$

70 Théorème : Soient a, b et c trois réels tels que a non nul et $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors,

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors P a deux racines complexes conjuguées $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

On a toujours : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

71 Réciproquement Soit α et β deux complexes. Si u et v sont deux complexes tels que $u + v = \beta$ et $u \times v = \gamma$ alors u et v sont les solutions de $z^2 - \beta z + \gamma = 0$.

3. Fonction polynomiale à coefficients complexes

72 Théorème

- Si f et g sont deux fonctions polynomiales à coefficients complexes telles g non nulle alors il existe deux uniques fonctions polynomiales complexes q et r telles que : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = g(z)q(z) + r(z)$ et $\deg(r) < \deg(g)$.
- Si f est une fonction polynomiale à coefficients complexes non nulle de degré n et α est **racine** complexe de f alors il existe une fonction polynomiale à coefficients complexes g de degré $(n - 1)$ telle que : pour tout réel x , $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ et g est le quotient de la division euclidienne de $f(x)$ par $(x - \alpha)$.

73 Théorème : Si α est une racine complexe d'une fonction P polynomiale à **coefficients réels** alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P .

74 Exercice : Factorisons $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1$

IV Racines $n^{\text{ièmes}}$ (complexes) d'un complexe.

75 Définition Soit a un nombre complexe et n un entier naturel non nul.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ (complexes) de a sont tous les nombres complexes z tels que $z^n = a$.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ (complexes) de a sont toutes les racines complexes de la fonction polynomiale : $P(z) = z^n - a$.

76 Exemples : 0 est l'unique racine $n^{\text{ième}}$ de 0. Tout réel a est l'unique racine 1^{ère} de a . Tout réel non nul a exactement deux racines carrées complexes.

Nous allons démontrer que si le complexe a est non nul alors a admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$. Commençons par $a = 1 = \text{unité}$.

1. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité où n un entier naturel non nul.

77 Le nombre complexe 1 est appelé l'unité. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont tous les complexes z tels que $z^n = 1$.

De manière évidente, 1 est toujours racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité quelle que soit la valeur de n .

78 Théorème Soit n un entier naturel non nul. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Il existe exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (ie. n complexes z tels que $z^n = 1$) qui sont les complexes les complexes :

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega^k \text{ tq } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

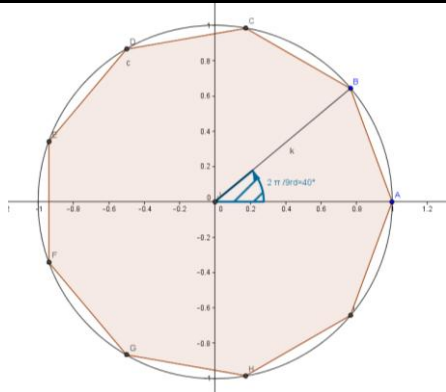
On note U_n l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

79NB Remarquons que $\omega_0 = 1 = \omega^0$, $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \omega^1$, $\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{n}} = \omega^2$, $\omega_3 = e^{i\frac{6\pi}{n}} = \omega^3$, ..., $\omega_{n-1} = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} = \omega^{n-1}$. Alors, $U_n = \{\omega_k / k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} = \{\omega_k / k \in \llbracket 1; n \rrbracket\} = \{\omega_k / k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket\} = \{\omega_k / k \in \llbracket -1; n-2 \rrbracket\} = \{\omega^k / k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$.

80Propriété : La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle dès que $n \geq 2$.

81Prop : Les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ sont les solutions de $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$.

82Illustration On note M_k le point d'affixe $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors le polygone $M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1}$ est régulier et inscrit dans le cercle trigonométrique, son centre est O et l'un de ses sommets est le point A d'affixe 1.



83 n impair

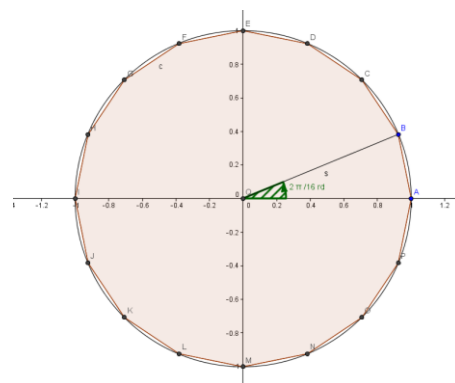
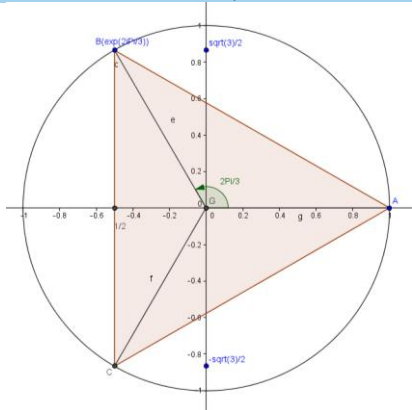
1 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ réelle de l'unité.

