

CORRIGE DU TD

Forme algébrique, forme trigonométrique d'un nombre complexe. Géométrie avec les nombres complexes.

x et y désignent des réels, z un complexe, n un entier naturel et $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.

Soit z un nombre complexe et x un réel. Expliquer pourquoi ces nombres complexes sont réels ou imaginaires purs :

$$B = \frac{(z - \bar{z})}{(z^3 + \bar{z}^3)} \quad C = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 2} \quad D = \left(e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}\right)^2 \quad \text{et} \quad E = \frac{i}{e^{-ix} - e^{ix}}$$

$$B = \frac{z - \bar{z}}{z^3 + \bar{z}^3} = \frac{2i\operatorname{Im}(z)}{z^3 + \bar{z}^3} = \frac{2i\operatorname{Im}(z)}{2\operatorname{Re}(z^3)} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z^3)} i \in i\mathbb{R}.$$

$$D = \left(e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}\right)^2 = (e^{ix} + e^{-ix})^2 = (2\cos(x))^2 \in \mathbb{R}^+.$$

$$C = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 2} = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|^2 + 2} = \frac{2i\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2 + 2} = \frac{2i\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2 + 2} i \in i\mathbb{R}$$

$$E = \frac{i}{e^{-ix} - e^{ix}} = \frac{i}{2i\sin(-x)} = -\frac{1}{2\sin(x)} \in \mathbb{R}$$

Calculer les parties réelle et imaginaire, le module et un argument de chacun des complexes suivants et placer l'image ponctuelle de ce complexe dans le plan

- $\frac{(4i-3)}{(2-i)^3}$
- $\left(\frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}\right)^8$
- $(1-i)^2$
- $(1+i)^{1999}$
- $\frac{1}{1+i\tan(x)}$
- $\frac{1+ix}{1-ix}$
- $\frac{1+\cos x + i\sin x}{1-\cos x + i\sin x}$
- $\frac{1-\cos x + i\sin x}{e^{ix} - e^{iy}}$
- $i + 1 + \sqrt{2}e^{ix}$
- $1 + e^{ix} + e^{2ix}$
- $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}$
- $\left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{2ix}-e^{\frac{i\pi}{2}}}\right)^{2016}$

$$1. \quad z = \frac{(4i-3)}{(2-i)^3} = \frac{(4i-3)(2-i)^3}{|(2-i)^3|^2} = \frac{(4i-3)(2-i)^3}{(|2-i|^2)^3} = \frac{1}{5^3} (4i-3)(2^3 + 3 \cdot 2^2(-i) + 3 \cdot 2(-i)^2 + (-i)^3)$$

$$= \frac{1}{5^3} (4i-3)(8-12i-6+i) = \frac{1}{5^3} (4i-3)(2-11i) = \frac{1}{5^3} (41i+38). \text{ Donc, } \operatorname{Re}(z) = \frac{41}{5^3} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{38}{5^3}.$$

$$|z| = \frac{|4i-3|}{|2-i|^3} = \sqrt{\frac{25}{5^3}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \text{ Notons } \theta \text{ l'argument principal de } z. \text{ Alors } z = \sqrt{\frac{1}{5}} \left(\frac{\frac{\sqrt{5}}{5} \times 38 + \frac{\sqrt{5}}{5} \times 41i}{\cos(\theta)} \right). \text{ Donc, } \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \tan(\theta) = \frac{41}{38}.$$

$$\text{Ainsi, } \theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{41}{38}\right).$$

$$2. \quad z = \left(\frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^8 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}\right)^8 = \frac{1}{16}e^{i8\left(\frac{13\pi}{12}\right)} = \frac{1}{16}e^{i26\pi} = \frac{1}{16}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{-1}{32} + \frac{i\sqrt{3}}{32}.$$

$$\text{Ainsi, } \operatorname{Re}(z) = \frac{-1}{32}, \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{32}, |z| = \frac{1}{16} \text{ et } \arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

$$3. \quad z = (1-i)^2 = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}. \text{ Ainsi, } \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -2, |z| = 2 \text{ et } \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$4. \quad z = (1+i)^{1999} = \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^{1999} = \left[\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{1999} = \left[\sqrt{2}\right]^{1999} \left[e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{1999} = \sqrt{2} \left[\sqrt{2}\right]^{1998} e^{i(1999)\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot 2^{999} \cdot e^{i\left((2000)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \cdot 2^{999} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2^{999} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sqrt{2} \cdot 2^{999} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{999} - i2^{999}. \text{ Ainsi, } \operatorname{Re}(z) = 2^{999}, \operatorname{Im}(z) = -2^{999}, |z| = \sqrt{2} \cdot 2^{999} \text{ et } \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

$$5. \quad z = \frac{1}{1+i\tan(x)} = \frac{1}{1+\frac{i\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)+i\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{e^{ix}} = \cos(x) e^{-ix} = \cos(x) (\cos(x) - i\sin(x)) = \cos^2(x) - i\sin(x) \cos(x).$$

$$\text{Ainsi, } \operatorname{Re}(z) = \cos^2(x), \operatorname{Im}(z) = -\sin(x) \cos(x), |z| = |\cos(x)| \text{ et } \arg(z) \equiv \begin{cases} -x [2\pi] \text{ si } \cos(x) > 0 \\ \text{n'existe pas si } \cos(x) = 0 \\ -x + \pi [2\pi] \text{ si } \cos(x) < 0 \end{cases}$$

$$6. \quad z = \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2+2ix}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i \frac{2x}{1+x^2}. \text{ Donc, } \operatorname{Re}(z) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$\text{Posons } \theta = \operatorname{Arctan}(x). \text{ Alors } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x = \tan(\theta).$$

$$\text{Par suite, } z = \frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)} = \frac{1+\frac{i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-\frac{i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{1+\frac{i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-\frac{i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i\sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i2\theta} = e^{i2\operatorname{Arctan}(x)}. \text{ Donc, } |z| = 1 \text{ et } \arg(z) \equiv \operatorname{Arctan}(x) [2\pi]$$

$$7. \quad z = \frac{1+\cos x + i\sin x}{1-\cos x + i\sin x} = \frac{1+e^{ix}}{1-e^{ix}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{ix}}{i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)e^i = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + i\cotan\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x) - i\cotan\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x). \text{ Donc } \operatorname{Re}(z) = \cotan\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x) \text{ et } \operatorname{Im}(z) = -\cotan\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x).$$

$$\text{Et } |z| = \left|\cotan\left(\frac{x}{2}\right)\right|. \text{ Et } \arg(z) \equiv \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) [2\pi] \text{ si } \cotan\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \\ \text{n'existe pas si } \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ \left(x + \frac{\pi}{2}\right) [2\pi] \text{ si } \cotan\left(\frac{x}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$8. \quad e^{ix} - e^{iy} = e^{iy}(e^{i(x-y)} - 1) = e^{iy}\left(2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right) = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}. \text{ Donc, } \operatorname{Re}(z) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$$\text{Et } |z| = \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|. \text{ Et } \arg(z) \equiv \begin{cases} \frac{x+y+\pi}{2} [2\pi] \text{ si } \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) > 0 \\ \text{n'existe pas si } \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0 \\ \frac{x+y-\pi}{2} [2\pi] \text{ si } \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$9. \quad i + 1 + \sqrt{2}e^{ix} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2}e^{ix} = \sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{ix}\right) = \sqrt{2}e^{ix}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} + 1\right) = \sqrt{2}e^{ix}2\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}.$$

$$\text{Donc, } \operatorname{Re}(z) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right). \text{ Et } |z| = \left|2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)\right|. \text{ Et } \arg(z) \equiv \begin{cases} \frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} [2\pi] \text{ si } \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) > 0 \\ \text{n'existe pas si } \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = 0 \\ \frac{9\pi}{8} + \frac{x}{2} [2\pi] \text{ si } \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$10. \quad 1 + e^{ix} + e^{2ix} = 1 + e^{2ix} + e^{ix} = 2\cos(x)e^{ix} + e^{ix} = (2\cos(x) + 1)e^{ix}. \text{ Donc, } \operatorname{Re}(z) = (2\cos(x) + 1)\cos(x) \text{ et } \operatorname{Im}(z) = (2\cos(x) + 1)\sin(x). \text{ Et } |z| = \left|2\cos(x) + 1\right|. \text{ Et } \arg(z) \equiv \begin{cases} x \text{ si } 2\cos(x) + 1 > 0 \\ \text{n'existe pas si } 2\cos(x) + 1 = 0 \\ x + \pi \text{ si } 2\cos(x) + 1 < 0 \end{cases}$$

