

Corrigé TD Complexes (2)

Exponentielles complexes-Equations polynomiales- Racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes.

Soit α un réel. Donner les racines carrées complexes des nombres complexes a suivants :

1. $a = -1$
2. $a = -3$
3. $a = 2$
4. $a = \cos^2(\alpha) - 1$

5. $a = -2i$
6. $a = \frac{1}{4}i$
7. $a = j$

8. $a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}$
9. $a = -2 + i$
10. $a = -12 + 16i$

- 1) Je cherche à écrire a sous forme d'un carré.
- 2) Je cherche la forme trigo sympa de $a = re^{i\theta}$, alors les racines carrées sont $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
- 3) Je cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = a$... puis je résous un système en identifiant parties réelles, imaginaires et modules !!

1. $a = -1 = i^2$. Donc, i et $-i$ sont les racines carrées complexes de a .
2. $a = -3 = i^2\sqrt{3}^2 = (i\sqrt{3})^2$. Donc, $\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$ sont les racines carrées complexes de a .
3. $a = 2 = (\sqrt{2})^2$. Donc, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les racines carrées complexes de a .
4. $a = \cos^2(\alpha) - 1 = -\sin^2(\alpha) = i^2\sin^2(\alpha) = (i\sin(\alpha))^2$. Donc, $i\sin(\alpha)$ et $-i\sin(\alpha)$ sont les racines carrées complexes de a .
5. $a = -2i \hat{=} (1-i)^2$. Donc, $1-i$ et $-1+i$ sont les racines carrées complexes de $-2i$.
6. La forme trigonométrique de a est sympa ! $a = \frac{1}{4}i = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$. Donc, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont les racines carrées complexes de $\frac{1}{4}i$.
ou bien $a = \frac{1}{4}i \hat{=} \frac{1}{2 \times 4} 2i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1+i)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)\right)^2$
7. $a = j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$. Donc $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les racines carrées complexes de j .
8. La forme trigonométrique de a est sympa !! $a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \left[2^{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}\right]^2$. Donc $2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}$ et $-2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}$ sont les racines carrées complexes de a .
9. La forme trigonométrique de a n'est pas sympa !! $a = -2 + i$. Je cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = -2 + i$.

$$z^2 = -2 + i \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = -2 + i \\ |x+iy|^2 = |-2+i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 1 \\ 2y^2 = \sqrt{5} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \\ xy = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \\ xy = \frac{1}{2} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \end{cases}$$

Donc, $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$ sont les deux racines deuxièmes de $-2 + i$.

10. La forme trigonométrique de a n'est pas sympa !!
ou bien j'applique la méthode précédente

ou bien j'écris : $a = -12 + 16i \hat{=} 16 - 4 + 2 \times 4 \times 2i = 4^2 + (2i)^2 + 2 \times 4 \times 2i = (4 + 2i)^2$. Donc, $4 + 2i$ et $-(4 + 2i)$ sont les racines carrées complexes de $-12 + 16i$.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe ou (z, w) couple de complexes :

1. $e^z = -5$.
2. $e^{2z} + e^z + 1 = 0$
3. $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$
4. $\begin{cases} z + \bar{w} = -1 + 2i \\ \bar{z}w = 1 + 7i \end{cases}$
5. $e^{z^2} = 1$
6. $\begin{cases} e^z + e^w = 2 \\ e^{z+w} = 2 \end{cases}$
7. $z^4 + 119 - 120i = 0$
8. $z^4 - 14iz^2 + 32 = 0$
9. $z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i = 0$
10. $e^{3z} + 3e^{2z} + 24e^{-z} = -8$
11. $z^2 \left(1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)z - 4 = 0$ où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$
12. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$
13. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$

1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tq x, y réels.

$$e^z = -5 \Leftrightarrow e^{x-iy} = 5e^{i\pi} \Leftrightarrow e^x e^{-iy} = 5e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 5 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / -y = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(5) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / -y = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(5) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = -\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = \ln(5) + i(-\pi + 2k\pi)$. Ainsi, **Sol = $\{\ln(5) + i(-\pi + 2k\pi) / k \in \mathbb{Z}\}$.**

2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tq x, y réels et $Z = e^z$.

$$e^{2z} + e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z = j \text{ ou } Z = j^2 \Leftrightarrow e^z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } e^z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2 \text{ et } Z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j \text{ et } Z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = j^2$$

OU BIEN d'après le cours, j et j^2 les racines troisièmes de l'unité sauf 1, sont les solutions de $1+t+t^2=0$.

$$\Leftrightarrow e^x e^{iy} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } e^x e^{iy} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} e^x = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ ou } z = i\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right).$$

Ainsi, **Sol = $\left\{i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), i\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$.**

3. $\begin{cases} z + \bar{w} = -1 + 2i \\ \bar{z}w = 1 + 7i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + \bar{w} = -1 + 2i \\ \bar{z}w = 1 + 7i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + \bar{w} = -1 + 2i \\ z\bar{w} = 1 - 7i \end{cases} \Leftrightarrow z \text{ et } \bar{w} \text{ sont les racines de } P(t) = t^2 + (1 - 2i)t + 1 - 7i.$

Posons $\Delta = (1 - 2i)^2 - 4(1 - 7i) = 1 + (2i)^2 - 2 \times 2i - 4 + 28i = 1 - 4 - 4i - 4 + 28i = -7 + 24i = -16 + 9 + 2 \times 3 \times 4i = (3 + 4i)^2$

$$t_1 = \frac{-(1-2i) - (3+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i \text{ et } t_2 = \frac{-(1-2i) + (3+4i)}{2} = 1 + 3i.$$

Par conséquent, $\begin{cases} z + \bar{w} = -1 + 2i \\ \bar{z}w = 1 + 7i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 - i \\ \bar{w} = 1 + 3i \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z = 1 + 3i \\ \bar{w} = -2 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2 - i \\ w = 1 - 3i \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z = 1 + 3i \\ w = -2 + i \end{cases}$. Ainsi, **Sol = $\{(-2 - i, 1 - 3i); (1 - 3i, -2 - i)\}$.**

(e) : $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$

Posons $\Delta = (7-i)^2 - 4(1+3i)(-4-2i) = 49 - 14i - 1 - 4(-4 - 12i - 2i + 6) = 40 + 42i$.

4. Cherchons les racines carrées de $\Delta = 40 + 42i$.

1^{ère} méthode : On cherche $\delta = x + iy$ tel que : $(x + iy)^2 = 3 - 4i$.

$$(x + iy)^2 = 40 + 42i \Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 40 + 42i \\ |(x + iy)^2| = |40 + 42i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + i2xy = 40 + 42i \\ |(x + iy)^2| = \sqrt{3364} = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ 2xy = 42 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 98 \\ 2y^2 = 18 \\ xy = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 49 \\ y = \pm 9 \\ xy = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -7 \\ y = -3 \end{cases}. \text{ Donc, } 7 + 3i \text{ et } -7 - 3i \text{ sont les racines carrées de } 40 + 42i.$$

2^{ème} méthode : $\Delta = 40 + 42i = 40 + 2 \times 7 \times 3 \times i = 49 - 9 + 2 \times 7 \times 3i = 7^2 + (3i)^2 + 2 \times 7 \times 3i = (7 + 3i)^2$

Alors, $z_1 = \frac{(7-i)-(7+3i)}{2(-4-2i)} = \frac{-14-2i}{2(-4-2i)} = \frac{-7-i}{-4-2i} = \frac{(-7-i)(-4+2i)}{|-4-2i|^2} = \frac{30-10i}{20} = \frac{3-i}{2}$ et $z_2 = \frac{-(7-i)+(7+3i)}{2(-4-2i)} = \frac{4i}{2(-4-2i)} = \frac{2i}{(-4-2i)} = \frac{2i(-4+2i)}{|-4-2i|^2} = \frac{-4-8i}{20} = \frac{-1-2i}{5}$ sont les solutions de (e).

5. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tq x, y réels.

$$e^{z^2} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-y^2} e^{2ixy} = 1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2-y^2} = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/2xy = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/xy = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/xy = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \exists k \in \mathbb{Z}/x^2 = k\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x \\ \exists k \in \mathbb{Z}/-x^2 = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \exists k \in \mathbb{N}/x = \pm\sqrt{k\pi} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x \\ \exists k \in \mathbb{N}/x = \pm\sqrt{-k\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \exists k \in \mathbb{N}/x = \pm\sqrt{k\pi} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x \\ \exists k \in \mathbb{N}/x = \pm\sqrt{-k\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}/x = \pm\sqrt{k\pi}(1+i) \text{ ou } x = \pm\sqrt{k\pi}(1-i)$$

$$\text{Sol} = \{\pm\sqrt{k\pi}(1+i), \pm\sqrt{k\pi}(1-i)/k \in \mathbb{N}\}.$$

6. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tq x, y réels et $w = a + ib$ tq a, b réels.

$$\begin{cases} e^z + e^w = 2 \\ e^{z+w} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^z + e^w = 2 \\ e^z e^w = 2 \end{cases} \Leftrightarrow e^z \text{ et } e^w \text{ sont les racines de } P(t) = t^2 - 2t + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^z = 1 + i \\ e^w = 1 - i \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} e^z = 1 - i \\ e^w = 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^a e^{ib} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ e^a e^{ib} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \text{ et } \exists k \in \frac{\mathbb{Z}}{y} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ e^a = \sqrt{2} \text{ et } \exists k \in \frac{\mathbb{Z}}{b} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \text{ et } \exists k \in \frac{\mathbb{Z}}{y} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ e^a = \sqrt{2} \text{ et } \exists k \in \frac{\mathbb{Z}}{b} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ a = \frac{\ln(2)}{2} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/b = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{\ln(2)}{2} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ a = \frac{\ln(2)}{2} \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}/b = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \left\{ \left(\frac{\ln(2)}{2} + i \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \frac{\ln(2)}{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right), \left(\frac{\ln(2)}{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \frac{\ln(2)}{2} + i \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

7. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $Z = z^2 = x + iy$ tq a, b, x, y réels.

$$z^4 + 119 - 120i = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -119 + 120i \Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = -119 + 120i \\ |x + iy|^2 = |-119 + 120i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -119 + 120i \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -119 \\ 2xy = 120 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 50 \\ xy = 60 \\ 2y^2 = 288 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ xy = 60 \\ y^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ xy = 60 \\ y = \pm 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -5 \\ y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 = 5 + 12i \text{ ou } z^2 = -5 - 12i = (5 + 12i)i^2.$$

$$z^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} (a + ib)^2 = 5 + 12i \\ |a + ib|^2 = |5 + 12i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2iab = 5 + 12i \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ xy = 6 \\ 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ xy = 6 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ xy = 6 \\ y^2 = \pm 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}. \text{ Donc } 3 + 2i \text{ et } -3 - 2i \text{ vérifient } z^2 = 5 + 12i. \text{ Alors } i(3 + 2i) \text{ et } i(-3 - 2i) \text{ vérifient } z^2 = -(5 + 12i).$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \{3 + 2i, -3 - 2i, -2 + 3i, 2 - 3i\}.$$

8. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $Z = z^2 = x + iy$ tq a, b, x, y réels.

$$z^4 - 14iz^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 14iZ + 32 = 0 \Leftrightarrow Z = -2i \text{ ou } Z = 16i \Leftrightarrow z^2 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^2 \text{ ou } z^2 = (4e^{i\frac{\pi}{4}})^2$$

$$\Delta = (-14i)^2 - 4 \times 32 = -324 = (18i)^2$$

$$z_1 = \frac{14i - 18i}{2} = -2i \text{ ou } z_2 = \frac{14i + 18i}{2} = 16i$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = \pm 4e^{i\frac{\pi}{4}}. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \{\pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \pm 4e^{i\frac{\pi}{4}}\}.$$

9. $z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = 0$

$-i$ est racine de la fonction polynomiale $P(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$. Factorisons $P(z)$ par $z + i$: cherchons un complexe b tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = (z+i)(z^2 + bz + 89)$. Il suffit de choisir b tel que : $\begin{cases} ib + 89 = 89 - 16i \\ i + b = i - 16 \end{cases}$. Donc $b = -16$ convient.

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = (z+i)(z^2 - 16z + 89)$.

Posons alors $\Delta = (16)^2 - 4 \times 89 = -100 = (10i)^2, z_1 = 8 + 5i$ et $z_2 = 8 - 5i$. D'après le cours, $(z^2 - 16z + 89) = (z - z_1)(z - z_2)$. Et par suite, $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = (z+i)(z - z_1)(z - z_2)$.

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \{8 + 5i, 8 - 5i, -i\}.$$

10. Soit (e) l'équation $z^2 \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + 4itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) z - 4 = 0$ d'inconnue complexe z ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est un paramètre).

Comme $1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) > 0$, (e) est polynomiale de degré 2.

$$\text{Posons } \Delta = \left(4itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 + 16 \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) = 16 = 4^2$$

$$z_1 = \frac{-4itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 4}{2 \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)} = \frac{-2itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 2}{\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}} = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[-2itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 2 \right] = -2isin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - 2\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = -\cos(\alpha) - 1 - isin(\alpha) = -1 - e^{i\alpha}$$

$$z_1 = \frac{-4itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 4}{2 \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)} = \frac{-2itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 2}{\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}} = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[-2itan \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 2 \right] = -2isin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 2\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \cos(\alpha) + 1 - isin(\alpha) = 1 + e^{-i\alpha}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \{-1 - e^{i\alpha}, 1 + e^{-i\alpha}\}.$$

11. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (3z^2 + z + 1)^2 - i^2(z^2 + 2z + 2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (3z^2 + z + 1)^2 - (iz^2 + 2iz + 2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (3z^2 + z + 1 - (iz^2 + 2iz + 2i))(3z^2 + z + 1 + (iz^2 + 2iz + 2i)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3z^2 + z + 1 - (iz^2 + 2iz + 2i) = 0 \text{ ou } 3z^2 + z + 1 + (iz^2 + 2iz + 2i) = 0 \Leftrightarrow (3 - i)z^2 + (1 - 2i)z + (1 - 2i) = 0 \text{ ou } (3 + i)z^2 + (1 + 2i)z + (1 + 2i) = 0$$

Posons $\Delta_1 = (1 - 2i)^2 - 4(3 - i)(1 - 2i) = -7 + 24i = -16 + 9 + 2 \times 3 \times 4i = (3 + 4i)^2$
 et $z_1 = \frac{-1-2i-(3+4i)}{2(3-i)} = \frac{-4-2i}{2(3-i)} = \frac{(-2-i)(3+i)}{|3-i|^2} = \frac{-5-5i}{10} = \frac{-1-i}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+2i+(3+4i)}{2(3-i)} = \frac{2+6i}{2(3-i)} = \frac{(1+3i)(3+i)}{|3-i|^2} = \frac{10i}{10} = i$

Posons $\Delta_2 = (1 + 2i)^2 - 4(3 + i)(1 + 2i) = -7 - 24i = -16 + 9 - 2 \times 3 \times 4i = (3 - 4i)^2 = \bar{\Delta}_1$

et $z_3 = \frac{-1-2i-(3-4i)}{2(3+i)} = \bar{z}_2 = \frac{-1+i}{2}$ et $z_4 = \frac{-1+2i+(3-4i)}{2(3+i)} = \bar{z}_2 = -i$.

Ainsi, $Sol = \left\{ \frac{-1-i}{2}, \frac{-1+i}{2}, i, -i \right\}$.

12. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 + 6z + 9) + 100 = 0 \Leftrightarrow z^2(z + 3)^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow (z(z + 3))^2 - (10i)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow z(z + 3) - 10i = 0 \text{ ou } z(z + 3) + 10i = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3z - 10i = 0 \text{ ou } z^2 + 3z + 10i = 0$$

Posons $\Delta_1 = 9 + 40i = 25 - 16 + 2 \times 5 \times 4i = (5 + 4i)^2$ et $z_1 = \frac{-3-(5+4i)}{2} = -4 - 2i$ et $z_2 = \frac{-3+(5+4i)}{2} = 1 + 2i$

Posons $\Delta_2 = 9 - 40i = 25 - 16 - 2 \times 5 \times 4i = (5 - 4i)^2$ et $z_3 = \frac{-3-(5-4i)}{2} = -4 + 2i$ et $z_4 = \frac{-3+(5-4i)}{2} = 1 - 2i$

Ainsi $Sol = \{-4 - 2i, -4 + 2i, 1 + 2i, 1 - 2i\}$.

Donner les racines $n^{\text{ièmes}}$ des complexes a suivants et les représenter dans le plan complexe (i.e. le plan muni d'un repère orthonormé direct) :

1. $a = -1$ $n = 8$

2. $a = 7 - 24i$ $n = 4$

3. $a = -8i$ $n = 6$

4. $a = j$ $n = 10$

5. $a = \frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}$ $n = 5$

6. $a = e^{2ix} - 1$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \pi[$

7. $a = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ $n = 6$

1. $a = -1 = e^{i\pi}$. Donc $e^{\frac{i\pi}{8}}$ est une racine huitième de -1 . $Sol = \{e^{\frac{i\pi}{8}} e^{\frac{2ik\pi}{8}} / k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket\}$.

2. $a = 7 - 24i = 16 - 9 - 2 \times 4 \times 3i = (4 - 3i)^2$. Donc, $4 - 3i$ est une racine deuxième complexe de $7 - 24i$.

Je cherche $z = x + iy$ tel que : $z^2 = 4 - 3i$.

$$z^2 = 4 - 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 9 \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Lorsque $n=4$ et la forme trigo de a n'est pas sympa, on peut chercher une racine carrée d'une racine carrée.