Les conjugués des complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ sont les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \{\frac{n+1}{2}, \dots, n-1\}$.

84Définition : on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

85 Prop Les racines troisièmes de l'unité sont 1, j et j^2 . Leurs points images forment un triangle équilatéral. Et,

$$j^2 = \bar{j} \text{ et } 1 + j + j^2 = 0 \text{ et } j^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 0[3] \\ j & \text{si } p \equiv 1[3] \\ j^2 & \text{si } p \equiv 2[3] \end{cases}$$

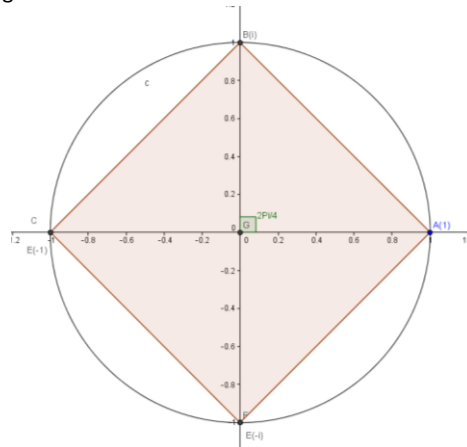


89 n pair

1 et -1 sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ réelles de l'unité et les conjugués des complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \{1, \dots, \frac{n}{2}-1\}$ sont les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \{\frac{n}{2}, \dots, n-1\}$.

86Exemples :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines 4^{èmes} de l'unité sont 1, i , -1 , $-i$. Leurs points images forment un carré.



2. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul.

87Théorème : Tout complexe $a = re^{i\theta}$ non nul possède exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ qui sont les complexes :

$$u_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \omega_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \omega^k \quad \text{tel que } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

88Propriété : Si z_0 est une racine $n^{\text{ième}}$ particulière de a , alors les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a sont les n complexes obtenus en multipliant z_0 par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

89Remarque : La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de a est nulle dès que $n \geq 2$ et les points d'affixe u_k tel que $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ forment un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

90 Méthode pour trouver les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe a non nul avec $n \geq 3$ (pou $n = 2$, Cf paragraphe III 1.)

1) J'écris a sous forme trigonométrique $a = re^{i\theta}$.

2) Je cherche une racine $n^{\text{ième}}$ particulière de a : $z_0 = \underbrace{\sqrt[n]{r}}_{\substack{\text{module} \\ \text{de } a \\ \text{puissance} \\ \frac{1}{n}}} \underbrace{e^{i(\frac{\theta}{n})}}_{\substack{\text{argument} \\ \text{de } a \\ \text{divisé} \\ \text{par } n}}$ convient (car $z_0^n = (\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n})})^n = (r^{\frac{1}{n}})^n (e^{i(\frac{\theta}{n})})^n = re^{i\theta}$).

3) Je multiplie cette racine $n^{\text{ième}}$ particulière par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. J'obtiens alors n complexes qui sont les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de a .

91 Exemple : Déterminons les racines 6^{ièmes} (complexe) de $a = 2i - 2$.

1) $a = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2) Donc, $z = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4 \times 6}} = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine 6^{ième} particulière de a .

3) Ainsi les racines de $2i - 2$ sont les 6 complexes : $2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ tq $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

JE SAIS MAINTENANT RESOUDRE TOUTE EQUATION DE LA FORME $Z^n = a$ d'inconnue Z complexe.

92 Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}\{0, 1\}$. Résolvons $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ d'inconnue z complexe.

Je remarque que 1 n'est pas solution de cette équation. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

z solution si et si $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ si et si $\frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1$

si et si $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

si et si $Z^n = 1$ où $Z = \frac{z+1}{z-1}$

si et si Z est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

si et si $Z = 1$ ou $Z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ou $Z = e^{i\frac{4\pi}{n}}$ ou ... $Z = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $(z + 1) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} (z - 1)$

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z = -(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$

si et si il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $z = -\frac{(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)}{(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})} = -\frac{2\cos(\frac{k\pi}{n})e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})e^{i\frac{k\pi}{n}}} = -i\cotan(\frac{k\pi}{n})$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$ si et si $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ si et si $k = 0$.

Donc je dois ôter la valeur $k = 0$ pour avoir le droit de diviser.

De plus, pour $k = 0$, $(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z \neq -(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$

Donc le cas « $k=0$ » est impossible mais ce n'est pas grave il nous reste les autres cas qui, eux, n'aboutissent pas à une impossibilité !!

93 Dans ce chapitre, nous avons défini les objets : z^n, z^{-n} tq $n \in \mathbb{N}$, $\bar{z}, |z|$, $\arg(z)$ et e^z où $z \in \mathbb{C}$ (éventuellement non nul).

Par contre, si $z \in \mathbb{C}$ alors les objets suivants n'existent pas :



$\cos(z), \tan(z), \sin(z), \ln(z), \sqrt[n]{z}, z^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{z}, |z|$.