$$11. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^k = \begin{cases} n & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} & \text{si } e^{ix} \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} n & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{2i \sin(\frac{nx}{2}) e^{i\frac{nx}{2}}}{2i \sin(\frac{x}{2}) e^{i\frac{x}{2}}} & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases} = \begin{cases} n & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin(\frac{nx}{2}) e^{i\frac{(n-1)x}{2}}}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}.$$

$$\text{Donc, } \operatorname{Re}(z) = \begin{cases} n & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right) & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right) & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}.$$

$$\text{Et } |z| = \begin{cases} n & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \end{cases} \text{ et si } x \not\equiv 0[2\pi] \text{ alors } \arg(z) \equiv \begin{cases} n' \text{ existe pas si } \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = 0 \\ x/2 & \text{si } \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} > 0 \\ x + \pi & \text{si } \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} < 0 \end{cases} \text{ et si } x \equiv 0[2\pi] \text{ alors } \arg(z) \equiv 0[2\pi] \text{ car } n \neq 0.$$

$$12. \left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{izx}-e^{\frac{x}{2}}}\right)^{2016} = \left(\frac{2(e^{ix}-1)}{e^{izx}-e^{\frac{x}{2}}}\right)^{2016} = \left(\frac{4i \sin(\frac{x}{2}) e^{i\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{ix}{2}}-1)}\right)^{2016} = \left(\frac{4i \sin(\frac{x}{2})}{2i \sin(\frac{3x}{4}) e^{i\frac{3x}{4}}}\right)^{2016} = \left(2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{3x}{4})} e^{-i\frac{3x}{4}}\right)^{2016} = \left(2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{3x}{4})}\right)^{2016} e^{-i\frac{3(2016)}{4}x} = \left(2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{3x}{4})}\right)^{2016} e^{-i162x}. \text{ Donc, } \operatorname{Re}(z) = \left(2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{3x}{4})}\right)^{2016} \cos(162x) \text{ et } \operatorname{Im}(z) = -\left(2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{3x}{4})}\right)^{2016} \sin(162x). \text{ Et } |z| = \left(2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{3x}{4})}\right)^{2016} \text{ et } \arg(z) \equiv \begin{cases} -162x & \text{si } \sin(\frac{x}{2}) \neq 0 \\ n' \text{ existe pas si } \sin(\frac{x}{2}) = 0 \end{cases}$$

Déterminer tous les complexes z tels que :

$$1) \quad 3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 0.$$

$$2) \quad z^5 \bar{z} = 1$$

$$3) \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0.$$

$$4) \quad |z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|.$$

$$1) \quad 3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + (iy)^2 + 2ixy) - 5(x^2 + y^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - y^2 + 2ixy) - 5(x^2 + y^2) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 2x^2 - 8y^2 + 2i6(xy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy = 0 \\ 2 - 2x^2 - 8y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \left\{1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\right\}.$$

$$2) \quad \text{Si } z^5 \bar{z} = 1 \text{ alors } z \neq 0. \text{ Désormais } z \neq 0. \text{ Posons } z = re^{ia}.$$

$$\text{Alors, } z^5 \bar{z} = 1 \Leftrightarrow (re^{ia})^5 (\overline{re^{ia}}) = 1 \Leftrightarrow r^5 e^{i5a} r e^{-ia} = 1 \Leftrightarrow r^6 e^{i4a} = 1 e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/4a = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/a = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/z = e^{i\frac{k\pi}{2}}.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \{1, -1, i, -i\}.$$

$$3) \quad z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow z = j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}. \text{ Désormais } z \in \mathbb{C} \setminus \{j; j^2\}.$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z^2+z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z = \overline{z^2 + z} \Leftrightarrow z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z} \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + (z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + (z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})[(z + \bar{z}) + 1] = 0 \Leftrightarrow (z = \bar{z} \text{ ou } z + \bar{z} = -1) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2\operatorname{Re}(z) = -1) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}).$$

$$\text{Ainsi, } \text{Sol} = \mathbb{R} \cup \left\{-\frac{1}{2} + ix/x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}.$$

$$4) \text{ Soit } z \text{ un complexe non nul.}$$

$$|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = |1-z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ OM = AM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ M \in \text{med}[0, A] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in C(O, 1) \\ M \in \text{med}[0, A] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{Im}^2(z) + \operatorname{Re}^2(z) = 1 \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(z)^2 = \frac{3}{4} \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(z) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Ainsi, } \text{Sol} = \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}; e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}.$$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que : $ad - bc > 0$ et $cz + d \neq 0$. Montrer que : $\operatorname{Im}(z) > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$.

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + (ad+bc)\operatorname{Re}(z) + bd}{|cz+d|^2} + i \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}. \text{ Comme } ad - bc > 0 \text{ et } |cz+d|^2 > 0, \operatorname{Im}(z) > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0.$$

Soient $(u, v, w) \in U^3$.

$$1. \quad \text{Montrer que : } |u + v + w| = |uv + vw + wu|.$$

$$2. \quad \text{Montrer que : pour tout complexe } z \text{ non nul, } \left|u - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{|u-z|}{|z|}.$$

$$3. \quad \text{On suppose, ici, que : } 1 + uv \neq 0. \text{ Montrer que : } \frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}.$$

$$4. \quad \text{On suppose, ici, que : } u \neq 1. \text{ Montrer que } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$5. \quad \text{On suppose, encore, que : } u \neq 1. \text{ Pour quelles valeurs de l'entier naturel } n, \text{ le complexe } \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n \text{ est-il réel ?}$$

Comme u, v et w sont de module 1, nous pouvons poser $u = e^{ia}, v = e^{ib}$ et $w = e^{ic}$ tels que a, b et c réels.

$$1. \quad \text{Alors, } |u + v + w|^2 = (u + v + w)(\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}) = (u + v + w)(\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}) = (e^{ia} + e^{ib} + e^{ic})(e^{-ia} + e^{-ib} + e^{-ic}) \\ = 1 + e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} + 1 + e^{i(b-c)} + e^{i(c-b)} + 1 + e^{i(c-a)} + e^{i(a-c)} \\ = 3 + 2\cos(a-b) + 2\cos(a-c) + 2\cos(b-c).$$

$$\text{Ainsi, comme } u, v \text{ et } w \text{ sont des complexes de modules 1 quelconques, on a prouvé que pour tous réels } A, B \text{ et } C, |e^{iA} + e^{iB} + e^{iC}|^2 = 3 + 2[\cos(A-B) + \cos(A-C) + \cos(B-C)]$$

$$|uv + vw + wu|^2 = |e^{i(a+b)} + e^{i(c+b)} + e^{i(a+c)}|^2$$

en appliquant le résultat

$$\text{précédent à } A=a+b, \\ B=b+c \text{ et } C=c+a$$

$$\stackrel{\text{car } \forall t \in \mathbb{R}, \cos(t) = \cos(-t)}{=} 3 + 2[\cos((a+b) - (c+a)) + \cos((a+b) - (c+a)) + \cos((b+c) - (c+a))] \\ = 3 + 2[\cos(a-c) + \cos(b-c) + \cos(b-a)] = 3 + 2[\cos(a-c) + \cos(b-c) + \cos(a-b)] = |u + v + w|^2.$$

Comme les deux réels $|u + v + w|$ et $|uv + vw + wu|$ sont positifs et ont le même carré, je peux conclure que $|uv + vw + wu| = |u + v + w|$.

OU BIEN

car u, v et w sont de module 1.