Donc, $\frac{3-i}{\sqrt{2}}$ est une racine carrée de $4 - 3i$ et donc une racine quatrième de $7 - 24i$. Comme $1, -1, i$ et $-i$ sont les racines quatrièmes de 1 .

$\frac{3-i}{\sqrt{2}}, -\frac{3-i}{\sqrt{2}}, i\frac{3-i}{\sqrt{2}}$ et $(-i)\frac{3-i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+3i}{\sqrt{2}}$ sont les racines quatrièmes de $7 - 24i$.

Ainsi, $Sol = \left\{ \frac{-1+3i}{\sqrt{2}}, \frac{1+3i}{\sqrt{2}}, \frac{3-i}{\sqrt{2}}, \frac{-3+i}{\sqrt{2}} \right\}$

3. $a = -8i = 8e^{\frac{i3\pi}{2}}$. Donc $8^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i3\pi}{12}} = 8^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{4}}$ est une racine quatrième de $-8i$. Ainsi, $Sol = \{8^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i3\pi}{12}} e^{\frac{2ik\pi}{12}} / k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$.

4. $a = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ Donc $e^{\frac{i2\pi}{30}} = e^{\frac{i\pi}{15}}$ est une racine dixième de j . Ainsi, $Sol = \{e^{\frac{i\pi}{15}} e^{\frac{2ik\pi}{15}} / k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket\}$.

5. $a = \frac{1+i}{3-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i(\frac{5\pi}{12})}$. Donc $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{12})}$ est une racine cinquième de $\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}$. Ainsi, $Sol = \left\{ \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{12})} e^{\frac{2ik\pi}{5}} / k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\}$.

6. $a = e^{2ix} - 1 = 2i\sin(x)e^{ix} = 2\sin(x)e^{i(x+\frac{\pi}{2})}$.

Si $x \in]0, \pi[$, alors $\sin(x) > 0$ par conséquent, $\sqrt[n]{2\sin(x)} e^{i(\frac{x+\pi}{n})}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de $e^{2ix} - 1$. Ainsi, $Sol = \{\sqrt[n]{2\sin(x)} e^{i(\frac{x+\pi}{n})} e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Si $x = 0$ alors $a = 0$ et par conséquent, $Sol = \{0\}$.

7. $a = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{1+\frac{i\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}{1-\frac{i\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} = \frac{\frac{\sin(\theta)+i\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}{\frac{\sin(\theta)-i\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} = \frac{\sin(\theta)+i\cos(\theta)}{\sin(\theta)-i\cos(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$. Donc $e^{i(\frac{2\theta}{6})} = e^{i(\frac{\theta}{3})}$ est une racine sixième de $\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$. Ainsi, $Sol = \{e^{i(\frac{\theta}{3})} e^{\frac{2ik\pi}{6}} / k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe (n désigne un entier naturel non nul) :

1. $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

2. $1 - i(1 - z)^4 = 0$

3. $z^n = 3^n$

4. $z^8 = \bar{z}$

5. $64(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$

6. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

7. $z^8 + z^4 + 1 = 0$

8. $(z - i)^3 + (z - i)^2(z + i) + (z - i)(z + i)^2 + (z + i)^3 = 0$

9. $(1 - i)z^8 + (1 - i\sqrt{3})z = 0$

10. $z^5 + z^6 + \dots + z^n = 0$ où $n \geq 5$.

11. $z^6 + z^3(1 + z)^3 + (1 + z)^6 = 0$

12. $z^{2n} - 2z^n \cos(\alpha) + 1 = 0$ où $\alpha \in [0, \pi]$

13. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 2\cos(\alpha)$ où $\alpha \in [0, \pi]$

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et (e): $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ d'inconnue z complexe.

Je remarque que 1 n'est pas solution de cette équation. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

z solution de (e) si et si $(z - 1)^n = (z + 1)^n$ si et si $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

si et si $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

si et si $Z^n = 1$ où $Z = \frac{z+1}{z-1}$

si et si Z est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

si et si $Z = 1$ ou $Z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ou $Z = e^{i\frac{4\pi}{n}}$ ou ... $Z = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $(z + 1) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z - 1)$

si et si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z = -(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$

si et si il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $z = -\frac{(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)}{(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})} = -\frac{2\cos(\frac{k\pi}{n})e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})e^{i\frac{k\pi}{n}}} = -i\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Ainsi, $Sol = \{-i\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) / k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$.

ATTENTION A NE PAS DIVISER PAR ZERO :

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$ si et si $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ si et si $k = 0$.

Donc je dois ôter la valeur $k = 0$ pour avoir le droit de diviser.

De plus, pour $k = 0$, $(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}})z \neq -(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$

Donc le cas « $k=0$ » est impossible ... mais ce n'est pas grave il nous reste les autres cas qui, eux, n'aboutissent pas à une impossibilité !!

$z^n = a$

signifie que :

z est une racine $n^{\text{ième}}$ de a .

2. Notons (e): $1 - i(1 - z)^4 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = 1 - z$.

$$z \text{ solution de (e)} \Leftrightarrow Z^4 = \frac{1}{i} \Leftrightarrow Z \text{ est une racine quatrième de } -i \Leftrightarrow \exists k \in \frac{[0,3]}{2} = e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}} \Leftrightarrow \exists k \in \frac{[0,3]}{1} - z = e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0,3]/z = 1 - e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}}.$$

$$\text{Ainsi, } Sol = \{1 - e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}} / k \in [0,3]\}.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. $z^n = 3^n \Leftrightarrow (\frac{z}{3})^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{3}$ est une racine nième de l'unité $\Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1] / \frac{z}{3} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1] / z = 3e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

$$\text{Ainsi, } Sol = \{3e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [0, n-1]\}.$$

4. $z = 0$ vérifie $z^8 = \bar{z}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r = |z| \in \mathbb{R}^{++}$ et θ l'argument principal de z .

$$z^8 = \bar{z} \Leftrightarrow (re^{i\theta})^8 = re^{-i\theta} \Leftrightarrow r^8 e^{i8\theta} = re^{-i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^8 = r \\ 8\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^7 = 1 \\ \theta \in \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / 9\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{2k\pi}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in [0,8] / \theta = \frac{2k\pi}{9} \end{cases} \text{ Ainsi, } Sol = \{0, e^{i\frac{2k\pi}{9}} / k \in [0,8]\}.$$

5. $z = 1$ ne vérifie pas $64(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$64(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+1)^6}{(z-1)^6} = -64 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -64 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \text{ est une racine 6ième de } -64$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0,5] / \frac{z+1}{z-1} = 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} \Leftrightarrow \exists k \in [0,5] / z+1 = 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}(z-1) \Leftrightarrow \exists k \in [0,5] / (2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1)z = 1 + 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$$

$$-64 = (-2)^6 = (2i)^6$$

Donc, $2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$, tq $k \in [0,5]$, sont les 6 racines 6ièmes de -64 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in [0,5] / z = \frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1} \end{cases} \text{ Ainsi, } Sol = \left\{ \frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1} / k \in [0,5] \right\}.$$

$$\text{car } \left| \frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1} \right| = 2 \neq 1$$

$$\text{donc } 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} \neq 1$$

6. $z = -1$ ne vérifie pas $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow (-z)^4 + (-z)^3 + (-z)^2 + (-z) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^4 (-z)^k = 0 \Leftrightarrow \frac{(-z)^5 - 1}{-z - 1} = 0 \Leftrightarrow (-z)^5 = 1$$

$$\Leftrightarrow -z \text{ est une racine 5ième de l'unité} \Leftrightarrow \exists k \in [0,4] / -z = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \Leftrightarrow \exists k \in [1,4] / z = -e^{i\frac{2k\pi}{5}}.$$

$$\text{Ainsi, } Sol = \left\{ -e^{i\frac{2k\pi}{5}} / k \in [1,4] \right\}.$$

$$7. \quad z^3 + z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z = j \text{ ou } Z = j^2 \Leftrightarrow z^4 = j^2 \Leftrightarrow z^4 = j \text{ ou } z^4 = j^2 \Leftrightarrow z \text{ est une racine 4ième de } j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou de } j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = ie^{\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } z = -e^{\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } z = -ie^{\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = ie^{\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } z = -e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{\frac{5\pi}{6}} \text{ ou } z = -ie^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$Sol = \{e^{\frac{\pi}{6}}, e^{\frac{5\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{6}}, e^{-i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{-i\frac{5\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{6}}\}.$$

8. $(-i)$ n'est pas solution. Soit z un complexe différent de $-i$. On pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$.