Donc $u = e^{ia}$ et $\bar{u} = e^{-ia} = \frac{1}{e^{ia}} = \frac{1}{u}$

$$\begin{aligned} |u + v + w| &= |\overline{u + v + w}| = |\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}| \stackrel{\text{car } u, v, w \text{ de module 1}}{=} \left| \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right| \\ &= \left| \frac{vw + uw + uv}{uvw} \right| \stackrel{\text{propriété du module}}{=} \frac{|vw + uw + uv|}{|uvw|} \\ &\stackrel{\text{propriété du module}}{=} \frac{|vw + uw + uv|}{|u||v||w|} \stackrel{\text{car } u, v, w \text{ de module 1}}{=} \frac{|vw + uw + uv|}{1} = |vw + uw + uv| \end{aligned}$$

2. Soit z un complexe non nul. Alors $\bar{z} \neq 0$ et $|z| \neq 0$.

$$\left| u - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{uz - 1}{z} \right| \stackrel{\text{car } |u|=1}{=} \frac{|uz - 1|}{|z|} \stackrel{\text{car } |u|=1}{=} \frac{|u(\bar{z} - \frac{1}{u})|}{|z|} \stackrel{\text{car } |u|=1}{=} \frac{|\bar{z} - \frac{1}{u}|}{|z|} \stackrel{\text{car } |u|=1}{=} \frac{|\bar{z} - \bar{u}|}{|z|} \stackrel{\text{car } |w|=|\bar{w}|}{=} \frac{|z - u|}{|z|} \stackrel{\text{car } |w|=|\bar{w}|}{=} \frac{|z - u|}{|z|} \stackrel{\text{car } |w|=|\bar{w}|}{=} \frac{|u - z|}{|z|}.$$

3. On suppose que $1 + uv \neq 0$. Alors, $\frac{u+v}{1+uv} = \frac{e^{ia} + e^{ib}}{1 + e^{i(a+b)}} = \frac{e^{ia}(1 + e^{i(b-a)})}{1 + e^{i(a+b)}} = \frac{e^{ia} 2 \cos(\frac{b-a}{2}) e^{i\frac{b-a}{2}}}{2 \cos(\frac{a+b}{2}) e^{i\frac{a+b}{2}}} = \frac{\cos(\frac{a-b}{2})}{\cos(\frac{a+b}{2})} e^{i[a + (\frac{b-a}{2}) - (\frac{a+b}{2})]} = \frac{\cos(\frac{a-b}{2})}{\cos(\frac{a+b}{2})} e^{i0} = \frac{\cos(\frac{a-b}{2})}{\cos(\frac{a+b}{2})} \in \mathbb{R}.$

4. On suppose, ici, que: $u \neq 1$.

$$\text{Alors } \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-e^{ia}} = \frac{1}{-2i \sin(\frac{a}{2}) e^{i\frac{a}{2}}} = \frac{-1}{2i \sin(\frac{a}{2}) e^{i\frac{a}{2}}} = \frac{-e^{-i(\frac{a}{2})}}{2i \sin(\frac{a}{2})} = \frac{-1}{2i \sin(\frac{a}{2})} \left(\cos\left(-\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{-1}{2i \sin(\frac{a}{2})} \left(-\sin\left(\frac{a}{2}\right) - i \cos\left(\frac{a}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cotan\left(\frac{a}{2}\right).$$

$$\text{Ainsi, } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$$

$$5. \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n = \left(\frac{e^{ia}+1}{e^{ia}-1}\right)^n = \left(\frac{2 \cos(\frac{a}{2}) e^{i\frac{a}{2}}}{2i \sin(\frac{a}{2}) e^{i\frac{a}{2}}}\right)^n = \left(\frac{\cos(\frac{a}{2})}{i \sin(\frac{a}{2})}\right)^n = \left(-\frac{\cos(\frac{a}{2})}{\sin(\frac{a}{2})} i\right)^n = \left(-\frac{\cos(\frac{a}{2})}{\sin(\frac{a}{2})}\right)^n i^n = \left(-\cotan\left(\frac{a}{2}\right)\right)^n i^n.$$

Ou bien $\cotan\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ i.e. $\exists k \in \mathbb{Z} / \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i.e. $\exists k \in \mathbb{Z} / a = \pi + 2k\pi$ i.e. $u = -1$ alors $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n = 0 \in \mathbb{R}.$

Ou bien $\cotan\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0$ i.e. $u \neq -1$ alors $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \text{ pair}.$

Montrer que $f: (z \mapsto |1 + iz|^2 + |z + i|^2)$ est constante sur U .

version géométrique

Soit $z \in U$. On note M le point d'affixe z . Alors M est sur le cercle trigonométrique.

On note A le point d'affixe i est B celui d'affixe $-i$. Alors $[A, B]$ est un diamètre du cercle trigonométrique.

Par conséquent, $(MA) \perp (MB)$.

$$f(z) = |1 + iz|^2 + |z + i|^2 = |i(-i + z)|^2 + |z + i|^2 = |i|^2 |-i + z|^2 + |z + i|^2$$

Pythagore
dans ABM
rectangle en M

$$f(z) = |z - i|^2 + |z + i|^2 = MA^2 + MB^2 \stackrel{\text{Pythagore}}{=} AB^2 = 4. \text{ Donc } f \text{ est constante égale à 4 sur } U.$$

OU BIEN (en version algébrique)

Soit $z \in U$. Alors il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.

Par conséquent, $f(z) = |1 + ie^{i\theta}|^2 + |e^{i\theta} + i|^2$

$$\begin{aligned} &= \left| 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} \right|^2 + \left| e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} \right|^2 \\ &= \left| 1 + e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)} \right|^2 + \left| e^{i\theta} (1 + e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}) \right|^2 \\ &= \left| 2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) e^{i\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \theta)} \right|^2 + \left| e^{i\theta} 2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) e^{i\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta)} \right|^2 \\ &= \left| 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} \right|^2 + \left| 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} \right|^2 \\ &= 4 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 + 4 \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right|^2 \\ &= 4 \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &\stackrel{\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2} - t)}{=} 4 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &\stackrel{\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1}{=} 4 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \right] = 4. \end{aligned}$$

Montrer que pour tous complexes z et w ,

- $1 \leq |1 + z| + |z|.$
- $|z| + |w| + |z + w| \leq |2z| + |2w|$
- $|z| \leq |z|^2 + |1 - z|$
- $1 + |zw - 1| \leq (1 + |z - 1|) + (1 + |w - 1|).$
- $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$

$$1. \quad 1 = |1| = |(1 + z) - z| \stackrel{1^{\text{ère}} \text{ I.T}}{\leq} |1 + z| + |z|.$$

$$2. \quad |z + w| \leq |z| + |w|. \text{ Donc } |z| + |w| + |z + w| \leq 2(|z| + |w|) = 2|z| + 2|w| \stackrel{\text{car } 2 \in \mathbb{R}^+}{=} |2z| + |2w|.$$

3. Posons $t = z - 1$ et $s = w - 1$. Alors,

$$1 + |zw - 1| = 1 + |(t + 1)(s + 1) - 1| = 1 + |s + t + st| \leq 1 + |s| + |t| + |st| = 1 + |s| + |t| + |s||t| = (1 + |s|)(1 + |t|) = (1 + |z - 1|) + (1 + |w - 1|).$$

4. 1^{er} cas $|z| \geq 1$. Alors $|z|^2 \geq |z|$ donc $|z|^2 + |1 - z| \geq |z|$ car $|1 - z| \geq 0$.

2^{ème} cas $|z| < 1$. Alors $0 < 1 - |z| = |1| - |z| \stackrel{2^{\text{ème}} \text{ I.T}}{\leq} |1 - z|$ donc $|z|(1 - |z|) \leq |z||1 - z| \stackrel{\text{car } |z| \leq 1}{\leq} |1 - z|$ et par conséquent, $|z| - |z|^2 \leq |1 - z|$. J'en conclus

$$\text{que } |z| \leq |z|^2 + |1 - z|.$$

$$5. \quad |z + w|^2 + |z - w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = 2z\bar{z} + 2w\bar{w} = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$

$$\text{Comme } |z| \neq 1, z \neq 1. \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| = \left| \frac{(1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^n)}{1 - z} \right| = \left| \sum_{k=0}^n z^k \right| \stackrel{1^{\text{ère}} \text{ I.T}}{\leq} \sum_{k=0}^n |z^k| = \sum_{k=0}^n |z|^k \stackrel{\text{car } |z| \neq 1}{=} \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Soit a et b deux complexes de module strictement inférieur à 1. Montrer que: $\left| \frac{a-b}{1-ab} \right| < 1.$

Tout d'abord, $|1 - \bar{a}b| \geq ||1| - |\bar{a}b|| = ||1| - |\bar{a}||b|| = |1 - |a||b||$. Or, $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Donc, $|a||b| < 1$ et ainsi $|1 - |a||b|| > 0$ et par suite $|1 - \bar{a}b| > 0$.