$$(z-i)^3 + (z-i)^2(z+i) + (z-i)(z+i)^2 + (z+i)^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z \neq 1 \text{ et } \frac{Z^4 - 1}{Z - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow Z \text{ est une racine quatrième de l'unité et } Z \neq 1 \Leftrightarrow Z = i \text{ ou } Z = -i \text{ ou } Z = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = i \text{ ou } \frac{z-i}{z+i} = -i \text{ ou } \frac{z-i}{z+i} = -1 \Leftrightarrow z-i = i(z+i) \dots$$

9. $z = 0$ est solution évidente de $(1-i)\bar{z}^8 + (1-i\sqrt{3})z = 0$. Cherchons les autres solutions :

Soit $z = re^{i\theta}$ un complexe non nul tel que $r > 0$ et θ réel.

$$(1-i)\bar{z}^8 + (1-i\sqrt{3})z = 0 \Leftrightarrow \frac{z^8}{z} = -\frac{(1-i\sqrt{3})}{(1-i)} \Leftrightarrow \frac{r^8 e^{-i8\theta}}{r e^{i\theta}} = \frac{e^{i\pi} 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} \Leftrightarrow r^7 e^{-i9\theta} = \sqrt{2} e^{i(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow \begin{cases} r^7 = \sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[7]{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } Sol = \{0; 2^{\frac{1}{14}} e^{i(\frac{11\pi}{12} + 2k\pi)} / k \in \mathbb{Z}\}.$$

10. $z = 1$ ne vérifie pas $z^5 + z^6 + \dots + z^n = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$z^5 + z^6 + \dots + z^n = 0 \Leftrightarrow \frac{z^{n-5+1} - 1}{z - 1} = 0 \Leftrightarrow z^{n-4} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-5] / z = e^{\frac{2ik\pi}{n-4}} \Leftrightarrow \exists k \in [1, n-5] / z = e^{\frac{2ik\pi}{n-4}}.$$

$$\text{Ainsi } Sol = \{e^{\frac{2ik\pi}{n-4}} / k \in [1, n-5]\}.$$

11. $z = -1$ ne vérifie pas $z^6 + z^3(1+z)^3 + (1+z)^6 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

$$z^6 + z^3(1+z)^3 + (1+z)^6 = 0 \Leftrightarrow \frac{z^6}{(1+z)^6} + \frac{z^3(1+z)^3}{(1+z)^6} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+z}\right)^6 + \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{1+z} \text{ est une racine troisième de } j \text{ ou de } j^2 \Leftrightarrow \exists k \in \frac{[0,2]}{3} = e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z}{z+1} = e^{-\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0,2] / \frac{z}{z+1} = e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z}{z+1} = e^{-\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \Leftrightarrow \exists k \in [0,2] / z = (z+1)e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } z = (z+1)e^{-\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0,2] / z(1 - e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}) = e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } z(1 - e^{-\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}) = e^{-\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0,2] / z = \frac{e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}}{-2i \sin(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}) e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}} = \frac{e^{i(\frac{11\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}}{-2i \sin(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})} = \frac{e^{i(\frac{11\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}}{2 \sin(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})} \text{ ou } z = \frac{e^{i(\frac{7\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}}{2 \sin(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}.$$

$$\text{car } \forall k \in [0,2], \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \neq 0 \pmod{2\pi}$$

$$\text{donc } e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \neq 1$$

$$\text{Ainsi, } Sol = \left\{ \frac{e^{i(\frac{11\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}}{2 \sin(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}; \frac{e^{i(\frac{7\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})}}{2 \sin(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3})} / k \in [0,2] \right\}.$$

12. Soit z un complexe. Posons $Z = z^n$.

$$Z^n = a$$

signifie que :

Z est une racine nième de a .

On ne peut pas arranger car $2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$ et 1 n'ont pas le même module ...

$$z^{2n} - 2z^n \cos(\alpha) + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 2Z \cos(\alpha) + 1 = 0.$$

$$\text{Posons } \Delta = (2 \cos(\alpha))^2 - 4 = 4(\cos^2(\alpha) - 1) = 4(-\sin^2(\alpha)) = -4 \sin^2(\alpha) = (2i \sin(\alpha))^2.$$

$$Z_1 = \frac{2 \cos(\alpha) + 2i \sin(\alpha)}{2} = e^{i\alpha} \text{ et } Z_2 = \frac{2 \cos(\alpha) - 2i \sin(\alpha)}{2} = e^{-i\alpha}.$$

Donc $z^{2n} - 2z^n \cos(\alpha) + 1 = 0 \Leftrightarrow Z = Z_1 \text{ ou } Z = Z_2 \Leftrightarrow z^n = e^{i\alpha} \text{ ou } z^n = e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z \text{ est une racine } n^{\text{ème}} \text{ de } e^{i\alpha} \text{ ou de } e^{-i\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z =$

$$e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ ou } z = e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \left\{ e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}; e^{-\frac{i\alpha}{n}} e^{-\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Rque: si $\alpha \in \{0, \pi\}$ alors $\Delta = 0$ et $Z_2 = Z_1$ et $e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{-\frac{i\alpha}{n}} e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$ donc on écrira plus simplement $\text{Sol} = \left\{ e^{\frac{i\alpha}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$

$$13. \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = 2 \cos(\alpha) \text{ où } \alpha \in [0, \pi].$$

$$\text{Résoudre le système (S)} \begin{cases} x + jy + j^2 z = 0 \\ j^2 x + y + jz = 0 \\ jx + j^2 y + z = 0 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z) \in \mathbb{C}^3.$$

$$(S) \begin{cases} x + jy + j^2 z = 0 \\ j^2 x + y + jz = 0 \\ jx + j^2 y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + jy + j^2 z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -jy - j^2 z.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \{(-jy - j^2 z, y, z) / y, z \in \mathbb{C}^2\}$$

Soit a, b et c trois complexes distincts et A, B et C leurs images ponctuelles respectives.

Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin) si et si $a + bj + cj^2 = 0$

ABC est équilatère direct si et si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $AB = AC$

$$\text{si et si } \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et } |b-a| = |c-a|$$

$$\text{si et si } \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et } \left| \frac{b-a}{c-a} \right| = 1$$

$$\text{si et si } \frac{c-a}{b-a} = 1 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{si et si } \frac{c-a}{b-a} = 1 + j$$

$$\text{car } e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + j$$

$$\text{si et si } (c-a) - (1+j)(b-a) = 0$$

$$\text{si et si } ja - (1+j)b + c = 0$$

$$\text{si et si } a - \left(\frac{1}{j} + 1\right)b + \frac{1}{j}c = 0$$

$$\text{si et si } a + (j^2 + 1)b + j^2 c = 0$$

$$\text{car } \frac{1}{j} = j^2$$

$$\text{si et si } a + jb + j^2 c = 0.$$

$$\text{car } 1 + j + j^2 = 0$$

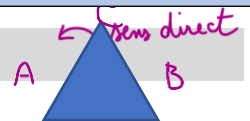
$$\bullet j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

• $1, j$ et j^2 sont les racines 3ièmes de l'unité, $j^3 = 1$.

$$\bullet 1 + j + j^2 = 0.$$

• j et j^2 sont les deux solutions de $1 + z + z^2 = 0$.

$$\bullet \forall p \in \mathbb{Z}, j^p = e^{2ip\frac{\pi}{3}} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 3k \\ j & \text{si } p = 3k + 1 \\ j^2 & \text{si } p = 3k + 2 \end{cases}$$



1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^4)$ sont alignés.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $A(1)$ et $P(1 + z^2)$ sont alignés.

1) Si $M = P$ ou $M = Q$ ou $P = Q$ alors les points M, P et Q sont alignés.

$$\text{Or } M = P \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1.$$

$$M = Q \Leftrightarrow z^4 = z \Leftrightarrow z(z^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = j \text{ ou } z = j^2.$$

car les solutions de $1 + z + z^2 = 0$ sont les racines 3ièmes de l'unité sauf 1

$$P = Q \Leftrightarrow z^4 = z^2 \Leftrightarrow z^2(z^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow z^2(z-1)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = -1.$$

Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), B(-1), C(j), D(j^2)\}$ alors M, P et Q sont alignés.

Prenons maintenant $z \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$. Alors, M, P et Q sont distincts. Par conséquent,

$$M, P \text{ et } Q \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^2(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg(z(z+1)) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow z(z+1) \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow z(z+1) = \overline{z(z+1)} \Leftrightarrow z(z+1) = \bar{z}(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ou } 2\text{Re}(z) = -1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } \text{Re}(z) = -\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow M \text{ est sur l'axe réel ou sur la droite } D \text{ verticale d'équation } x = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\text{Sol} = D \cup (Ox)$ puisque les points O, A, B, C et D sont aussi dans cet ensemble.

2) Si $M = A$ (i.e $z = 1$) ou $A = P$ (i.e $z = 0$) ou $P = M$ (i.e $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$) alors les points M, P et A sont alignés.

$$(\text{en effet, } P = M \Leftrightarrow 1 + z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}).$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), C(e^{i\frac{\pi}{3}}), D(e^{-i\frac{\pi}{3}})\}$ alors A, M et P sont alignés.

Prenons maintenant $z \notin \{0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$. Alors, M, P et Q sont distincts. Par conséquent,

$$M, P \text{ et } A \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PA}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg \left(\frac{1+z^2-1}{z-1} \right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^2}{z-1} \right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow a \Leftrightarrow \frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z^2}{z-1} = \overline{\left(\frac{z^2}{z-1} \right)} \Leftrightarrow \frac{z^2}{z-1} = \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}-1}$$

$$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) = \bar{z}^2(z-1) \Leftrightarrow z\bar{z}\bar{z} - z\bar{z} - \bar{z}^2z + \bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})|z|^2 - (z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[|z|^2 - (z+\bar{z})] = 0$$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \text{ ou } |z|^2 - (z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ou } |z|^2 = 2\text{Re}(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z-1|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z-1| = 1 \Leftrightarrow M \text{ est sur l'axe réel ou } AM = 1$$

$$\Leftrightarrow M \text{ est sur l'axe réel ou } M \text{ est sur le cercle de centre } A \text{ et de rayon } 1.$$

Comme O, D et C sont sur le cercle de centre A et de rayon 1, je peux conclure que $\text{Sol} = C(A, 1) \cup (\text{axe réel})$.

Calculer j^p suivant les valeurs de l'entier naturel p puis placer les points M_p d'affixe j^p dans le plan complexe. En déduire les valeurs des sommes : $U_n =$

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{3n}{3k}, \quad V_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{3n}{3k+1} \text{ et } W_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{3n}{3k+2}.$$

$$a. \quad j^p = e^{2ip\frac{\pi}{3}} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 0[3] \\ e^{2i\frac{\pi}{3}} & \text{si } p \equiv 1[3] \\ e^{4i\frac{\pi}{3}} & \text{si } p \equiv 2[3] \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 0[3] \\ j & \text{si } p \equiv 1[3] \\ j^2 & \text{si } p \equiv 2[3] \end{cases}.$$

$$b. \quad (1+j)^{3n} = \sum_{p=0}^{3n} \binom{3n}{p} j^p = \sum_{p \equiv 0[3]} \binom{3n}{p} j^p + \sum_{p \equiv 1[3]} \binom{3n}{p} j^p + \sum_{p \equiv 2[3]} \binom{3n}{p} j^p = \sum_{p \equiv 0[3]} \binom{3n}{p} + \sum_{p \equiv 1[3]} \binom{3n}{p} j + \sum_{p \equiv 2[3]} \binom{3n}{p} j^2$$

$$(-j^2)^{3n} = U_n + V_n j + W_n j^2. \text{ Donc, } (-1)^{3n} j^{6n} = U_n + V_n j + W_n j^2.$$

Donc, $(-1)^n = U_n + V_n j + W_n j^2 = U_n + V_n \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + W_n \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}[V_n - W_n]$. Donc, par unicité des parties réelles et imaginaires d'un complexe, $U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n = (-1)^n$ et $V_n - W_n = 0$. De plus, $U_n + V_n + W_n = \sum_{p=0}^{3n} \binom{3n}{p} = 2^{3n} = 8^n$. Ainsi U_n, V_n et W_n vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} V_n - W_n = 0. \\ U_n + V_n + W_n = 8^n \\ U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n = (-1)^n \end{cases} \text{ . Donc } \begin{cases} V_n = W_n. \\ U_n + 2V_n = 8^n \\ U_n - V_n = (-1)^n \end{cases} \text{ Donc } \begin{cases} V_n = W_n. \\ 3V_n = 8^n - (-1)^n \\ 3U_n = 8^n + 2(-1)^n \end{cases} \text{ . Ainsi, } \begin{cases} V_n = \frac{1}{3}[8^n - (-1)^n]. \\ V_n = \frac{1}{3}[8^n - (-1)^n] \\ U_n = \frac{1}{3}[8^n + 2(-1)^n] \end{cases}.$$

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = z(1-z)$. Démontrer, en utilisant la forme canonique de f , que : $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

$$f(z) = -z^2 + z = -\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \text{ donc } \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \stackrel{\text{car } |-z|=|z|}{=} \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right| \stackrel{1^{\text{ère}} \text{ I.T.}}{\leq} \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4}.$$

Par conséquent, $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$. On considère l'équation (e) : $z^2 - 2^{\alpha+1} \cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.

- Résoudre cette équation ; on note z_1 et z_2 les solutions.
 - Soit A, B et O les points d'affixe z_1, z_2 et 0 . Déterminer les valeurs de α pour que OAB soit équilatéral.
1. Posons $\Delta = (-2^{\alpha+1} \cos(\alpha))^2 - 4 \times 2^{2\alpha} = 2^{2\alpha+2} \cos^2(\alpha) - 2^{2\alpha+2} = 2^{2\alpha+2} (\cos^2(\alpha) - 1) = 2^{2\alpha+2} (-\sin^2(\alpha)) = (2^{\alpha+1})^2 i^2 \sin^2(\alpha) = [2^{\alpha+1} \sin(\alpha) i]^2$. Alors z_1 et z_2 , ci-dessous, sont les solutions de (e). On remarque que si $\alpha = 0$ alors $\Delta = 0$ et $z_1 = z_2$.

$$z_1 = \frac{2^{\alpha+1} \cos(\alpha) + 2^{\alpha+1} \sin(\alpha) i}{2} = 2^\alpha \cos(\alpha) + 2^\alpha \sin(\alpha) i = 2^\alpha e^{i\alpha} \text{ et } z_2 \stackrel{\text{car (e) est à coeff réels.}}{=} \bar{z}_1 = 2^\alpha e^{-i\alpha}.$$

2. OAB est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi. \\ OA = OB \neq 0 \end{cases}$
- Or, $|z_1| = 2^\alpha = |z_2|$. Pour toute valeur de α , $OA = OB = 2^\alpha \neq 0$.

De plus, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) [2\pi] \equiv \arg(z_2) - \arg(z_1) [2\pi] \equiv \alpha - (-\alpha) [2\pi] \equiv 2\alpha [2\pi]$. Par conséquent, OAB est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow$

$$\left[\exists k \in \mathbb{Z} / (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \Leftrightarrow \left[\exists k \in \mathbb{Z} / 2\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \Leftrightarrow \left[\exists k \in \mathbb{Z} / \alpha = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right].$$

Ainsi, les valeurs de α pour que OAB soit équilatéral sont tous les réels de la forme $\pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$.

1) Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 2z^3 - (4+2i)z^2 - (34-10i)z + 56+72i$ sachant que P a une racine réelle.

2) Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^4 + (1-\sqrt{3})z^3 + (2-\sqrt{3})z^2 + (1-\sqrt{3})z + 1$ en utilisant $Z = z + \frac{1}{z}$.

1) Notons r cette racine réelle de P . Alors $P(r) = 2r^3 - (4+2i)r^2 - (34-10i)r + 56+72i \stackrel{*}{=} 0$ donc, en conjuguant de part et d'autre d' cette égalité, j'obtiens : $\overline{P(r)} = \overline{2r^3 - (4+2i)r^2 - (34-10i)r + 56+72i} = 0$. Puis en utilisant les règles de calcul sur les conjugués, $2\bar{r}^3 - \overline{(4+2i)}\bar{r}^2 - \overline{(34-10i)}\bar{r} + \overline{56+72i} = 0$ Alors, puisque r est réel, on obtient : $2r^3 - (4-2i)r^2 - (34+10i)r + 56-72i \stackrel{**}{=} 0$.

En effectuant $(**) - (*)$, j'obtiens : $4ir^2 - 20ir - 144i = 0$ et par suite : $r^2 - 5r - 36 = 0$. Or, $r^2 - 5r - 36 \stackrel{\text{car } 9 \times (-4) = -36 \text{ et } 9 + (-5) = 5}{=} (r-9)(r+4)$.

Ainsi $r = 9$ ou $r = -4$. Or, $P(9) \neq 0$ et $P(-4) = 0$. j'en conclus que $r = -4$ est l'unique racine réelle de P .

Alors je peux factoriser $P(z)$ par $z+4$. Je cherche alors un nombre complexe b tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, 2z^3 - (4+2i)z^2 - (34-10i)z + 56+72i = (z+4)(2z^2 + bz + 14+18i).$$

Or, $(z+4)(2z^2 + bz + 14+18i) = 2z^3 + (8+b)z^2 + (4b+14+18i)z + 56+72i$. Donc, prenons b tel que : $\begin{cases} 8+b = -(4+2i) \\ 4b+14+18i = -(34-10i) \end{cases}$. Par conséquent, $b = -(12+2i)$ convient.

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 2z^3 - (4+2i)z^2 - (34-10i)z + 56+72i = (z+4)(2z^2 - (12+2i)z + 14+18i) = 2(z+4)(z^2 - (6+i)z + 7+9i)$.