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} < 1 \stackrel{\text{car } |1-\bar{a}b| > 0}{\Leftrightarrow} |a-b| < |1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a-b| < |1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2.$$

$$\text{Or, } |1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 - \bar{a}b)(1 - \bar{a}\bar{b}) - (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = (1 - \bar{a}b)(1 - \bar{a}\bar{b}) - (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = 1 + a\bar{a}b\bar{b} - a\bar{a} - b\bar{b} \\ = 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |b|^2) \stackrel{\substack{\text{car } |a| < 1 \text{ donc } |a|^2 < 1 \\ \text{idem pour } b}}{\geq} 0.$$

J'en déduis que $|a - b|^2 < |1 - \bar{a}b|^2$ et par conséquent, l'inégalité $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$ qui lui est équivalente est vraie aussi.

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que : $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$.

$$\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \overline{\left(\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \right)} \Leftrightarrow \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \frac{\bar{z} - u\bar{u}z}{1 - \bar{u}} \Leftrightarrow (z - u\bar{z})(1 - \bar{u}) = (1 - u)(\bar{z} - u\bar{u}z) \Leftrightarrow z - z\bar{u} - u\bar{z} + u\bar{u}\bar{z} = \bar{z} - \bar{u}z - u\bar{z} + u\bar{u}z$$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} - |u|^2(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(1 - |u|^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z = \bar{z}}_{\substack{\text{impossible} \\ \text{car } z \notin \mathbb{R}}} \text{ ou } |u|^2 = 1 \Leftrightarrow |u| = 1 \Leftrightarrow \boxed{|u| = 1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que les racines complexes de $P(z) = z^n - z - 1$ sont de module strictement compris entre 0 et 2.

Soit z une racine complexe de P . Alors $P(z) = z^n - z - 1 = 0$. Donc $z^n = z + 1$ et par conséquent, $|z|^n = |z + 1| \leq |z| + 1$.

Soit $\varphi : (t \mapsto t^n - t - 1)$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \geq 0, \varphi'(t) = nt^{n-1} - 1$. Donc $\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow nt^{n-1} \geq 1 \Leftrightarrow t^{n-1} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow t \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

t	0	$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$	2	$+\infty$
$\varphi'(t)$		-	+	
$\varphi(t)$				

$2 > 1 > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ Donc φ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

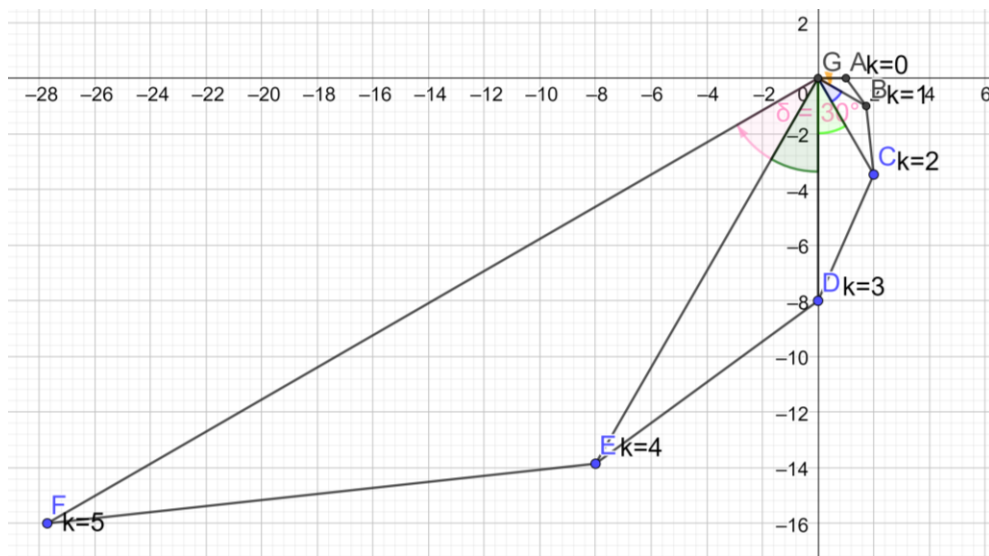
Comme $\varphi(2) > 0, \forall t \geq 2, \varphi(t) > 0$.

Alors par contraposée, puisque $\varphi(|z|) \leq 0$, nécessairement $|z| < 2$.

Déterminer les entiers n tels que : $(\sqrt{3} - i)^n$ soit réel. Représenter les points d'affixe $z_k = (\sqrt{3} - i)^k$ tq $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

$$(\sqrt{3} - i)^n = \left(2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right)^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{Donc, } (\sqrt{3} - i)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \arg((\sqrt{3} - i)^n) = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / -n\frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / n = -6k \Leftrightarrow \boxed{n \text{ est un multiple de } 6}.$$



Déterminer une fonction polynômiale P tel que : pour tout réel x , $\sin(7x) = P(\sin(x))$.

$$\sin(7x) = \text{Im}(e^{i7x}) = \text{Im}((e^{ix})^7) = \text{Im}((\cos(x) + i\sin(x))^7).$$

$$\text{Or, } (\cos(x) + i\sin(x))^7 \stackrel{\text{FBN}}{=} (\cos(x))^7 + 7(\cos(x))^6(i\sin(x)) + 21(\cos(x))^5(i\sin(x))^2 + 35(\cos(x))^4(i\sin(x))^3 + 35(\cos(x))^3(i\sin(x))^4 + 21(\cos(x))^2(i\sin(x))^5 + 7(\cos(x))(i\sin(x))^6 + (i\sin(x))^7.$$

$$(\cos(x) + i\sin(x))^7 = \left[(\cos(x))^7 - 21(\cos(x))^5(\sin(x))^2 + 35(\cos(x))^3(\sin(x))^4 - 7(\cos(x))(\sin(x))^6 \right] + i \left[7(\cos(x))^6(\sin(x)) - 35(\cos(x))^4(\sin(x))^3 + 21(\cos(x))^2(\sin(x))^5 - (\sin(x))^7 \right].$$

$$\text{Donc, } \sin(7x) = 7(\cos(x))^6(\sin(x)) - 35(\cos(x))^4(\sin(x))^3 + 21(\cos(x))^2(\sin(x))^5 - (\sin(x))^7 \\ = 7(\cos^2(x))^3(\sin(x)) - 35(\cos^2(x))^2(\sin(x))^3 + 21(\cos(x))^2(\sin(x))^5 - (\sin(x))^7 \\ = 7(1 - \sin^2(x))^3(\sin(x)) - 35(1 - \sin^2(x))^2(\sin(x))^3 + 21(1 - \sin^2(x))(\sin(x))^5 - (\sin(x))^7 \\ = 7[1 - 3\sin^2(x) + 3\sin^4(x) - \sin^6(x)]\sin(x) - 35[1 - 2\sin^2(x) + \sin^4(x)]\sin^3(x) + 21[1 - \sin^2(x)]\sin^5(x) - \sin^7(x) \\ = 7(\sin(x) - 3\sin^3(x) + 3\sin^5(x) - \sin^7(x)) - 35(\sin^3(x) - 2\sin^5(x) + \sin^7(x)) + 21(\sin^5(x) - \sin^7(x)) - \sin^7(x). \\ \text{Ainsi, } \sin(7x) = 7\sin(x) - 56\sin^3(x) + 112\sin^5(x) - 64\sin^7(x) = P(\sin(x)) \text{ où } P(t) = -64t^7 + 112t^5 - 56t^3 + 7t.$$

Retrouver la relation entre $\cos(3t), \cos^3(t)$ et $\cos(t)$.