Posons $\Delta = (6+i)^2 - 4(7+9i) = 7-24i = 16-9-2 \times 4 \times 3i = (4-3i)^2$ et $z_1 = \frac{6+i+4-3i}{2} = 5-i$ et $z_2 = \frac{6+i-4+3i}{2} = 1+2i$.

Alors $z^2 - (6+i)z + 7+9i = (z-z_1)(z-z_2)$ et enfin $P(z) = 2(z+4)(z-z_1)(z-z_2) = 2(z+4)(z-(5-i))(z-(1+2i))$.

2) $P(0) \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de P . Soit z un complexe non nul. Posons $Z = z + \frac{1}{z}$. Alors $Z^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$.

Alors, $P(z) = z^4 + (1-\sqrt{3})z^3 + (2-\sqrt{3})z^2 + (1-\sqrt{3})z + 1 = z^2 \left(z^2 + (1-\sqrt{3})z + (2-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right)$

$$= z^2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + (1-\sqrt{3}) \left(z + \frac{1}{z} \right) + (2-\sqrt{3}) \right) = z^2 \left(Z^2 - 2 + (1-\sqrt{3})Z + (2-\sqrt{3}) \right) = z^2 (Z^2 + (1-\sqrt{3})Z - \sqrt{3}) = z^2 (Z - \sqrt{3})(Z + 1)$$

$$= z^2 \left(z + \frac{1}{z} - \sqrt{3} \right) \left(z + \frac{1}{z} + 1 \right) = z^2 \left(\frac{z^2 + 1 - \sqrt{3}z}{z} \right) \left(\frac{z^2 + 1 + \sqrt{3}z}{z} \right) = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$$

Posons $\Delta_1 = 3 - 4 = -1 = i^2$ et $z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_1 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - e^{i\frac{\pi}{6}})(z - e^{-i\frac{\pi}{6}})(z + e^{i\frac{\pi}{6}})(z + e^{-i\frac{\pi}{6}})$.

Calculer de deux manières les racines quatrième de $1 + i\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $\cos \frac{13\pi}{12}$ et $\sin \frac{13\pi}{12}$.

1^{ère} méthode : $a = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ est une racine quatrième de a et les complexes $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ sont les 4 racines quatrième de a .

2^{ème} méthode :

- Cherchons $z = x + iy$ tel que $z^2 = a$.

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = 1 + i\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 3 \\ 2xy = \sqrt{3} \\ 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ xy = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ xy = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}. \text{ Donc, } b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i) \text{ est une racine carrée complexe de } a.$$

- Cherchons $z = x + iy$ tel que $z^2 = b$.

$$z^2 = b \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = b \\ |z|^2 = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = b \\ |z|^2 = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2y^2 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ xy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \\ xy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \\ y = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \\ y = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \end{cases}. \text{ Ainsi, } c = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \text{ est une racine carrée de } b. \text{ Alors } c^4 = (c^2)^2 = b^2 = a. \text{ Donc, } c \text{ est une racine quatrième de } a. \text{ Par}$$

conséquent, $c, ci, -c$ et $-ic$ sont les quatre racine quatrième de a .

$$\text{Ainsi, } \left\{ \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, -i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \right\} = \left\{ 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{12}} \right\}. \text{ En comparant le signe des parties}$$

réelles et imaginaires de ces quatre complexes, je peux affirmer que $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{13\pi}{12}} = -2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$ i.e. $2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$. Ainsi, $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\right)^2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

$$\text{Vérification : } 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}(2+\sqrt{3}) - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) \text{ OK !}$$

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overline{MP} \perp \overline{MQ}$ où P et Q sont les points images des racines carrées complexes de z .

Soit z un complexe.

- Si $z = 0$ alors 0 est la seule racine carrée de z et par suite $M = P = Q = O$. Donc $\overline{MP} = \vec{O} = \overline{MQ}$ et par conséquent, $\overline{MP} \perp \overline{MQ}$.
- Traitons maintenant le cas $z \neq 0$. Alors z a deux racines carrées distinctes et opposées : δ et $-\delta$.

$$\text{Cherchons les valeurs de } z \text{ tels que } z = \pm\delta : z = \pm\delta \Leftrightarrow z^2 = \delta^2 \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \Leftrightarrow z = 1 \text{ car ici } z \neq 0.$$

Alors si $z = 1$ alors $M = P$ ou $M = Q$ donc $\overline{MP} \perp \overline{MQ}$.

- Traitons maintenant le cas $z \neq 0$ et $z \neq 1$. Alors $M \neq P$ et $M \neq Q$. Donc $\overline{MP} \neq \vec{O}$ et $\overline{MQ} \neq \vec{O}$.

$$\text{Par conséquent, } \overline{MP} \perp \overline{MQ} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \left(\overline{MP}, \overline{MQ}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \arg\left(\frac{-\delta-z}{\delta-z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \arg\left(\frac{-\delta-z}{\delta-z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \arg\left(\frac{-\delta(1+\delta)}{\delta(1-\delta)}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \arg\left(\frac{-(1+\delta)}{(1-\delta)}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \arg\left(\frac{\delta+1}{\delta-1}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{où } \text{Aff}(A)=1 \\ \text{Aff}(B)=-1$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \left(\widehat{AP}, \widehat{BP}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow P \text{ est sur le cercle de diamètre } [A, B] \Leftrightarrow P \text{ est sur le cercle trigonométrique}$$

$$\Leftrightarrow |\delta| = 1 \Leftrightarrow |\delta|^2 = 1 \Leftrightarrow |\delta^2| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle trigonométrique et } \underline{M \neq A}, \text{ car ici } z \neq 1$$

Ainsi, en considérant les trois cas, $Sol = \{O\} \cup C(O, 1)$.

Soit a un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons (e) l'équation : $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$

1. Soit z une solution de (e) . Calculer $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$. En déduire géométriquement que toutes les solutions de (e) sont réelles.

2. Justifier qu'il existe un et un seul réel α dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(\alpha) = a$. Qui est α ?

3. Résoudre (e) dans $\mathbb{C}$, donner les solutions de (e) en fonction de α et sous une forme qui permette de lire qu'elles sont réelles.

1. Soit z une solution de (e) . Alors, $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ donc $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = \left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|^n = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = \frac{|1+ia|}{|1-ia|} = \frac{|1+ia|}{|1+ia|} \stackrel{\text{car } |z|=|z|}{=} 1$. Alors, comme $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|$ est un réel positif, j'en déduis que $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$. De plus, $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = \left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \frac{|1+z|}{|1-z|} = \frac{|-i-z|}{|-i-z|} = |-1| \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right|$. J'en déduis que : $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

$$\text{Aff}(A)=i$$

$$\text{Aff}(B)=-i$$

Notons M le point d'affixe z . Alors $1 = \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{|z-i|}{|z+i|} \stackrel{\text{car } |z|=|z|}{=} \frac{MA}{MB}$. Donc $MA = MB$. J'en déduis que M est sur la médiatrice de $[A, B]$. Or cette médiatrice est l'axe réel. J'en conclus que M est sur l'axe réel ; autrement dit, z est réel.

2. La fonction tangent est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$. Par conséquent, le théorème de TVI assure que le réel a admet un antécédent par $\tan$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction tangente étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, le réel a admet un unique antécédent α par $\tan$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par définition $\alpha = \text{Arctan}(a)$.

3. Soit z un complexe tel que : $1 - iz \neq 0$ i.e. $z \neq \frac{1}{i} = -i$.

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i \tan(\alpha)}{1-i \tan(\alpha)} \Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = e^{i2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1+iz}{1-iz} \text{ est une racine nième de } e^{i2\alpha}$$

$$\frac{1+i \tan(\alpha)}{1-i \tan(\alpha)} = \frac{1+\frac{i \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-\frac{i \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\cos(\alpha)+i \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-i \sin(\alpha)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{i2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \frac{1+iz}{1-iz} = e^{\frac{i2\alpha}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / 1+iz = e^{\frac{i2\alpha}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}} (1-iz)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / i(1+e^{\frac{i2\alpha}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}})z = e^{\frac{i2\alpha}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1$$

$$\text{Mais, } e^{\frac{i2\alpha}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}} = -1 \Leftrightarrow e^{i(\frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \equiv \pi[2\pi].$$

$$\text{Or, } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases} \text{ donc } -\frac{\pi}{n} \leq \frac{(2k-1)\pi}{n} < \frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \frac{(2k+1)\pi}{n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{n} = -\frac{\pi}{n} + 2\pi.$$

$$\text{Donc } \frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi \left(\frac{n}{2} - k\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ n \text{ pair} \\ k = \frac{n}{2} \end{cases}$$