$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3t} + 3e^{-it}e^{2it} + 3e^{it}e^{-2it} + e^{-3it}) = \frac{1}{8} (e^{i3t} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) = \frac{1}{8} (2\cos(3t) + 6\cos(t)) = \frac{1}{4} (\cos(3t) + 3\cos(t))$$

$$\text{Calculer } I = \int_0^{\pi} \cos(3t) \sin^5(2t) dt.$$

$$\begin{aligned}\cos(3t) \sin^5(2t) &\stackrel{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} \right) \left(\frac{e^{i2t} - e^{-i2t}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{2(2i)^5} (e^{i3t} + e^{-i3t})(e^{i2t} - e^{-i2t})^5 \\ &\stackrel{\text{FBN}}{=} \frac{1}{2^6 i^5} (e^{i3t} + e^{-i3t}) [(e^{i2t})^5 + 5(e^{i2t})^4(-e^{-i2t})^1 + 10(e^{i2t})^3(-e^{-i2t})^2 + 10(e^{i2t})^2(-e^{-i2t})^3 + 5(e^{i2t})^1(-e^{-i2t})^4 + (-e^{-i2t})^5] \\ &= \frac{1}{2^6 i} (e^{i3t} + e^{-i3t})(e^{i10t} - 5e^{i6t} + 10e^{i2t} - 10e^{-i2t} + 5e^{-i6t} - e^{-i10t}) \\ &= \frac{1}{2^6 i} (e^{i13t} - 5e^{i9t} + 10e^{i5t} - 10e^{it} + 5e^{-i3t} - e^{-i7t} + e^{i7t} - 5e^{i3t} + 10e^{-it} - 10e^{-i5t} + 5e^{-i9t} - e^{-i13t}) \\ &= \frac{1}{2^6 i} (e^{i13t} - 5e^{i9t} + 10e^{i5t} - 10e^{it} + 5e^{-i3t} - e^{-i7t} + e^{i7t} - 5e^{i3t} + 10e^{-it} - 10e^{-i5t} + 5e^{-i9t} - e^{-i13t}) \\ &\stackrel{\text{Euler}}{=} \frac{1}{2^6 i} [2i \sin(13t) - 10i \sin(9t) + 20i \sin(5t) - 10i \sin(3t) - 20i \sin(t) + 2i \sin(7t)] \\ &= \frac{1}{2^5} [\sin(13t) - 5 \sin(9t) + 10 \sin(5t) - 5 \sin(3t) - 10 \sin(t) + \sin(7t)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc, } I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2^5} [\sin(13t) - 5 \sin(9t) + 10 \sin(5t) - 5 \sin(3t) - 10 \sin(t) + \sin(7t)] dt \\ I &= \frac{1}{2^5} \left[-\frac{1}{13} \cos(13t) + \frac{5}{9} \cos(9t) - 2 \cos(5t) + \frac{5}{3} \cos(3t) + 10 \cos(t) - \frac{1}{7} \cos(7t) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ I &= \frac{1}{2^5} \left[-\frac{1}{13} \cos\left(13 \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{9} \cos\left(9 \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(5 \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{3} \cos\left(3 \frac{\pi}{3}\right) + 10 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7 \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{13} + \frac{5}{9} - 2 + \frac{5}{3} + 10 - \frac{1}{7}\right) \right] \\ I &= \frac{1}{2^5} \left[-\frac{1}{13} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5}{9} - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5}{3} + 10 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{13} + \frac{5}{9} + \frac{5}{3} + 8 - \frac{1}{7}\right) \right] \\ I &= \frac{1}{2^5} \left[\left(-\frac{1}{13} - \frac{1}{7} + 8\right) \frac{1}{2} - \frac{5}{9} - \frac{5}{3} + \left(\frac{1}{13} - \frac{5}{9} - \frac{5}{3} - 8 + \frac{1}{7}\right) \right] = \frac{1}{2^5} \left[\frac{1}{26} - 4 + \frac{1}{14} - \frac{40}{9} \right] = -\frac{3413}{13104}\end{aligned}$$

Soit x et y des réels, n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

- $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.
- $R_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx + y)$.
- $S = \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$.
- $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}$.
- $X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.

- $V_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kx)$.
- $S_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$.
- $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^3(kx)$.
- $W_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin^2(kx)$.

$$1. \quad S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \sum_{k=1}^n \text{Im}\left(e^{i\frac{k}{n}\pi}\right) = \text{Im}\left[\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k\right]. \text{ Or, } \sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \begin{cases} n \text{ si } e^{i\frac{\pi}{n}} = 1 \\ \frac{(e^{i\frac{\pi}{n}})^n - 1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1} e^{i\frac{\pi}{n}} \text{ si } e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1 \end{cases} \text{ Or, } \frac{\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \pi \equiv 0[2n\pi].$$

$$\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \frac{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{\pi}{2n}} - 1} e^{i\frac{\pi}{n}} = \frac{-2}{2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right) + i \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) + i \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -1 + i \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right). \text{ Ainsi, } S_n = \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \right]. \text{ Comme } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \text{ je peux conclure, en composant, que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1 \text{ et par suite}$$

$$2. \quad R_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx + y) = \sum_{k=1}^n \text{Im}(e^{i(kx+y)}) = \text{Im}\left(\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)}\right). \text{ Or, } \sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = \sum_{k=1}^n e^{ikx} e^{iy} = e^{iy} \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{iy} \times \begin{cases} \frac{(e^{ix})^n - 1}{e^{ix} - 1} e^{ix} \text{ si } e^{ix} \neq 1 \\ n \text{ si } e^{ix} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Or, } e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi.$$

$$\text{1er cas : } \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq 2k\pi. \sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = e^{iy} \frac{(e^{ix})^n - 1}{e^{ix} - 1} e^{ix} = \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} e^{i(x+y)} = \frac{2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}} e^{i(x+y)} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\left(\frac{nx}{2} \cdot \frac{x}{2} + x + y\right)} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\left(\frac{(n+1)}{2}x + y\right)}.$$

$$\text{Donc, } R_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\left(\frac{n+1}{2}x + y\right)\right).$$

$$\text{2ème cas : } \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi. \sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = ne^{iy}. \text{ Donc, } R_n = n \cos(y).$$

$$3. \quad S = \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \sum_{k=1}^4 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right) = \sum_{k=1}^4 \text{Re}\left(e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}}\right) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^4 e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}}\right).$$

$$\text{Et } \sum_{k=1}^4 e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}} = e^{i\frac{\pi}{11}} \sum_{k=1}^4 \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^k = e^{i\frac{\pi}{11}} \frac{(e^{i\frac{2\pi}{11}})^5 - 1}{e^{i\frac{2\pi}{11}} - 1} = \frac{(e^{i\frac{10\pi}{11}} - 1)}{e^{i\frac{2\pi}{11}} - 1} e^{i\frac{\pi}{11}} = \frac{2i \sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) (e^{i\frac{4\pi}{11}})}{2i \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) (e^{i\frac{\pi}{11}})} e^{i\frac{\pi}{11}} = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} e^{i\frac{6\pi}{11}}. \text{ Donc, } S = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \cos\left(\frac{6\pi}{11}\right).$$

$$4. \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) \stackrel{\text{je linéarise}}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [1 - \cos(2kx)] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) \stackrel{\text{avec } \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)}{=} \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right).$$

$$\text{Or, } \sum_{k=0}^n e^{2ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{2ix})^k = \begin{cases} \frac{(e^{2ix})^{n+1} - 1}{e^{2ix} - 1} \text{ si } e^{2ix} \neq 1 \\ n + 1 \text{ si } e^{2ix} = 1 \end{cases} \text{ De plus, } e^{2ix} = 1 \Leftrightarrow 2x \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi].$$

$$\text{Si } x \equiv 0[\pi] \text{ alors } \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) = n + 1 \text{ et } S_n = 0.$$

$$\text{Si } x \not\equiv 0[\pi] \text{ alors } \sum_{k=0}^n e^{2ikx} = \frac{(e^{2ix})^{n+1} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{2i \sin((n+1)x) e^{i(n+1)x}}{2i \sin(x) e^{ix}} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{i((n+1)x-x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{inx} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} [\cos(nx) + i \sin(nx)].$$

$$\text{Donc, } \text{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx). \text{ Alors } S_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx).$$

$$5. \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^3(kx).$$

Linéarisons $\cos^3(kx)$

$$\cos(3kx) \stackrel{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right)^3 \stackrel{\text{FBN}}{=} \frac{1}{8} ((e^{ikx})^3 + 3(e^{ikx})^2 e^{-ikx} + 3e^{ikx} (e^{-ikx})^2 + (e^{-ikx})^3) = \frac{1}{8} (e^{i3kx} + 3e^{ikx} + 3e^{-ikx} + e^{-i3kx}) = \frac{1}{8} (2 \cos(3kx) + 6 \cos(kx))$$

$$\cos(3kx) = \frac{1}{4} (\cos(3kx) + 3 \cos(kx)).$$

$$\text{Donc, } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4} (\cos(3kx) + 3 \cos(kx)) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(3kx) + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx).$$

$$\text{Calculons plus généralement } S(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) :$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \operatorname{Re}[\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}] \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta})^k = \begin{cases} \frac{(e^{i\theta})^n - 1}{e^{i\theta} - 1} & \text{si } e^{i\theta} \neq 1. \text{ Or, } e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\theta = 2k\pi \\ n & \text{si } e^{i\theta} = 1 \end{cases}$$

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}/\theta = 2k\pi$. Alors, $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) = n$

2^{ème} cas : $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta \neq 2k\pi$. Alors, $\frac{(e^{i\theta})^n - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{2i \sin(\frac{n\theta}{2}) e^{\frac{in\theta}{2}}}{2i \sin(\frac{\theta}{2}) e^{\frac{i\theta}{2}}} = \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}$; donc $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) = \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos(\frac{(n-1)\theta}{2})$.