1^{er} cas n impair ou $\alpha \neq 0$

$$z \text{ solution} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z = \frac{\frac{i2\alpha}{n} e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1}{i(1+e^{\frac{i2\alpha}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}})} = \frac{2i \sin(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}) e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n})}}{i2 \cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}) e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n})}} = \tan\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) \in \mathbb{R}.$$

12^{em} cas n pair et $\alpha = 0$

$$z \text{ solution} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus \left\{\frac{n}{2}\right\} / z = \frac{\frac{i2k\pi}{n} - 1}{i(1+e^{\frac{i2k\pi}{n}})} = \frac{2i \sin(\frac{k\pi}{n}) e^{i(\frac{k\pi}{n})}}{i2 \cos(\frac{k\pi}{n}) e^{i(\frac{k\pi}{n})}} = \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $Sol = \left\{ \tan\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$ si n impair ou $\alpha \neq 0$ et $Sol = \left\{ \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) / k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus \left\{\frac{n}{2}\right\} \right\}$ si n pair et $\alpha = 0$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout k de $\{0; 1; \dots; n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $S(n, p) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$.
3. Calculer $T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|$.

$$1. P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}}. \text{ Or, } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n} = \frac{2i\pi}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right) = \frac{2i\pi}{n} \frac{(n-1)n}{2} = i(n-1)\pi. \text{ Donc, } P_n = e^{i(n-1)\pi} = (e^{i\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$S(n, p) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ipk\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ip\pi}{n}} \right)^k = \begin{cases} \left(\frac{e^{\frac{2ip\pi}{n}} - 1}{e^{\frac{2ip\pi}{n}} - 1} \right) \text{ si } e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq 1 \\ n \text{ si } e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{i2p\pi} - 1}{e^{\frac{2ip\pi}{n}} - 1} \text{ si } e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq 1 \\ n \text{ si } e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1 \end{cases} \stackrel{\text{car } e^{i2p\pi} = 1}{=} \begin{cases} 0 \text{ si } e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq 1 \\ n \text{ si } e^{\frac{2ip\pi}{n}} = 1 \end{cases}.$$

$$1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \frac{2p\pi}{n} = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / p = kn \Leftrightarrow p \text{ est multiple de } n.$$

$$\text{Ainsi, } S(n, p) = \begin{cases} 0 \text{ si } p \text{ n'est pas multiple de } n \\ n \text{ si } p \text{ est multiple de } n \end{cases}$$

$$3. T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i\frac{k\pi}{n}} \right| = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \left| \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \stackrel{\text{car } \frac{k\pi}{n} \in [0, \pi] \text{ donc } \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0}{=} 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$T(n) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} \right).$$

$$\text{Or, } \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} \right)^k \stackrel{\text{car } e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1}{=} \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{n}} \right)^n - 1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{i\pi} - 1}{2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{-2}{2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{-i\frac{\pi}{2n}} = \frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right] = 1 + i \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

$$\text{Donc, } T(n) = 2 \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Pour quels entiers naturels non nuls n et p , le système (S) : $\begin{cases} z^n = 1 \\ (1+z)^p = 1 \end{cases}$ a-t-il au moins une solution ?

$$\begin{cases} z^n = 1 \\ (1+z)^p = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z|^n = |1| \\ |(1+z)^p| = |1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ |1+z|^p = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ |1+z| = 1 \end{cases} \stackrel{\text{Aff(A)}=-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} OM = 1 \\ AM = 1 \end{cases} \Rightarrow M \in C(O, 1) \cap C(A, 1) \Rightarrow z = j \text{ ou } z = \bar{j}.$$

Donc les seules solutions possibles de (S) sont j et $\bar{j}$. De plus, si j est solution de (S) alors $\begin{cases} j^n = 1 \\ (1+j)^p = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \bar{j}^n = 1 \\ (1+\bar{j})^p = 1 \end{cases}$ et finalement $\begin{cases} j^n = 1 \\ (1+j)^p = 1 \end{cases}$. Ainsi, si j est solution de (S) alors $\bar{j}$ est aussi solution de (S).

Par conséquent, les entiers n et p recherchés sont les entiers n et p tels que $\begin{cases} j^n = 1 \\ (1+j)^p = 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} j^n = 1 \\ (1+j)^p = 1 \end{cases} \stackrel{\text{car } 1+j+j^2=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} j^n = 1 \\ (-j^2)^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j^n = 1 \\ (-1)^p (j^2)^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j^n = 1 \\ (-1)^p j^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j^n = 1 \\ j^p = (-1)^p \end{cases} \stackrel{\text{car } \forall p, j^p \neq -1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} j^n = 1 \\ p \text{ pair et } j^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ multiple de } 3 \\ p \text{ pair et } p \text{ multiple de } 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ multiple de } 3 \\ p \text{ multiple de } 6 \end{cases}$$

Les entiers n et p recherchés sont donc les entiers n multiples de 3 et les entiers p multiples de 6.

Soit a un complexe de module 1. n un entier strictement positif. On note $u_1, u_2, \dots, u_n$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a et $z_k = (1 + u_k)^n$. Montrer que les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ d'affixes respectives $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont sur une même droite passant par O.

Ponons $a = e^{i\theta}$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = e^{\frac{\theta}{n}} e^{i \frac{2k\pi}{n}}$.

Alors, $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont bien les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a . Et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$z_k = (1 + u_k)^n = \left(1 + e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}\right)^n = \left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n})}\right)^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)} = 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n e^{i(k\pi)} e^{i(\frac{\theta}{2})} = 2^n \left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n \underbrace{(-1)^k}_{x_k \in \mathbb{Z}} e^{i(\frac{\theta}{2})} = x_k e^{i(\frac{\theta}{2})}.$$

Notons $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $e^{i(\frac{\theta}{2})}$ i.e. $\vec{u} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{j}$. Alors $z_k = x_k e^{i(\frac{\theta}{2})}$ signifie que $\overrightarrow{OM_k} = x_k \vec{u}$.

J'en conclus que tous les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont alignés sur la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ les images ponctuelles de ces racines $n^{\text{ièmes}}$.

- 1) Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}, \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} = n\overrightarrow{MO}$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = n$.
- 2) Montrer que $\forall M \in \mathcal{P}, \sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = nMO^2 + n$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = 2n$.

Soit $M(z) \in \mathcal{P}, \text{Aff}(\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Aff}(\overrightarrow{MA_k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{i2k\pi}{n}} - z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2k\pi}{n}}}_{=\text{somme des racines } n^{\text{ièmes de l'unité}} = 0} - \sum_{k=0}^{n-1} z = -nz = n(-z) = \text{Aff}(n\overrightarrow{MO})$. Donc, $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} = n\overrightarrow{MO}$.

Par conséquent, $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = \|n\overrightarrow{MO}\| = n\|\overrightarrow{MO}\|$. Alors $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = n \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO}\| = 1 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(O, 1)$. Donc $\mathcal{C}(O, 1)$ est l'ensemble des points M tels que $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = n$.

$$\text{Soit } M(z) \in \mathcal{P}, \sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{\frac{i2k\pi}{n}} - z\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{i2k\pi}{n}} - z)(\overline{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - z}) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{i2k\pi}{n}} - z)(e^{-\frac{i2k\pi}{n}} - \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \left(e^{\frac{i2k\pi}{n}} \bar{z} + e^{-\frac{i2k\pi}{n}} z\right) + |z|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + |z|^2) + z \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{i2k\pi}{n}}}_{=0} + \bar{z} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2k\pi}{n}}}_{=0} = n(1 + |z|^2) = n + nMO^2.$$

Alors $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = 2n \Leftrightarrow n + nMO^2 = 2n \Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(O, 1)$. Donc $\mathcal{C}(O, 1)$ est l'ensemble des points M tels que $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^2 = 2n$.

Soit a et b deux paramètres complexes distincts et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z - a)^n = (z - b)^n$
2. Montrer que les points images des solutions sont alignés sur la médiatrice de $[A, B]$ où A est l'image ponctuelle de a et B celle de b .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que toutes les solutions soient réelles. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{++}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont réelles).
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que toutes les solutions soient imaginaires pures. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{++}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont imaginaires pures) Come

1. Comme a et b sont distincts, a et b ne sont pas solutions de l'équation (e): $(z - a)^n = (z - b)^n$.

Soit z un complexe distinct de a et b .

$$z \text{ solution de (e)} \Leftrightarrow (z - a)^n = (z - b)^n \Leftrightarrow \frac{(z - a)^n}{(z - b)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z - a}{z - b}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z - a}{z - b} \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de l'unité} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \frac{z - a}{z - b} = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \\ \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, z - a = e^{\frac{i2k\pi}{n}}(z - b) \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \left(1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)z \stackrel{**}{=} a - be^{\frac{i2k\pi}{n}} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow & \exists k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, z = \frac{a - be^{\frac{i2k\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}} \\ \text{car pour } k=0, ** \text{ est fausse} \\ \text{pour } k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, 1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}} \neq 0 \end{matrix}$$

Ainsi, $Sol = \left\{ \frac{a - be^{\frac{i2k\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}} / k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \right\}$. Ces $n - 1$ solutions sont toutes distinctes car si $z_k = z_{k'}$ alors $e^{\frac{i2k\pi}{n}} = \frac{z_k - a}{z_k - b} = \frac{z_{k'} - a}{z_{k'} - b} = e^{\frac{i2k'\pi}{n}}$ et par suite $k = k'$.

$$2. \quad z \text{ solution de (e)} \Leftrightarrow \left(\frac{z - a}{z - b}\right)^n = 1 \Rightarrow \left|\left(\frac{z - a}{z - b}\right)^n\right| = |1| \Rightarrow \left|\frac{z - a}{z - b}\right|^n = 1 \Rightarrow \left|\frac{z - a}{z - b}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|z - a|}{|z - b|} = 1 \Rightarrow |z - a| = |z - b| \Leftrightarrow \begin{matrix} a = \text{Aff}(A) \\ b = \text{Aff}(B) \end{matrix} MA = MB \Rightarrow M \in \text{med}[A, B].$$

Ainsi, les points images des solutions sont alignés sur la médiatrice de $[A, B]$.