Retour à T_n :

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}/x = 2k\pi$. Alors $3x = 2k\pi$ donc $T_n = \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n = n$.

2^{ème} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}/3x = 2k\pi$ et $\forall p \in \mathbb{Z}/x \neq 2p\pi$. Alors $T_n = \frac{1}{4}n + \frac{3}{4} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \cos(\frac{(n-1)x}{2})$.

3^{ème} cas : $\forall p \in \mathbb{Z}/3x \neq 2k\pi$ et $x \neq 2p\pi$. Alors $T_n = \frac{1}{4} \frac{\sin(\frac{3nx}{2})}{\sin(\frac{3x}{2})} \cos(\frac{3(n-1)x}{2}) + \frac{3}{4} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \cos(\frac{(n-1)x}{2})$.

si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$,
alors
 $\operatorname{Re}(az) = \alpha \operatorname{Re}(z)$
et $\operatorname{Im}(az) = \alpha \operatorname{Im}(z)$.

6. $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Im}(e^{ikx})}{\cos^k(x)} \stackrel{\text{car } \frac{1}{\cos^k(x)} \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right)$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k = \begin{cases} \frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} & \text{si } \frac{e^{ix}}{\cos(x)} \neq 1 \\ n & \text{si } \frac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1 \end{cases} \text{ Or } \frac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1 \Leftrightarrow e^{ix} = \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x) + i\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = k\pi.$$

1^{er} cas : $\forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi$.

$$\frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} = \frac{e^{inx} - (\cos(x))^n}{e^{ix} - \cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)^{n-1}} \frac{\cos(nx) - (\cos(x))^n + i\sin(nx)}{\cos(x) + i\sin(x) - \cos(x)} = \frac{1}{(\cos(x))^{n-1}} \frac{\cos(nx) - (\cos(x))^n + i\sin(nx)}{i\sin(x)}$$

$$\frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1} \stackrel{\text{car } \frac{1}{i} = -i}{=} \frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}} (-i)[\cos(nx) - (\cos(x))^n + i\sin(nx)] = \frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}} [\sin(nx) - i(\cos(nx) - (\cos(x))^n)]. \text{ Donc, } U_n = \frac{\cos(nx) - (\cos(x))^n}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}}.$$

2^{ème} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi$. $U_n = \operatorname{Im}(n) = 0$.

7. $X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) \stackrel{\text{car } \frac{1}{2^{k+1}} \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2^{k+1}} e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)$.

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} e^{i\frac{k\pi}{3}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n - 1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} - 1} \right] = \frac{1}{2^n} \frac{(e^{i\frac{\pi}{3}})^n - 2^{n-1}}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 2} = \frac{1}{2^n} \frac{(e^{i\frac{\pi}{3}})^n - 2^{n-1}}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 2}$$

$$\stackrel{\text{car } \frac{1}{2} = e^{-i\frac{\pi}{2}}}{=} \frac{1}{2^n} \frac{(e^{i\frac{\pi}{3}})^n - 2^{n-1}}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 2} = \frac{1}{3 \times 2^n} [e^{i(n-1)\frac{\pi}{3}} - 2e^{in\frac{\pi}{3}} - 2^{n-1} + 2^n e^{i\frac{\pi}{3}}].$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $X_n = \frac{1}{3 \times 2^n} \left[\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{3 \times 2^n} \left[\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + 2^{n-1}\sqrt{3} \right]$.

Vérification : $X_2 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$ et $\frac{1}{3 \times 2^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3} \right] = \frac{1}{3 \times 4} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \right] = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Ok !!

$X_3 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2^3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ et $\frac{1}{3 \times 2^3} \left[\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right) + 2^2\sqrt{3} \right] = \frac{1}{3 \times 8} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \right] = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. Ok !!

8. $V_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Re}(e^{i2kx}) \stackrel{\text{car } \binom{n}{k} \in \mathbb{R}}{=} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}\left(\binom{n}{k} e^{i2kx}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i2kx}\right)$.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i2kx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i2x})^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i2x})^k 1^{n-k} \stackrel{\text{FBN}}{=} (1 + e^{i2x})^n = (2\cos(x) e^{ix})^n = 2^n \cos(x)^n e^{inx}. \text{ Donc, } V_n = 2^n \cos(x)^n \cos(nx).$$

9. $S_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) \stackrel{\text{je linéarise } \sin^2(kx) \text{ avec } \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [1 - \cos(2kx)] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{i2kx}\right)$.

Or, $\sum_{k=0}^n e^{i2kx} = \sum_{k=0}^n (e^{i2x})^k = \begin{cases} \frac{(e^{i2x})^{n+1} - 1}{e^{i2x} - 1} & \text{si } e^{i2x} \neq 1 \\ n+1 & \text{si } e^{i2x} = 1 \end{cases}$. De plus, $e^{i2x} = 1 \Leftrightarrow 2x \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$.

Si $x \equiv 0[\pi]$ alors $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{i2kx}\right) = n+1$ et $S_n = 0$.

Si $x \not\equiv 0[\pi]$ alors $\sum_{k=0}^n e^{i2kx} = \frac{(e^{i2x})^{n+1} - 1}{e^{i2x} - 1} = \frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{i2x} - 1} = \frac{2i \sin((n+1)x) e^{i(n+1)x}}{2i \sin(x) e^{ix}} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{i((n+1)x-x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{inx} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} [\cos(nx) + i\sin(nx)]$.

Donc, $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{i2kx}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx)$. Alors $S_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx)$.

10. $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^3(kx)$. • **Linéarisons $\cos^3(kx)$:**

$$\cos^3(kx) \stackrel{\text{Euler}}{=} \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right)^3 \stackrel{\text{FBN}}{=} \frac{1}{8} ((e^{ikx})^3 + 3(e^{ikx})^2 e^{-ikx} + 3e^{ikx} (e^{-ikx})^2 + (e^{-ikx})^3) = \frac{1}{8} (e^{i3kx} + 3e^{ikx} + 3e^{-ikx} + e^{-i3kx}) = \frac{1}{8} (2\cos(3kx) + 6\cos(kx))$$

$$\cos^3(kx) = \frac{1}{4} (\cos(3kx) + 3\cos(kx)).$$

Donc, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4} (\cos(3kx) + 3\cos(kx)) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(3kx) + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)$.

• Calculons plus généralement $S(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \operatorname{Re}[\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}] \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta})^k = \begin{cases} \frac{(e^{i\theta})^n - 1}{e^{i\theta} - 1} & \text{si } e^{i\theta} \neq 1. \text{ Or, } e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\theta = 2k\pi \\ n & \text{si } e^{i\theta} = 1 \end{cases}$$

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}/\theta = 2k\pi$. Alors, $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) = n$

2^{ème} cas : $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta \neq 2k\pi$. Alors, $\frac{(e^{i\theta})^n - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{2i \sin(\frac{n\theta}{2}) e^{\frac{in\theta}{2}}}{2i \sin(\frac{\theta}{2}) e^{\frac{i\theta}{2}}} = \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}$; donc $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\theta) = \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos(\frac{(n-1)\theta}{2})$.

Retour à T_n :

1^{er} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}/x = 2k\pi$. Alors $3x = 2k\pi$ donc $T_n = \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n = n$.

2^{ème} cas : $\exists k \in \mathbb{Z}/3x = 2k\pi$ et $\forall p \in \mathbb{Z}/x \neq 2p\pi$. Alors $T_n = \frac{1}{4}n + \frac{3}{4} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \cos(\frac{(n-1)x}{2})$.

si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$,
alors
 $\operatorname{Re}(az) = \alpha \operatorname{Re}(z)$
et $\operatorname{Im}(az) = \alpha \operatorname{Im}(z)$.

11. $W_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin^2(kx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1 - \cos(2kx)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kx) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right] - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kx) \right]$

le terme car $k=0$ est nul.

$$W_n = \frac{1}{2} [2^n] + \frac{1}{2} [2^n \cos(2x)^n \cos(2nx)] = 2^{n-1} + 2^n \cos(2x)^{n-1} \cos(2nx)$$

1) Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire : $S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k$ et $T_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k$.

2) On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

a. Calculer $1 + j + j^2$ et j^p suivant les valeurs de l'entier naturel p puis placer les points M_p d'affixe j^p dans le plan complexe.

b. En déduire les valeurs des sommes : $U_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{3n}{3k}$, $V_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{3n}{3k+1}$ et $W_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{3n}{3k+2}$.

1) D'une part, $z = (1+i)^n = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. Donc $(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \operatorname{Re}(z)$ et $(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \operatorname{Im}(z)$.

D'autre part, $z = (1+i)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} i^p = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^n \binom{n}{p} i^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^n \binom{n}{p} i^p = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1}$

$z = (1+i)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k + i \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k = S_n + iT_n$. Comme S_n et T_n sont des réels, $S_n = \operatorname{Re}(z)$ et $T_n = \operatorname{Im}(z)$. Alors par unicité des parties réelle et imaginaire d'un complexe,

$S_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ et $T_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

2)

a. $j^p = e^{2ip\frac{\pi}{3}} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 0[3] \\ e^{2i\frac{\pi}{3}} & \text{si } p \equiv 1[3] \\ e^{4i\frac{\pi}{3}} & \text{si } p \equiv 2[3] \end{cases}$

b. $(1+j)^{3n} = \sum_{p=0}^{3n} \binom{3n}{p} j^p = \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 1[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 2[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j^p = \sum_{p \equiv 0[3]}^{3n} \binom{3n}{p} + \sum_{p \equiv 1[3]}^{3n} \binom{3n}{p} j + \sum_{p \equiv 2[3]}^{3n} \binom{3n}{p} j^2$

$(-j^2)^{3n} = U_n + V_n j + W_n j^2$. Donc, $(-1)^{3n} j^{6n} = U_n + V_n j + W_n j^2$.

Donc, $(-1)^n = U_n + V_n j + W_n j^2 = U_n + V_n \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + W_n \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U_n - \frac{1}{2} V_n - \frac{1}{2} W_n + i\frac{\sqrt{3}}{2} [V_n - W_n]$. Donc, par unicité des parties réelles et imaginaires d'un complexe, $U_n - \frac{1}{2} V_n - \frac{1}{2} W_n = (-1)^n$ et $V_n - W_n = 0$. De plus, $U_n + V_n + W_n = \sum_{p=0}^{3n} \binom{3n}{p} = 2^{3n} = 8^n$. Ainsi U_n, V_n et W_n vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} V_n - W_n = 0 \\ U_n + V_n + W_n = 8^n \\ U_n - \frac{1}{2} V_n - \frac{1}{2} W_n = (-1)^n \end{cases} \text{ . Donc } \begin{cases} V_n = W_n \\ U_n + 2V_n = 8^n \\ U_n - V_n = (-1)^n \end{cases} \text{ . Donc } \begin{cases} V_n = W_n \\ 3V_n = 8^n - (-1)^n \\ 3U_n = 8^n + 2(-1)^n \end{cases} \text{ . Ainsi, } \begin{cases} V_n = \frac{1}{3} [8^n - (-1)^n] \\ V_n = \frac{1}{3} [8^n - (-1)^n] \\ U_n = \frac{1}{3} [8^n + 2(-1)^n] \end{cases}$$

Soit α un réel fixé . Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z telle que :

1. $|2z - iz + 1| = 3$
 2. $\left| \frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z} \right| = 1$
 3. $\left| \frac{z+1-i}{2i-z} \right| = 2$
 4. $\arg(\bar{z} - 1) = \frac{\pi}{3}$

5. $\arg((2\bar{z} - i)(iz - 1)) = 0[\pi]$
 6. $\arg\left(\frac{z-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
 7. $\arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

8. $\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^*$
 9. $\frac{2+z}{1-\bar{z}} \in i\mathbb{R}$
 10. $\operatorname{Re}\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = 0$

2. $|2z - iz + 1| = 3 \Leftrightarrow |(2-i)z + 1| = 3 \Leftrightarrow |(2-i)\left[z + \frac{1}{2-i}\right]| = 3 \Leftrightarrow |(2-i)| \left|z + \frac{1}{2-i}\right| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5} \left|z + \frac{1}{2-i}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{2-i}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow MA = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{Aff}(A) = \frac{-1}{2-i} = -\frac{(2+i)}{5}$

6. Soit $M(z)$ un point tel que : $\bar{z} - 3i \neq 0$ et $5 + i - \bar{z} \neq 0$ i.e. $z \neq -3i$ et $z \neq -5 - i$ i.e.

$\arg\left(\frac{z-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow M \neq B$ et $M \neq A$ et M est sur le demi-cercle supérieur de diamètre et délimité par $[A, B]$.

7. $\arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow 1 - (1-i)z \neq 0$ et $2 + i(z-1) \neq 0$ et $\arg\left(\frac{1-i}{i} \times \frac{1-i-z}{i-1+z}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow z \neq \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$ et $z \neq 1 + 2i$ et $\arg\left((1+i) \times \frac{z-1+i}{z-(1+2i)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow z \neq \frac{1+i}{2}$ et $z \neq 1 + 2i$ et $\arg(1+i) + \arg\left(\frac{z-1+i}{z-(1+2i)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\operatorname{Aff}(A) = (1+2i)$

$\operatorname{Aff}(B) = \frac{1+i}{2}$

$\Leftrightarrow M \neq B$ et $M \neq A$ et $\frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow M \neq B$ et $M \neq A$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow M \neq B$ et $M \neq A$ et M est sur le demi-cercle supérieur de diamètre et délimité par $[A, B]$.

8. Soit z un complexe tel que $1 - 2i - (1 + i\sqrt{3})z \neq 0$ i.e. $z = \frac{1-2i}{(1+i\sqrt{3})}$.

$\left| \frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2i\left(z+\frac{1}{2i}\right)}{(1+i\sqrt{3})\left(\frac{1-2i}{1+i\sqrt{3}} - z\right)} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2i|}{|1+i\sqrt{3}|} \left| \frac{z+\frac{1}{2i}}{\frac{1-2i}{1+i\sqrt{3}} - z} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2i|=2=|1+i\sqrt{3}|}{\left| \frac{1-2i}{(1-2\sqrt{3})} - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - z \right|} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{z-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - z} \right|}{\left| \frac{\frac{1}{2}-z}{\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - z} \right|} = 1 \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 1$

$\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \text{med}[A, B]$.

9. Soit z un complexe tel que : $z \neq 3i$.

$\operatorname{Aff}(B) = -2-5i$
 $\operatorname{Aff}(A) = 3i$

$\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow z = -2 - 5i$ et $\arg\left(\frac{z+2+5i}{z-3i}\right) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow M \neq B$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow M \neq B$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow M \in [A, B] \setminus \{A, B\}$

- 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe complexe z tels que : M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle (puis isocèle).
 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z), P(z^2)$ et $Q(z^3)$ sont alignés.
 3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z), A(1)$ et $P(1+z)$ sont alignés.

1) Alors, $M = P$ ou $P = Q$ ou $M = Q \Leftrightarrow z = z^2$ ou $z^2 = z^3$ ou $z = z^3 \Leftrightarrow z(1-z) = 0$ ou $z^2(1-z) = 0$ ou $z(1-z)(1+z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1, 1, 0\}$.
 Désormais $z \notin \{-1, 1, 0\}$. (sinon MPQ n'est pas un triangle !!)