3. Les solutions de (e) sont réelles si et seulement si les images des solutions sont alignées sur l'axe réel si et seulement si la médiatrice de $[A, B]$ est l'axe réel si et seulement si $b = \bar{a}$.

$$\text{On pose alors } a = re^{i\alpha} \text{ et } b = re^{-i\alpha}. \text{ Alors, } z_k = \frac{re^{i\alpha} - re^{-i\alpha} e^{\frac{i2k\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha} (1 - e^{(-2\alpha + \frac{2k\pi}{n})i})}{1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha} (-2i \sin(-\alpha + \frac{k\pi}{n})) e^{(-\alpha + \frac{k\pi}{n})i}}{-2i \sin(\frac{k\pi}{n}) e^{(\frac{k\pi}{n})i}} = \frac{r \sin(-\alpha + \frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} \in \mathbb{R}.$$

4. Les solutions de (e) sont réelles si et seulement si les images des solutions sont alignées sur l'axe imaginaire si et seulement si la médiatrice de $[A, B]$ est l'axe imaginaire si et seulement si $b = -\bar{a}$.

$$\text{On pose alors } a = re^{i\alpha} \text{ et } b = -re^{-i\alpha}. \text{ Alors, } z_k = \frac{re^{i\alpha} + re^{-i\alpha} e^{\frac{i2k\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha} (1 + e^{(-2\alpha + \frac{2k\pi}{n})i})}{1 - e^{\frac{i2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha} (2 \cos(-\alpha + \frac{k\pi}{n})) e^{(-\alpha + \frac{k\pi}{n})i}}{-2i \sin(\frac{k\pi}{n}) e^{(\frac{k\pi}{n})i}} = \frac{r \cos(-\alpha + \frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} i \in i\mathbb{R}.$$

Soit l'équation (E) : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ on donnera les solutions sous leur forme trigonométrique.
2. En déduire la valeur de la somme : $S = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.
3. En déduire les valeurs de $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
4. En déduire des expressions par radicaux de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
5. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs au cercle (C) de centre $\Omega\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et à l'axe réel.
6. Déduire de ce qui précède une construction à la règle et au compas des sommets d'un pentagone régulier.

$$1. \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0 \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow z \text{ est racine 5ème de l'unité distincte de } 1.$$

Les solutions de (E) sont donc les quatre complexes $e^{\frac{i2k\pi}{5}}$ tq $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

$$2. \quad S = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sum_{k=0}^4 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = \sum_{k=0}^4 \text{Re}\left(e^{\frac{i2k\pi}{5}}\right) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^4 e^{\frac{i2k\pi}{5}}\right) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^4 \left(e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)^k\right) = \text{Re}(0) = 0$$

$= 0 \text{ car } e^{\frac{i2\pi}{5}} \text{ est solution de (E)}$

$$3. \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \stackrel{\text{car } \frac{2\pi}{5} - 2\pi = -\frac{8\pi}{5}}{=} \cos\left(-\frac{8\pi}{5}\right) \stackrel{\text{car } \cos \theta = \cos(-\theta)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \stackrel{\text{car } \frac{4\pi}{5} - 2\pi = -\frac{6\pi}{5}}{=} \cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right) \stackrel{\text{car } \cos \theta = \cos(-\theta)}{=} \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right).$$

$$\text{Donc, } 0 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 + 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right] = 1 + 2s. \text{ Donc, } s = -\frac{1}{2}.$$

De plus, $0 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$. Donc, en appliquant la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, j'ai obtenus :

$$0 = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 + 4p. \text{ Donc, } p = -\frac{1}{4}.$$

4. Posons $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $y = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Alors $\begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Par conséquent, x et y sont les racines de $P(t) = t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$. Posons $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

$$t_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 0 \text{ et } t_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0. \text{ Comme } y < 0 < x, \text{ je peux conclure que } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = y = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Alors } \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{16 - (1+5-2\sqrt{5})}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}. \text{ Comme } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0, \text{ je peux conclure que } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

$$\text{De même, } \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{16 - (1+5+2\sqrt{5})}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}. \text{ Comme } \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) > 0, \text{ je peux conclure que } \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

$$\text{Enfin, } \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 1}{2} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + 1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}. \text{ Comme } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0, \text{ je peux conclure que } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

formule d'angle double du cosinus

5. Soit M un point de l'axe des abscisses. Notons $(x, 0)$ ses coordonnées. Alors $\Omega M = \left|x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \left|x + \frac{1}{4}\right|$.

Donc, M est sur le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{4}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points d'intersection du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et de l'axe des abscisses.

6. Matériel : un compas et un règle non gradué.

- Préliminaire :

a) Pour tracer la médiatrice d'un segment $[A, B]$, on trace deux points qui sont à égale distance de A et de B : on point le compas en A avec un écart de AB et on trace deux arcs de part et d'autre du segment, ensuite on pointe le compas en B avec le même écart et on trace deux autres arcs de part et d'autre du segment ; ces deux arcs interceptent les deux autres arcs en deux points P et Q qui sont alors à égale distance de A et de B ; (PQ) est alors la médiatrice de $[A, B]$, la construction de la médiatrice s'achève alors par le tracé de la droite (PQ) .

b) Pour tracer une droite perpendiculaire à une droite D donnée en un point A de D donné, on trace la médiatrice de deux points de D dont le milieu est A : on point le compas en A , on choisit un écart (quelconque non nul) et on trace deux arcs de part et d'autre de A qui interceptent D en deux points U et V ; A est donc le milieu de $[U, V]$ et la perpendiculaire à D en A est alors la médiatrice de $[U, V]$ que l'on trace avec la méthode précédente.

- Cercle trigonométrique, unité et axes

- ✓ Traçons un cercle. On note O son centre et son rayon est l'unité. Ce cercle est alors le cercle trigonométrique.
- ✓ Traçons les axes : on trace une première droite passant par O qui sera l'axe des abscisses puis grâce au préliminaire, on trace la perpendiculaire à cet axe passant par O . On oriente alors ces deux axes pour créer un repère orthonormé direct. On note A et B les points d'intersection entre le cercle trigonométrique et l'axe réel, points d'abscisses respectivement positive et négative

- Le point Ω :

- ✓ on trace la médiatrice de $[O, B]$.
- ✓ on appelle I le point d'intersection entre la médiatrice de $[O, B]$ et le segment $[O, B]$; I est le milieu de $[O, B]$. Donc $IO = \frac{1}{2}$ et I a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
- ✓ On trace la médiatrice de $[O, I]$.
- ✓ Ω est le milieu de $[O, I]$, le point d'intersection entre la médiatrice de $[O, I]$ et le segment $[O, I]$. Donc $\Omega O = \frac{1}{4}$ et Ω a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

- Distance $\frac{\sqrt{5}}{4}$:

$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux cotés formant l'angle droit sont de longueur $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

On pointe le compas en O , on prend l'écart $OI = \frac{1}{2}$ et on trace un arc qui intercepte l'axe des ordonnées en un point H d'ordonnée positive. Alors H a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Le triangle ΩOH est donc rectangle en O et ses cotés adjacents à l'angle droit sont de longueurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Donc l'hypoténuse $[\Omega H]$ a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

- Valeurs $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$:

Je pointe le compas en Ω avec un écart $\Omega H = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Je trace le cercle. Les points d'intersection U et V de ce cercle avec l'axe des abscisses ont pour abscisses $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

- Sommets du pentagone.

Je trace les perpendiculaires D et D' à l'axe des abscisses aux points U et V . Ces deux droites interceptent le cercle trigonométrique : on note $\underline{M, K} \in D$ et $\underline{N, L} \in D'$.

Alors, le $AMNLK$ est un pentagone régulier.