TRIANGLE RECTANGLE :

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en M
 $\Leftrightarrow (PM) \perp (QM) \Leftrightarrow (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{QM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^3 - z^2}{z^2 - z^2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg(1+z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow (\vec{i}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow M$ est sur la droite D passant par B et dirigée par $\vec{j}$.
 $\Leftrightarrow \text{ou } \text{Aff}(B) = -1$
- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en P
 $\Leftrightarrow (PM) \perp (QP) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^3 - z^2}{z^2 - z^2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow M$ est sur la droite des imaginaires.
 $\Leftrightarrow \text{ou } \text{Aff}(B) = -1$
- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en Q
 $\Leftrightarrow (QM) \perp (QP) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^3 - z^2}{z^3 - z^2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de diamètre $[O, B]$.
 $\Leftrightarrow \text{ou } \text{Aff}(B) = -1$

Ainsi, $Sol = (D \cup (Oy) \cup C_{[O, B]}) \setminus \{O, B\}$

TRIANGLE ISOCELE :

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle en M
 $\Leftrightarrow PM = QM \Leftrightarrow |z - z^3| = |z - z^2| \Leftrightarrow \left|\frac{z - z^3}{z - z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z - z^3}{z - z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z + 1| = 1 \Leftrightarrow BM = 1 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de centre B et de rayon 1.
- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle en P
 $\Leftrightarrow PM = QP \Leftrightarrow |z^2 - z^3| = |z^2 - z^2| \Leftrightarrow \left|\frac{z^2 - z^3}{z^2 - z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z^2 - z^3}{z^2 - z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1.
- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle en Q
 $\Leftrightarrow QM = QP \Leftrightarrow |z^3 - z^2| = |z^3 - z| \Leftrightarrow \left|\frac{z^3 - z^2}{z^3 - z}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{z+1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z| \Leftrightarrow BM = OM \Leftrightarrow M$ est sur la médiatrice de $[O, B]$.

Ainsi, $Sol = (C(O, 1) \cup C(B, 1) \cup med[O, B])$

- 2) Si $M = P$ ou $M = Q$ ou $P = Q$ alors les points M, P et Q sont alignés.

Or $M = P \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$.

$M = Q \Leftrightarrow z^4 = z \Leftrightarrow z(z^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = j$ ou $z = j^2$.

$\Leftrightarrow$ car les solutions de $1+z+z^2=0$ sont les racines 3ièmes de l'unité sauf 1

$P = Q \Leftrightarrow z^4 = z^2 \Leftrightarrow z^2(z^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow z^2(z-1)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1$.

Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), B(-1), C(j), D(j^2)\}$ alors M, P et Q sont alignés.

Prenons maintenant $z \notin \{0, 1, -1, j, j^2\}$. Alors, M, P et Q sont distincts. Par conséquent,

M, P et Q sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^4 - z^2}{z^2 - z^2}\right) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^2(z-1)(z+1)}{z(z-1)}\right) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg(z(z+1)) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow z(z+1) \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow z(z+1) = \overline{z(z+1)} \Leftrightarrow z(z+1) = \bar{z}(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ou $2\text{Re}(z) = -1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $\text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.
 $\Leftrightarrow M$ est sur l'axe réel ou sur la droite D verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, $Sol = D \cup (Ox)$ puisque les points O, A, B, C et D sont aussi dans cet ensemble.

- 1) Si $M = A$ (i.e $z = 1$) ou $A = P$ (i.e $z = 0$) ou $P = M$ (i.e $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$) alors les points M, P et A sont alignés.

(en effet, $P = M \Leftrightarrow 1 + z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$).
 $\Delta = 1-4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), C(e^{i\frac{\pi}{3}}), D(e^{-i\frac{\pi}{3}})\}$ alors A, M et P sont alignés.

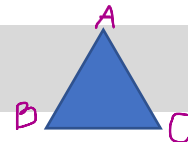
Prenons maintenant $z \notin \{0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$. Alors, M, P et Q sont distincts. Par conséquent,

M, P et A sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PA}) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{1+z^2-1}{z-1}\right) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^2}{z-1}\right) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow a \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} = \overline{\left(\frac{z^2}{(z-1)}\right)} \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} = \frac{\bar{z}^2}{(\bar{z}-1)}$
 $\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) = \bar{z}^2(z-1) \Leftrightarrow z\bar{z}\bar{z} - z\bar{z} - \bar{z}^2z + \bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})|z|^2 - (z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[|z|^2 - (z+\bar{z})] = 0$
 $\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$ ou $|z|^2 - (z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ou $|z|^2 = 2\text{Re}(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$
 $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $|z-1| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $|z-1| = 1 \Leftrightarrow M$ est sur l'axe réel ou $AM = 1$
 $\Leftrightarrow M$ est sur l'axe réel ou M est sur le cercle de centre A et de rayon 1.

Comme O, D et C sont sur le cercle de centre A et de rayon 1, je peux conclure que $Sol = C(A, 1) \cup (\text{axe réel})$.

EX 19 Soit a, b et c trois complexes distincts et A, B et C leurs images ponctuelles respectives. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

- Compléter $j^3 = \dots$ et $1 + j + j^2 = \dots$.
- Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin) si et ssi $a + bj + cj^2 = 0$



1. $j^3 = 1, j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$. Donc, $1, j$ et j^2 sont les racines troisièmes de l'unité, leur somme est nulle i.e. $1 + j + j^2 = 0$.

2. ABC est équilatère direct si et ssi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $AB = AC$ si et ssi $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $|b-a| = |c-a|$

si et ssi $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$ si et ssi $\frac{c-a}{b-a} = 1e^{i\frac{\pi}{3}}$ si et ssi $\frac{c-a}{b-a} = 1 + j$ si et ssi $(c-a) - (1+j)(b-a) = 0$
car $e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + j$

si et ssi $ja - (1+j)b + c = 0$ si et ssi $a - \left(\frac{1}{j} + 1\right)b + \frac{1}{j}c = 0$ si et ssi $a + (j^2 + 1)b + j^2c = 0$ si et ssi $a + jb + j^2c = 0$.
car $\frac{1}{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$

EX 20

- Soit $\alpha = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$. Représenter les points M_n d'affixe α^n tq $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}i$ et u_n affixe de M_n .
 - Montrer que tous les points M_n sont alignés.
 - Exprimer u_n en fonction de n . Déterminer la limite des suites $\text{Re}(u_n)$ et $\text{Im}(u_n)$.
- Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + 2(1-i)}{z_n - 3i}$ (**).
 On note M_n le point image de z_n .
 - Calculer z_1 et z_2 .

- b) Trouver deux suites constantes égales à p et q (telles que $|p| > |q|$.) qui vérifient la même relation de récurrence (**) que la suite (z_n) .
- c) Montrer que la suite $\left(\frac{z_n - p}{z_n - q}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- d) En déduire z_n en fonction de n et Déterminer la limite des suites $Re(z_n)$ et $Im(z_n)$.

Ex 21 Soit a un nombre complexe . Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + jy + j^2z = 0 \\ j^2x + y + jz = 0 \\ jx + j^2y + z = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

Ex 21 bis Soit a un nombre complexe . Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \bar{a}L_1} \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ (1 - a\bar{a})y + (a - a^2\bar{a})z = 0 \\ (\bar{a} - a\bar{a}^2)y + (1 - \bar{a}^2a^2)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ (1 - |a|^2)y + a(1 - |a|^2)z = 0 \\ (\bar{a}(1 - |a|^2)y + (1 - |a|^4)z = 0 \end{cases}$$

Si $|a|^2 = 1$ i.e. $|a| = 1$ alors $(S) \Leftrightarrow x + ay + a^2z = 0 \Leftrightarrow x = -ay - a^2z$. Donc $Sol = \{(-ay - a^2z, y, z) / y, z \text{ réels}\}$.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{(1-|a|^2)}L_2} \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ y + az = 0 \\ \bar{a}y + (1 + |a|^2)z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \bar{a}L_2} \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ y + az = 0 \\ (1 + |a|^2 - |a|^2)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ y + az = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ Donc } Sol = \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Pour l'ex 21 , il suffit de prendre $a = j$ et, comme $|j| = 1$, $Sol = \{(-jy - j^2z, y, z) / y, z \text{ réels}\}$.